Тригонометрические уравнения

Два основных метода решения тригонометрических уравнений

Математика

10 класс

МБОУ СШ №12

Учитель: Шудраков Николай Николаевич

Метод введения новой переменной

- Метод сводится к замене тригонометрической функции новой переменной.
- Полученное уравнение решается известными способами, после решения возвращаемся к решению тригонометрического уравнения

Пример 1.

- Решите уравнение:

$$2sin^2 x - 5\sin x + 2 = 0$$

Пример 1. Решение

$$2sin^2 x - 5\sin x + 2 = 0$$

Введем новую переменную: $z = \sin x$

Уравнение примет вид:

$$2z^2 - 5z + 2 = 0$$

отсюда находим $z_1 = 2$, $z_2 = \frac{1}{2}$

Пример 1. Решение

Значит, либо $\sin x = 2$,

либо $\sin x = \frac{1}{2}$

Первое уравнение не имеет корней,

а из второго находим:

$$x = (-1)^n \arcsin\frac{1}{2} + \pi n \qquad \arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$$

$$x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$$

Ответ: $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in Z$

Пример 2.

- Решите уравнение:

$$\cos^2 x - \sin^2 x - \cos x = 0$$

Пример 2. Решение

$$\cos^2 x - \sin^2 x - \cos x = 0$$

По основному тригонометрическому тождеству $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

Получим:

$$\cos^2 x - (1 - \cos^2 x) - \cos x = 0$$

$$2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$$

Введем новую переменную: $z = \cos x$

Уравнение примет вид:

$$2z^2 - z - 1 = 0$$

Пример 2. Решение

$$2z^2 - z - 1 = 0$$

Находим корни: $z_1 = 1$, $z_2 = -\frac{1}{2}$

Отсюда: $\cos x = 1$ и $\cos x = -\frac{1}{2}$

Из первого уравнения $x = 2\pi n$

Их второго находим $x = \pm \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi n$

$$\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \pi - \arccos\frac{1}{2} = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

$$x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$$

Ответ: $x = 2\pi n$, $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in Z$

Метод разложения на множители

- Если уравнение $f(x)=0$ удается преобразовать к виду $f_1(x) \cdot f_2(x)=0$, то либо $f_1(x)=0$, либо $f_2(x)=0$.
- В подобных случаях говорят, что задача сводится к решению совокупности уравнений:

$$f_1(x)=0\;;\;\; f_2(x)=0$$

Пример 3.

- Решите уравнение:

$$2\sin\frac{x}{2}\cos 5x - \cos 5x = 0$$

Пример 3. Решение

$$2\sin\frac{x}{2}\cos 5x - \cos 5x = 0$$

Вынесем общий множитель за скобку и получим: $\cos 5x\left(2\sin\frac{x}{2} - 1\right) = 0$

Приходим к совокупности двух уравнений:

$\cos 5x = 0$

$2\sin\frac{x}{2} - 1 = 0$

Пример 3. Решение

Решаем первое уравнение:

$$\cos 5x = 0$$

$t = 5x$

$\cos t = 0$

$t = \frac{\pi}{2} + \pi n$

$5x = \frac{\pi}{2} + \pi n$

$x = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi n}{5}$

Пример 3. Решение

Решаем второе уравнение:

$$2\sin\frac{x}{2} - 1 = 0$$

$$2\sin\frac{x}{2} = 1$$

$$\sin\frac{x}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{x}{2} = (-1)^n \arcsin\frac{1}{2} + \pi n$$

$$\arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$$

$$\frac{x}{2} = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$$

$$x = (-1)^n \frac{\pi}{3} + 2\pi n$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi n}{5}$, $x = (-1)^n \frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in Z$