Финансовый университет
при Правительстве Российской Федерации

Анализ данных
Борисова Л.Р

Анализ данных

Анализ данных –это совокупность методов и средств извлечения из организованных данных информации для принятия решений.

Вероятность

Теория вероятностей и математическая статистика составляют основу для понимания и интерпретации статистических данных.

Случайные явления

При изучении случайных явлений основная цель — это вычисление общих характеристик совокупности случайных явлений для создания общих выводов и предсказаний.

Не все случайные явления (эксперименты) можно изучать методами теории вероятностей, а лишь те, которые <u>могут быть воспроизведены в одних и тех же условиях</u>.

Достижение цели

1) Использование теории
2) Наблюдения

Пространство элементарных исходов

Определение 1. **Пространством элементарных исходов** Ω («омега») называется множество, содержащее все возможные результаты данного случайного эксперимента, из которых в эксперименте происходит ровно один. Элементы этого множества называют **элементарными исходами** и обозначают буквой ω («омега»).

***Определение 2. Событиями** будем называть подмножества множества Ω. Говорят, что в результате эксперимента произошло событие $A \subseteq \Omega$, если в эксперименте произошел один из элементарных исходов, входящих в множество A*

Классификация событий

Достоверным называется событие, которое обязательно происходит в результате эксперимента.

Невозможным называется событие, которое не может произойти в результате эксперимента.

Два события называются **равными**, если одно из них наступает тогда и только тогда, когда наступает другое.

Пример. Будут произведены 3 выстрела в мишень. A – число попаданий в мишень равно 0, B – число попаданий в мишень меньше, чем 0,5. Очевидно, что $A=B$.

Два события называются **равновозможными,** если вероятности их наступления равны *(в смысле симметрии)*.

Пример. Пусть испытание – бросание монеты. Тогда события – выпадение “орла” и – выпадение “решки” являются равновозможным

Классификация событий

Два события называются **несовместными** (**несовместимыми**), если они не могут наступить одновременно.

События называются **единственно возможными** для некоторого испытания, если в результате испытания хотя бы оно из них обязательно наступает.

Говорят, что события образуют **полную систему (группу),** если эти события попарно несовместимы и единственно возможны.

Если два события образуют полную систему, то они называются парой **взаимно противоположных** событий.

(

Противоположные события

Два несовместных события, из которых одно должно произойти обязательно, называются противоположными

ИЛИ ИНАЧЕ ГОВОРЯ

Противоположными называют два единственно возможных события, образующих полную группу. Если одно из двух противоположных событий обозначено через *A*, то другое событие принято обозначать . $\overline{A}$

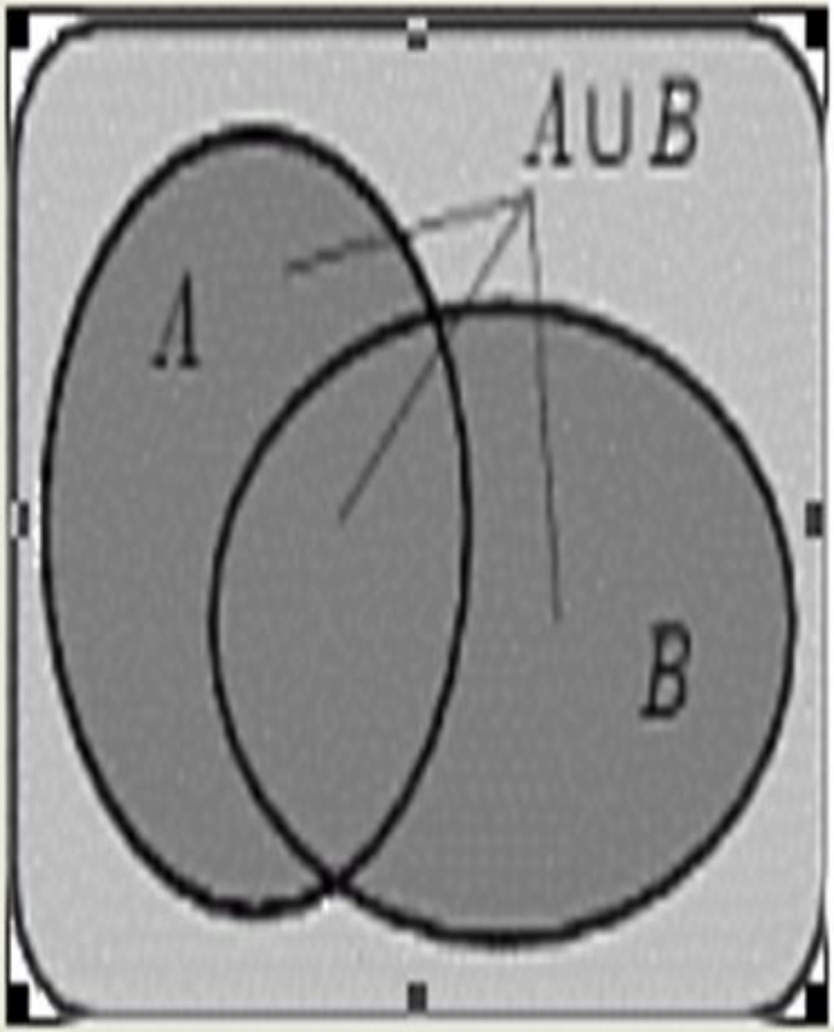
Так, например, если событие *A* – «студент сдал экзамен», то противоположным событием будет – «студент не сдал экзамен» - $\overline{A}$

Действия над событиями

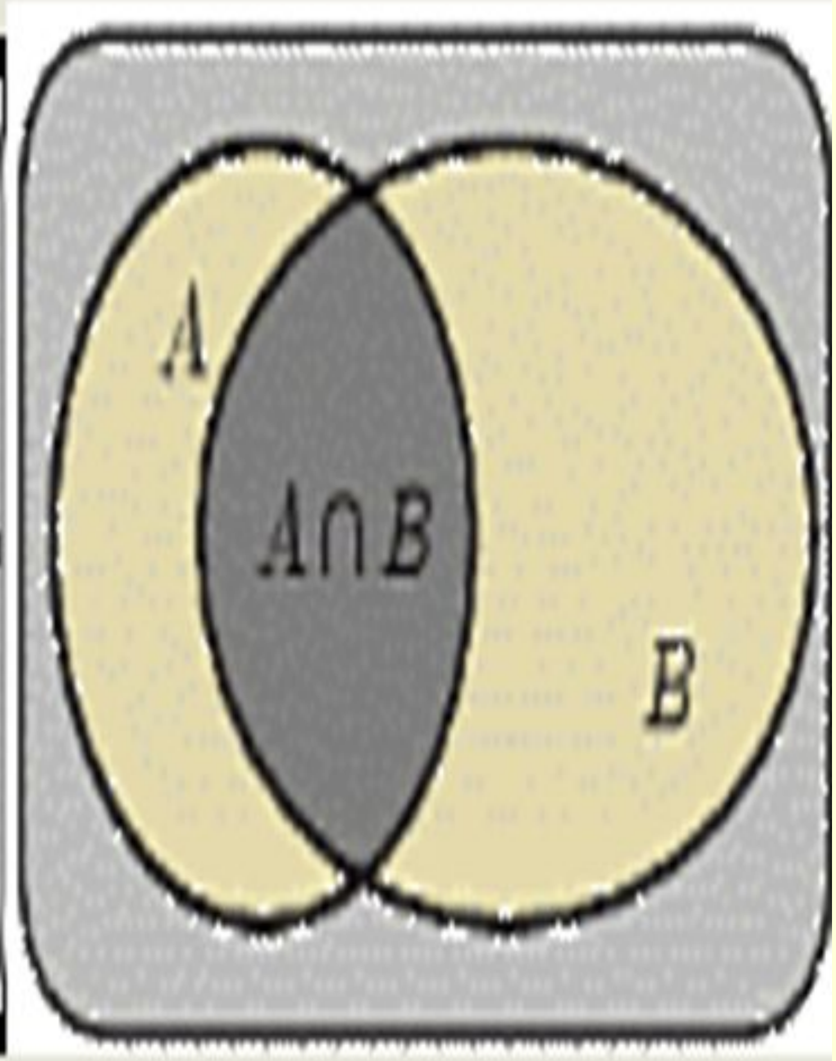
Суммой (объединением) нескольких событий называется событие, состоящее в наступлении хотя бы одного из данных событий в результате испытания.

Произведением (пересечением) нескольких событий называется событие, состоящее в совместном наступлении всех этих событий в результате испытания.

Разностью двух событий *A* и *B* называется событие, которое состоит в том, что событие *A* произойдѐт, а событие *B* не произойдѐт.



Сумма (объединение событий)



Произведение (пересечение событий)

Свойства действий над событиями

Свойства операций над событиями:

1. Если $A \subset B$, то $A+B=B$, $AB=A$, $A-B=\varnothing$.

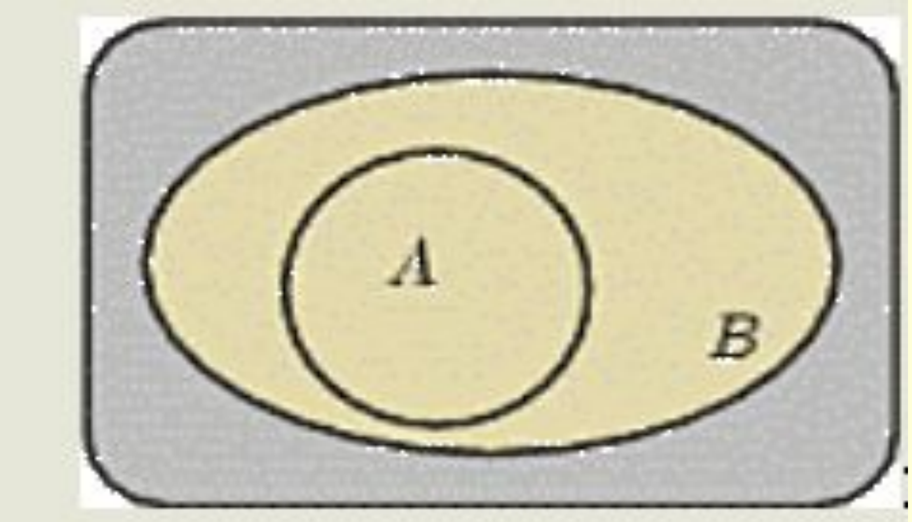
2. $A+A=A$, $A \cdot A=A$, $A-A=\varnothing$.

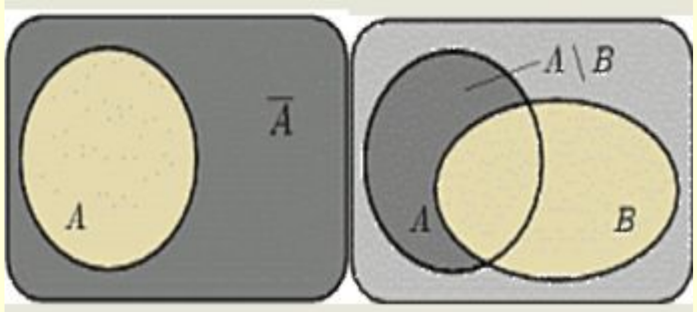
3. $A+\Omega=\Omega$, $A \cdot \Omega=A$, $\Omega-A=\overline{A}$.

4. $A+\varnothing=A$, $A \cdot \varnothing=\varnothing$, $A-\varnothing=A$.

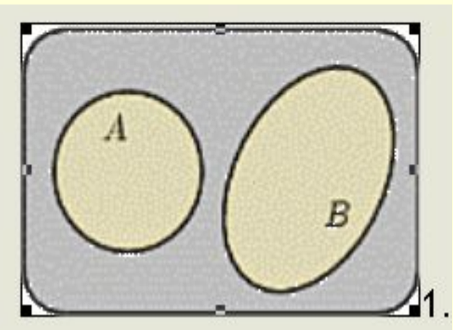
Если событие А – это часть события В, то говорят, что событие А влечет за собой событие В и тогда $A \subset B$

Пример. Пусть событие *B* влечет за собой *A*, тогда $AB=B$, $A+B=A$





Если при каждом испытании, при котором происходит событие A, происходит и событие B, то говорят, что *A влечет за собой событие B* (*входит* в B, является *частным случаем*, *вариантом B*) или *B включает событие A*, и обозначают $A \subset B$. Например, если событие A — изделие 1-го сорта, B — изделие 2-го сорта, C — изделие стандартное, то $A \subset C$ и $B \subset C$.



А и В - несовместные

Классическое определение вероятности события

Определение. *Пусть некоторое испытание имеет n исходов, причем эти исходы*

а) попарно несовместимы;

б) единственно возможны;

в) равновозможны

и наступлению события A благоприятствует m исходов из n.

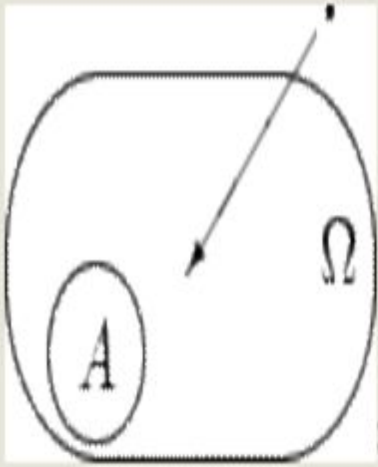
Тогда вероятность наступления события A (в одном испытании) определяется по формуле

$$P(A)= m/n$$

(Классическая формулировка Якоба Бернулли: «Вероятность есть степень достоверности и отличается от неё как часть от целого »)

Классическое определение вероятности события

Пример. В коробке имеется 10 хороших деталей и 5 бракованных. Наудачу из коробки извлекается одна деталь. Найти вероятность наступления события A – извлеченная деталь – хорошая.



Эксперимент удовлетворяет условиям ***«геометрического определения вероятности»***, если его исходы можно изобразить точками некоторой области Ω в $\mathbb{R}^m$ так, что вероятность попадания точки в любую часть $A \subset \Omega$ не зависит от формы или расположения A внутри Ω, а зависит лишь от меры области A и, следовательно пропорциональна этой мере:

$$\mathsf{P}(\cdot \in A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)},$$

где $\mu(A)$ обозначает меру области A (длину, площадь, объем и т.д.).

Выборки

Пусть $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ – множество из n элементов.

Набор элементов $a_{i_1}, \dots, a_{i_r}$, $r \geq 1$, называется **выборкой объема r из n элементов**, или (n, r)-**выборкой**.

Выборка называется **упорядоченной**, если порядок следования элементов в ней задан.

Две упорядоченные выборки, отличающиеся лишь порядком следования элементов, считаются **различными**.

Если порядок следования элементов не является существенным, то выборка называется **неупорядоченной**.

В выборках могут допускаться или не допускаться **повторения** элементов.

Правило сложения

Если элемент А можно выбрать из некоторого множества m способами, а другой элемент В – n способами, причём выборы А и В таковы, что взаимно исключают друг друга и не могут быть выбраны одновременно, то выбор какого-либо одного из этих элементов (либо А, либо В) можно осуществить $(m+n)$ способами.

Пример 1. Пусть из города А в город В можно добраться одним авиамаршрутом, двумя железнодорожными маршрутами и тремя автобусными маршрутами. Сколькими способами можно добраться из города А в город В?

Правило произведения

Если элемент А можно выбрать из некоторого множества m способами и если после каждого такого выбора элемент В можно выбрать n способами, то пара элементов (А, В) в указанном порядке может быть выбрана $(m \times n)$ способами.

Пример 1. Из пункта А в пункт В ведут 3 дороги, а из пункта В в пункт С – 4 дороги. Сколькими способами можно совершить поездку из А в С через В?

Правило суммы и произведения

Пример. Найти, сколько возможно различных результатов

а) при подбрасывании трёх монет;

б) бросая дважды игральную кость.

в) Найти, сколько бывает трёхзначных чисел;

г) трёхзначных чисел, все цифры которых различны;

д) чётных трёхзначных чисел.

Правило суммы и произведения

а) $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$;

б) $6 \cdot 6 = 36$;

в) $9 \cdot 10 \cdot 10 = 900$;

г) $9 \cdot 9 \cdot 8 = 648$;

д) $9 \cdot 10 \cdot 5 = 450$.

Размещения

Размещением из n элементов по k называется *упорядоченная* (n, k)-выборка без повторений элементов.

Пример. Пусть $A = \{1, 2, 3\}$.

Перечислим все размещения из элементов множества A по 2:
$1, 2;\ \ 1, 3;\ \ 2, 1;\ \ 2, 3;\ \ 3, 1;\ \ 3, 2.$

Пример. Турист может посетить города Углич, Ростов, Ярославль, Кострому, Сергиев Посад.
Сколько маршрутов с последовательным посещением трех городов он может составить?

Для решения этой задачи надо подсчитать число размещений из 5 по 3.

Число размещений A_n^k (читается: число размещений из n элементов по k элементов) можно найти из принципа умножения. Первый элемент размещения можно выбрать n способами. Как только такой выбор будет сделан, останется (n–1) возможностей, чтобы выбрать второй элемент; после этого останется (n–2) возможностей для выбора третьего элемента и т. д.; для выбора k-го элемента будет (n–k+1) возможностей. По принципу умножения находим

$$A_n^k = \underbrace{n(n-1)...(n-k+1)}_{k\ \text{множителей}} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Легко понять, что $A_n^1 = n$.

Размещения

Пример 1. В некоторой газете 12 страниц. Необходимо на страницах этой газеты поместить 4 фотографии. Сколькими способами это можно сделать, если ни одна страница газеты не должна содержать более одной фотографии?

Пример 2. Сколько существует различных вариантов выбора 4-х кандидатур из 9-ти специалистов для поездки в 4 различных страны?

Пример 2. Научное общество состоит из 25 человек. Надо выбрать президента общества, вице-президента, ученого секретаря и казначея. Сколькими способами может быть сделан этот выбор, если каждый член общества может занимать лишь один пост?

Пример 3. Из 10 книг выбирают 4 для рассылки по разным адресам. Сколькими способами это можно сделать?

Перестановки

Перестановкой n элементов называется *упорядоченная* (n, n)-выборка без повторений элементов.

Пример. Пусть $A = \{1, 2, 3\}$.
Перечислим все перестановки элементов множества A:
$1, 2, 3;\ \ 1, 3, 2;\ \ 2, 1, 3;\ \ 2, 3, 1;\ \ 3, 1, 2;\ \ 3, 2, 1.$

Пример. Восемь студентов пишут ответ на экзаменационный вопрос.
Сколькими способами их могут последовательно вызвать отвечать?

Для решения этой задачи надо подсчитать число перестановок 8 элементов.

Рассмотрим частный случай, когда $k=n$. Соответствующее этому случаю размещение называется перестановкой.

Перестановками из n элементов называются такие комбинации, каждая из которых содержит все n элементов и которые отличаются друг от друга лишь порядком расположения элементов.

Поясним это на следующем примере. Из этих трёх элементов: a, b и c. можно составить шесть перестановок: abc, acb, bac, bca, cab, cba. Все приведённые перестановки отличаются друг от друга только порядком их расположения.

Число перестановок n различных элементов $P_n = A_n^n = n!$

Пример Сколькими способами можно расставить девять различных книг на полке, чтобы определенные четыре книги стояли рядом?

Пример 1. Сколькими способами можно обить 6 стульев тканью, если имеются ткани 6 различных цветов и все стулья должны быть разного цвета.

Пример 2. Дачник выделил на своём участке семь грядок для выращивания овощей, т. к. хочет иметь свои помидоры, огурцы, перец, лук, чеснок, салат и кабачки. Каждый вид должен иметь отдельную грядку. Сколькими способами он может расположить грядки для посадки?

Сочетания

Сочетанием из n элементов по k называется *неупорядоченная* (n, k)-выборка без повторений элементов.

Пример. Пусть $A = \{1, 2, 3\}$.
Перечислим все сочетания из элементов множества A по 2:
$1, 2;\ \ 1, 3;\ \ 2, 3.$

Пример. В олимпиаде по программированию может участвовать команда из трех студентов группы.
Сколько возможностей составить команду, если в группе 20 студентов?

Для решения этой задачи нужно подсчитать число сочетаний из 20 по 3.

$$A_n^k = C_n^k P_k$$

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Пример 1. Компания из 15 человек разделяется на две группы, одна из которых состоит из 6 человек, а другая – из 9 человек. Сколькими способами это можно сделать?

Пример 1. В группе учатся 10 юношей и 15 девушек. Для дежурства случайным образом отобраны три студента. Найти вероятность того, что среди отобранных студентов будут два юноши и одна девушка.

Пример 2.На полке стоят 15 книг, 5 из них в переплѐте. Берут наудачу три книги. Какова вероятность того, что все три книги в переплѐте?

Статистическое определение вероятности

Статистическое определение вероятности события предполагает, что проводиться серия из *n* одних и тех же испытаний. При этом, если интересующее нас событие *A* появилось в *m* испытаниях, то *относительная частота* или *частость* появления этого события определяется соотношением $w(A)=m/n$

При неограниченном увеличении числа испытаний относительная частота появления события будет практически сколь угодно мало отличаться от некоторого постоянного числа, которое и принимается за вероятность события в отдельном испытании, т.е.

$$P(A)=\lim_{n\to\infty} w(A)=\lim_{n\to\infty}\frac{m}{n} \quad \text{или} \quad P(A)\approx w(A).$$

Пример. Наблюдения показывают, что в среднем среди 1000 новорождѐнных детей 515 мальчиков. Какова частота рождения мальчика в такой серии наблюдений?

Теорема умножения вероятностей

Условной вероятностью события A по отношению к событию B называется вероятность события A, вычисленная при условии, что событие B произошло и обозначается $P(A|B)$ или $P_B(A)$.

ИЛИ ИНАЧЕ

Определение. Условной вероятностью события А при условии, что произошло событие В , называется число

$$P(A\backslash B)=P(AB)/\,P(B).$$

Теорема умножения вероятностей.

Если $P(A)$ и $P(B) > 0$, то

$$P(AB)=P(A)P(B\backslash A)=P(B)P(A\backslash B)$$

Теорема.

Для любых событий $A_1, A_2, \dots A_k$
верно равенство

$$P(A_1 A_2 \dots A_k) = P(A_1) P(A_2 \backslash A_1) \dots P(A_k \backslash A_1 A_2 \dots A_{k-1}),$$

если все участвующие в нем условные вероятности определены

Пример. Два стрелка одновременно выстреливают в мишень. Вероятность попадания для первого стрелка равна 0,6, для второго – 0,8. Найти вероятность того, что в мишени будет:

а) одна пробоина;

б) хотя бы одна пробоина.

Теорема умножения вероятностей для независимых событий.

Вероятность произведения двух независимых событий равна произведению их вероятностей, т.е. $P(AB)=P(A)P(B)$.

Аналогичное утверждение справедливо для любого числа независимых событий.

Пример. В коробке лежат 4 белых шара и 6 красных. Наудачу, один за другим из коробки извлекается 2 шара. Найти вероятность того, что среди них будет:

а) один красный шар;

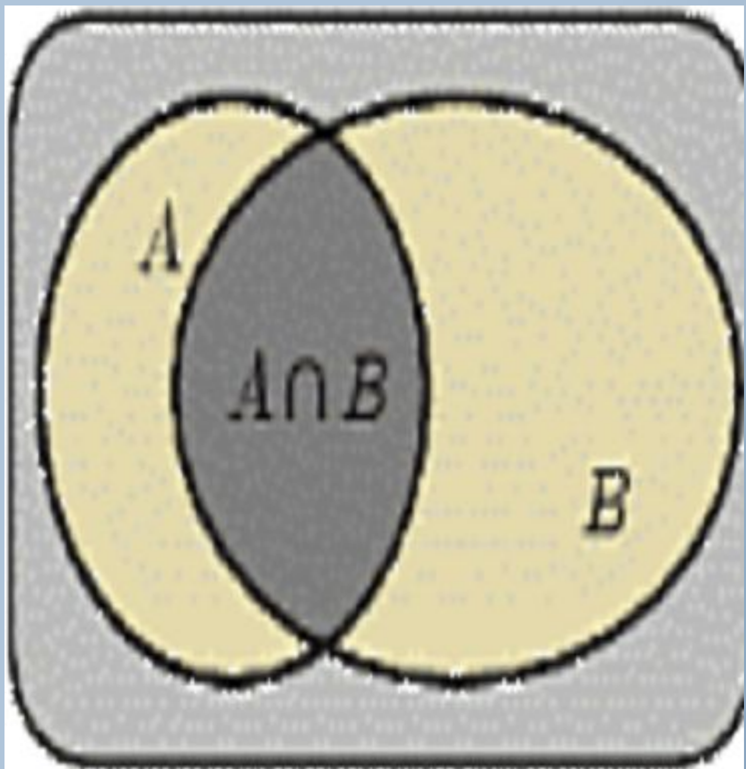
б) менее 2-х красных шаров.

Пример. Дано 8 карточек с буквами. На трѐх карточках написана буква *О*, на двух – буква *З*, ещѐ на двух – буква *Р* и на одной буква *Е*. Найти вероятность того, что при извлечении случайным образом пяти букв и расстановке их в ряд получится слово ОЗЕРО.

Основные теоремы теории вероятностей

Теорема сложения вероятностей.

P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)



Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления

Замечание: Для несовместных событий вероятность суммы событий равна сумме вероятностей этих событий

Пример В течение года фирмы А и В независимо друг от друга, могут обанкротиться с вероятностями 0,1 и 0,2 соответственно. Найти вероятности того, что к концу года хотя бы одна фирма обанкротится.

Сумма вероятностей противоположных событий равна единице:

$$P(A)+P(\overline{A})=1 \text{ или } \quad P(\overline{A})=1-P(A).$$

Вероятность суммы нескольких совместных событий (вероятность появления хотя бы одного из них) равна разности между единицей и вероятностью произведения противоположных событий:

$$P(A_1+A_2+\ldots+A_n)=1-P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\ldots\overline{A_n}).$$

На школьном участке посадили три плодовых дерева: яблоню, грушу и сливу. Вероятность того, что приживется яблоня равна 0,8, груша – 0,9, слива – 0,7. Найти вероятность того, что приживется хотя бы одно дерево.

Три стрелка стреляют в цель независимо друг от друга. Первый стрелок попадает в цель с вероятностью 0,6, второй – с вероятностью 0,7, а третий – с вероятностью 0,75. Найти вероятность хотя бы одного попадания в цель, если каждый стрелок сделает по одному выстрелу. Известно, что мишень поражена только один раз. Найти вероятность того, что ее поразил второй стрелок.

События A, B и C независимы. Найти вероятность того, что из событий A, B и C наступит только одно событие, если известно, что , P(A)=0,2; P(B)=0,4; P(C)=0,9.

Пример. На складе имеется 20 приборов, из них 2 неисправны. При отправке потребителю проверяется исправность приборов. Найти вероятность того, что первые 3 проверенных прибора исправны.

Пример. Вероятность летной погоды равна 0,9, а вероятность того, что при условии лѐтной погоды груз будет доставлен своевременно равна 0,8. Какова вероятность того, груз будет доставлен своевременно?

Полная вероятность

Теорема. **Пусть события H_1, H_2, H_3 ,…H_k образуют полную систему и А – некоторое событие. Тогда справедлива формула**

$$P(A)=P(H_1)\,P(A\backslash H_1)+P(H_2)P(A\backslash H_2)+\ldots+P(H_k)P(A\backslash H_k)$$

Пример. Эксперты считают, что вероятность роста стоимости акций компании в следующем году составит 0,8, если будет наблюдаться подъем в экономике, и 0,3, если в экономике будет спад. При этом предполагается, что вероятность экономического подъема равна 0,6. Найти вероятность того, что в следующем году акции поднимутся в цене.

Формула Байеса

Теорема. *Пусть событие А отлично от невозможного. Тогда имеет место формула:*

$P(H_k \backslash A) = P(H_k)P(A \backslash H_k) \,/\, P(A)$,

которая называется *формулой гипотез Байеса.*

Служащий банка может ездить на работу как на трамвае, так и на автобусе. В 1/3 случаев он пользуется трамваем, а в 2/3 – автобусом. Если он едет на трамвае, то опаздывает с вероятностью 0,05, а если едет на автобусе, то – с вероятностью 0,01. Сегодня служащий опоздал. Какова вероятность, что он ехал на трамвае?

Какова вероятность выжить при случайном переливании крови? Принять, что обладателей первой группы
 крови 30%, второй – 40%, третьей – 20%, четвертой – 10%.
Представители первой группы могут переливать свою кровь представителям любых групп крови. Обладатели четвертой группы могут принять кровь любой группы.

По списку в группе 20 студентов. Пусть X – это число студентов, которые сдадут предстоящую сессию в срок. В паре с каким из перечисленных событий событие A = (X< 4) образует полную группу событий

- ◉ (X≥ 4)
- ○ (X≥ 3)
- ○ (X≥ 5)
- ○ (X = 4)

Посажено восемь семян. Обозначим через X число взошедших семян. Пусть событие A состоит в том, что число взошедших семян не более трех. С какими из перечисленных ниже событий событие A несовместимо

- [ ] (X = 1)
- [ ] (X = 3)
- [x] (X = 4)
- [x] (X = 7)

Проверке подлежат четыре предприятия. Обозначим через X число рентабельных предприятий среди подлежащих проверке. Пусть событие A состоит в том, что есть хотя бы одно рентабельное предприятие. Какое из перечисленных событий является противоположным для события A

- (X = 0)
- (X = 1)
- (X = 3)
- (X = 4)

Число X выбирают наудачу из множества {1, 3, 5, 6, 9}. Укажите, какие из перечисленных событий составляют полную группу событий.

- A = (X = 5)
- B = (X = 3)
- C = (X = 1)
- D – «число X делится на 2»
- E – «число X делится на 3»

Число X выбирают наудачу из множества {1, 2, 3, 4, 6}. Укажите, какие из перечисленных событий составляют полную группу событий.

- [x] $A = (X = 1)$
- [ ] $B = (X = 2)$
- [x] $C = (X = 3)$
- [x] D – «число X делится на 2»
- [ ] E – «число X делится на 3»

Число X выбирают наудачу из множества {1, 2, 3, 4, 5, 6}. Чему равно произведение событий $A \cdot B$, если $A = (X \leq 1)$, а $B = (X < 4)$

- ○ $(X \leq 1)$
- ○ $(X < 4)$
- ◉ $(1 \leq X < 4)$
- ○ $\varnothing$

Вероятность произведения двух несовместных событий А и В равна

P(A)+P(B)

0

P(A)*P(B)

Некто забыл последние две цифры телефонного номера, но помнит, что они нечетные и различные. Какова вероятность того, что он сразу наберет нужный номер, если будет набирать эти цифры случайно

0,05

Вероятность суммы двух совместных событий A и B равна

- ○ P(A)+P(B)
- ◉ P(A)+P(B)-P(AB)
- ○ P(A)*P(B)

Игральную кость подбросили один раз. Рассмотрим два события: A – «выпало нечетное число очков», B – «выпало 3 очка». Найти условную вероятность $P_A(B)$

- ◉ 1/3
- ○ 1/6
- ○ 1/2
- ○ 0

Вероятности событий А и В равны соответственно 0,5 и 0,6. Каким из следующих свойств обладают эти события

- ○ Несовместны
- ◉ Совместны
- ○ Противоположны
- ○ Образуют полную группу событий

Пусть А – случайное событие, найти $P(A\cdot\overline{A})=$

- ○ P(A)
- ○ $P(\overline{A})$
- ◉ 0
- ○ 1

Вероятности событий А и В равны соответственно 0,3 и 0,4. Чему равна вероятность их суммы, если вероятность их произведения 0,1

0,6

Пусть А – случайное событие, найти $P(A+\overline{A})=$

- ○ P(A)
- ○ $P(\overline{A})$
- ○ 0
- ◉ 1

В урне 4 красных, один желтый и один синий шар. Из урны извлекают три шара, не возвращая их обратно. Найти вероятность того, что все извлеченные шары будут красными.

0,2

На одинаковых шарах написаны натуральные числа от 1 до 20. Шары помещены в барабан и тщательно перемешаны. Какова вероятность вынуть шар с номером, кратным 6

0,15

Три стрелка выстрелили по цели. Вероятность попадания в цель для первого стрелка равна 0,7, для второго 0,8, для третьего 0,9. Найти вероятность того, что только второй стрелок попал в цель.

0,024

Баскетболист дважды бросает мяч в корзину. Вероятность попадания при первом броске равна 0,6, а при втором – 0,8. Какова вероятность того, что цели достигнет только первый бросок

0,12

Повторные независимые испытания

Определение . *Схемой Бернулли* называется последовательность *n* независимых в совокупности испытаний, в каждом из которых возможны лишь два исхода — ***«успех» и «неудача»,*** при этом успех в одном испытании происходит с вероятностью $\boldsymbol{p}$**,** а неудача — с вероятностью $\boldsymbol{q=1-p}$.

Распределение числа успехов в n испытаниях

Обозначим через ν_n **число успехов**, случившихся в n испытаниях схемы Бернулли. Эта величина может принимать целые значения от нуля до n в зависимости от результата испытаний n. Например, если все n испытаний завершились неудачей, то величина ν_n равна нулю.

Теорема (формула Бернулли). Для любого $k=0, 1, \ldots .n$ имеет место равенство:

$$P(\nu_n = k) = C^k_n p^k (1-p)^{n-k} = C^k_n p^k q^{n-k}$$

Доказательство формулы Бернулли

Событие А =$\{\nu_n = k\}$
означает, что в *n* испытаниях схемы Бернулли произошло ровно k успехов. Рассмотрим один из благоприятствующих событию элементарных исходов:

$$(\underbrace{у,\ у,\ \dots,\ у}_{k},\underbrace{н,н,\ \dots,\ н}_{n-k}),$$

когда первые *k* испытаний завершились успехом, остальные неудачей. Поскольку испытания независимы, вероятность такого элементарного исхода равна $p^k(1-p)^{n-k}$.

Продолжение доказательства формулы Бернулли

Другие благоприятствующие событию А элементарные исходы отличаются лишь расположением успехов на местах. Есть ровно C^k_n способов расположить k успехов на n местах. Поэтому событие А состоит из элементарных исходов, вероятность каждого из которых также равна $\boldsymbol{p^k(1-p)^{n-k}}$ **.**

***Определение.* Набор чисел $\{\, C^k_n p^k(1-p)^{n-k},\ k=0,\ 1,\ 2,\dots n \,\}$ называется *биномиальным распределением вероятностей*.**

Пример на формулу Бернулли

1. Из урны, содержащей 2 белых и 6 черных шаров наудачу выбирается с возвращением 5 раз подряд один шар. Подсчитать вероятность того, что 4 раза появится белый шар.

Пример на формулу Бернулли

2. В магазин зашли 5 покупателей. Вероятность покупки для каждого одна и та же и равна 0,8. Найти вероятность, что а) 3 человека сделают покупку; б) хотя бы три человека сделают покупку.

Наивероятнейшие частоты

Формула Бернулли при заданных числах p и n позволяет рассчитывать вероятность любой частоты k ($0 \leq k \leq n$). Возникает естественный вопрос: какой частоте будет соответствовать наибольшая вероятность?

Предположим, что такая частота существует, и попытаемся ее определить из условия, что вероятность этой частоты не меньше вероятности "предыдущей" и "последующей" частот:

$P_n(k) \geq P_n(k-1)$; $P_n(k) \geq P_n(k+1)$

Наивероятноейшие частоты

По формуле Бернулли из предыдущего двойного неравенства получаем:

$$np\text{-}q \le k \le np+p$$

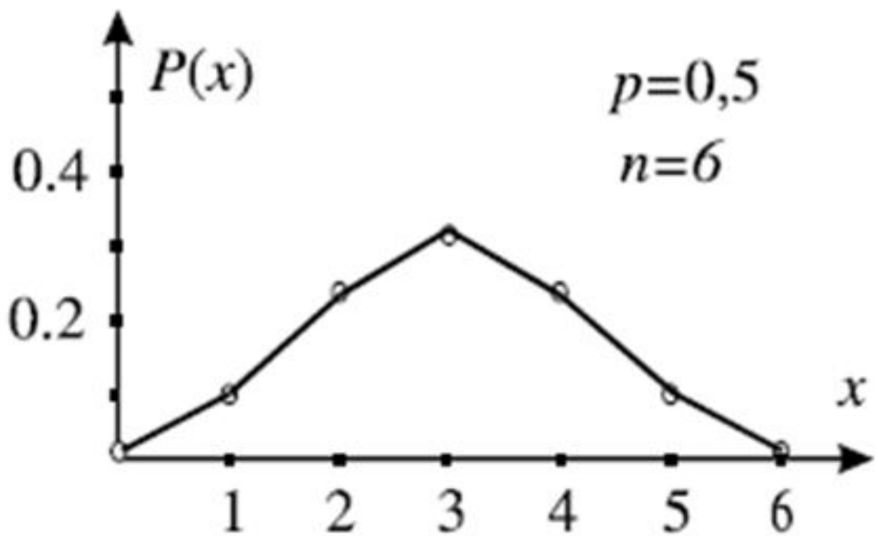
Если $np + p$ – целое число (тогда и $np - q$ – целое число), то две частоты: $k=np - q$ и $k=np + p$ обладают наибольшей вероятностью.

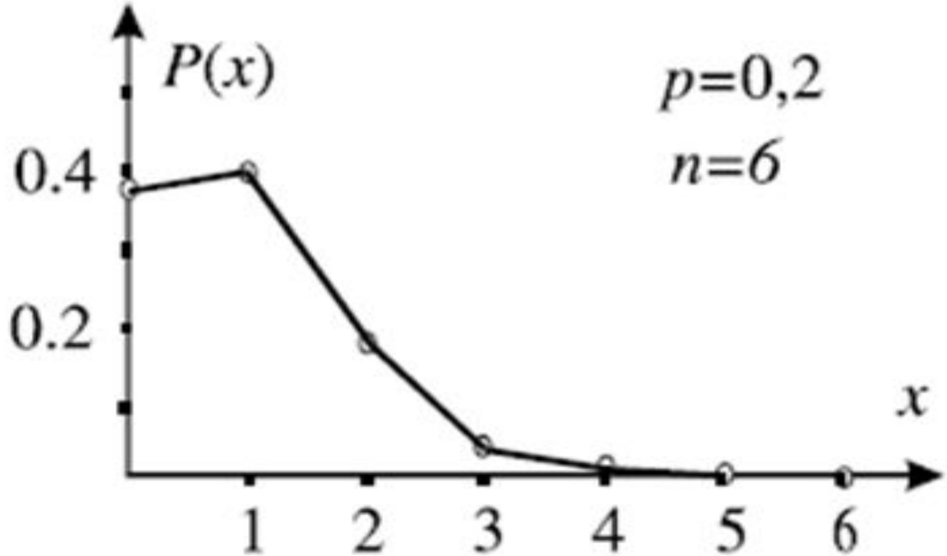
Например, при $n = 7$, $p = 1/2$;

наивероятнейшие частоты: $k = 3$; $k = 4$.

Полигон биномиального распределения

Можно построить график биномиального закона распределения (распределения Бернулли) (зависимости $P_n(x)$ для конкретных значений n и p. Так как аргумент x принимает лишь целые значения, график представляется в виде точек на плоскости x, $P_n(x)$. Для наглядности точки соединяются ломаной линией, и такой график называется полигоном распределения.





Пример вычисления наивероятнейшей частоты

Сколько раз надо подбросить игральную кость, чтобы наивероятнейшее выпадение тройки было 10?

Конец темы