



# Тригонометрические таблицы



# Выбор таблицы

1. Значения тригонометрических функций для некоторых углов.
2. Значения тригонометрических функций нестандартных углов.
3. Простейшие тождества.
4. Формулы приведения.
5. Формулы для кратных углов.
6. Произведения.
7. Степени.
8. Однопараметрическое представление и интегралы.



## Значения тригонометрических функций для некоторых углов

$\alpha$	$0^\circ$ (0 рад)	$30^\circ$ ( $\pi/6$ )	$45^\circ$ ( $\pi/4$ )	$60^\circ$ ( $\pi/3$ )	$90^\circ$ ( $\pi/2$ )	$180^\circ$ ( $\pi$ )	$270^\circ$ ( $3\pi/2$ )	$360^\circ$ ( $2\pi$ )
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	N/A	0	N/A	0
$\operatorname{ctg} \alpha$	N/A	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	N/A	0	N/A
$\sec \alpha$	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	N/A	-1	N/A	1
$\operatorname{cosec} \alpha$	N/A	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1	N/A	-1	N/A



Выбор таблицы

## Значения тригонометрических функций нестандартных углов

$\alpha$	$\frac{\pi}{12} = 15^\circ$	$\frac{\pi}{10} = 18^\circ$	$\frac{\pi}{8} = 22.5^\circ$	$\frac{\pi}{5} = 36^\circ$	$\frac{3\pi}{10} = 54^\circ$	$\frac{3\pi}{8} = 67.5^\circ$	$\frac{2\pi}{5} = 72^\circ$
$\sin \alpha$	$\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$	$\frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$	$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$	$\frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$
$\cos \alpha$	$\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$	$\frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$
$\operatorname{tg} \alpha$	$2-\sqrt{3}$	$\sqrt{1-\frac{2}{\sqrt{5}}}$	$\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}}$	$\sqrt{5-2\sqrt{5}}$	$\sqrt{1+\frac{2}{\sqrt{5}}}$	$\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}}$	$\sqrt{5+2\sqrt{5}}$
$\operatorname{ctg} \alpha$	$2+\sqrt{3}$	$\sqrt{5+2\sqrt{5}}$	$\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}}$	$\sqrt{1+\frac{2}{\sqrt{5}}}$	$\sqrt{5-2\sqrt{5}}$	$\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}}$	$\sqrt{1-\frac{2}{\sqrt{5}}}$

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{120} = \operatorname{tg} 1.5^\circ = \sqrt{\frac{8 - \sqrt{2(2-\sqrt{3})(3-\sqrt{5})} - \sqrt{2(2+\sqrt{3})(5+\sqrt{5})}}{8 + \sqrt{2(2-\sqrt{3})(3-\sqrt{5})} + \sqrt{2(2+\sqrt{3})(5+\sqrt{5})}}$$

$$\cos \frac{\pi}{240} = \frac{1}{16} \left( \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}} \left( \sqrt{2(5+\sqrt{5})} + \sqrt{3-\sqrt{15}} \right) + \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}} \left( \sqrt{6(5+\sqrt{5})} + \sqrt{5-1} \right) \right)$$

$$\cos \frac{\pi}{17} = \frac{1}{8} \sqrt{2 \left( 2 \sqrt{\sqrt{\frac{17(17-\sqrt{17})}{2}}} - \sqrt{\frac{17-\sqrt{17}}{2}} - 4\sqrt{2(17+\sqrt{17})} + 3\sqrt{17} + 17 + \sqrt{2(17-\sqrt{17})} + \sqrt{17+15} \right)}$$



Выбор таблицы

## Простейшие тождества

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha},$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}.$$

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$$

## Чётность

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha,$$

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha,$$

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha,$$

$$\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha,$$

$$\sec(-\alpha) = \sec \alpha,$$

$$\operatorname{cosec}(-\alpha) = -\operatorname{cosec} \alpha.$$



Выбор таблицы

## Формулы приведения

$\beta$	$\frac{\pi}{2} + \alpha$	$\pi + \alpha$	$\frac{3\pi}{2} + \alpha$	$\frac{\pi}{2} - \alpha$	$\pi - \alpha$	$\frac{3\pi}{2} - \alpha$	$2\pi - \alpha$
$\sin \beta$	$\cos \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\sin \alpha$
$\cos \beta$	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\sin \alpha$	$\cos \alpha$
$\operatorname{tg} \beta$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$
$\operatorname{ctg} \beta$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$



Выбор таблицы

## Формулы сложения

$$\begin{aligned}\sin(\alpha \pm \beta) &= \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta, \\ \cos(\alpha \pm \beta) &= \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) &= \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}, \\ \operatorname{ctg}(\alpha \pm \beta) &= \frac{\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta \mp 1}{\operatorname{ctg} \beta \pm \operatorname{ctg} \alpha}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin(\alpha + \beta + \gamma) &= \sin \alpha \cos \beta \cos \gamma + \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma + \cos \alpha \cos \beta \sin \gamma - \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma, \\ \cos(\alpha + \beta + \gamma) &= \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma - \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma - \sin \alpha \cos \beta \sin \gamma - \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma.\end{aligned}$$



Выбор таблицы

## Формулы для кратных углов

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha},$$

$$\begin{aligned} \cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = \\ &= 1 - 2 \sin^2 \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{tg} \alpha}, \end{aligned}$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha},$$

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}{2 \operatorname{ctg} \alpha} = \frac{1}{2} (\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha).$$

$$\sin 4\alpha = \cos \alpha (4 \sin \alpha - 8 \sin^3 \alpha),$$

$$\cos 4\alpha = 8 \cos^4 \alpha - 8 \cos^2 \alpha + 1,$$

$$\operatorname{tg} 4\alpha = \frac{4 \operatorname{tg} \alpha - 4 \operatorname{tg}^3 \alpha}{1 - 6 \operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^4 \alpha},$$

$$\operatorname{ctg} 4\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^4 \alpha - 6 \operatorname{ctg}^2 \alpha + 1}{4 \operatorname{ctg}^3 \alpha - 4 \operatorname{ctg} \alpha},$$

$$\sin 5\alpha = 16 \sin^5 \alpha - 20 \sin^3 \alpha + 5 \sin \alpha$$

$$\cos 5\alpha = 16 \cos^5 \alpha - 20 \cos^3 \alpha + 5 \cos \alpha$$

$$\operatorname{tg} 5\alpha = \operatorname{tg} \alpha \frac{\operatorname{tg}^4 \alpha - 10 \operatorname{tg}^2 \alpha + 5}{5 \operatorname{tg}^4 \alpha - 10 \operatorname{tg}^2 \alpha + 1}$$

$$\begin{aligned} \sin 3\alpha &= 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha, \\ \cos 3\alpha &= 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha, \end{aligned}$$

$$\operatorname{tg} 3\alpha = \frac{3 \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg}^3 \alpha}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 \alpha},$$

$$\operatorname{ctg} 3\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^3 \alpha - 3 \operatorname{ctg} \alpha}{3 \operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}.$$

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}, \quad 0 \leq \alpha \leq 2\pi,$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}, \quad -\pi \leq \alpha \leq \pi,$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha},$$

$$\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha} = \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha},$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}, \quad 0 \leq \alpha < \pi,$$

$$\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}}, \quad 0 < \alpha \leq \pi.$$



Выбор таблицы



## Произведения

$$\begin{aligned}\sin \alpha \sin \beta &= \frac{\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)}{2}, \\ \sin \alpha \cos \beta &= \frac{\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)}{2}, \\ \cos \alpha \cos \beta &= \frac{\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)}{2}, \\ \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta &= \frac{\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)}, \\ \operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \beta &= \frac{\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)}, \\ \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta &= \frac{\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)}.\end{aligned}$$



Выбор таблицы

## Степени

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2},$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2},$$

$$\sin^3 \alpha = \frac{3 \sin \alpha - \sin 3\alpha}{4},$$

$$\cos^3 \alpha = \frac{3 \cos \alpha + \cos 3\alpha}{4},$$

$$\sin^4 \alpha = \frac{\cos 4\alpha - 4 \cos 2\alpha + 3}{8},$$

$$\cos^4 \alpha = \frac{\cos 4\alpha + 4 \cos 2\alpha + 3}{8},$$

$$\operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha},$$

$$\operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{1 - \cos 2\alpha},$$

$$\operatorname{tg}^3 \alpha = \frac{3 \sin \alpha - \sin 3\alpha}{3 \cos \alpha + \cos 3\alpha},$$

$$\operatorname{ctg}^3 \alpha = \frac{3 \cos \alpha + \cos 3\alpha}{3 \sin \alpha - \sin 3\alpha},$$

$$\operatorname{tg}^4 \alpha = \frac{\cos 4\alpha - 4 \cos 2\alpha + 3}{\cos 4\alpha + 4 \cos 2\alpha + 3},$$

$$\operatorname{ctg}^4 \alpha = \frac{\cos 4\alpha + 4 \cos 2\alpha + 3}{\cos 4\alpha - 4 \cos 2\alpha + 3}.$$



Выбор таблицы

## Суммы

$$\sin \alpha \pm \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha \pm \beta}{2} \cos \frac{\alpha \mp \beta}{2}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$$

$$1 \pm \sin 2\alpha = (\sin \alpha \pm \cos \alpha)^2.$$



Выбор таблицы

## Однопараметрическое представление

$$\sin x = \frac{\sin x}{1} = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$$

$$\cos x = \frac{\cos x}{1} = \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$$

$$\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}$$

$$\sec x = \frac{1}{\cos x} = \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$$

$$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x} = \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}$$



Выбор таблицы

## Производные и интегралы

$$(\sin x)' = \cos x,$$

$$(\cos x)' = -\sin x,$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x},$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x},$$

$$(\sec x)' = \frac{\sin x}{\cos^2 x},$$

$$(\operatorname{cosec} x)' = -\frac{\cos x}{\sin^2 x}.$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C,$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C,$$

$$\int \operatorname{tg} x dx = -\ln |\cos x| + C,$$

$$\int \operatorname{ctg} x dx = \ln |\sin x| + C,$$

$$\int \sec x dx = \ln \left| \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \right| + C,$$

$$\int \operatorname{cosec} x dx = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C.$$



Выбор таблицы