Случайные процессы общего вида

1) $T = [0; +\infty)$ $\quad\quad \xi : \Omega \times T \to E \subseteq R$

2) X_t с п.р. $f(x;t)$

или ф.р. $F(x;t) = P(X(t) < x)$

3) $F(x_1, x_2; t_1, t_2) = P(X(t_1) < x_1, X(t_2) < x_2)$

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_k;\ t_1, t_2, \ldots, t_k) =$$
$$= P(X(t_1) < x_1, X(t_2) < x_2, \ldots, X(t_k) < x_k)$$

$$f(x;t) = \frac{\partial F(x;t)}{\partial x} \qquad f(x_1, x_2; t_1.t_2) = \frac{\partial F(x_1, x_2; t_1, t_2)}{\partial x_1 \partial x_2}$$

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_k;\ t_1, t_2, \ldots, t_k) = \frac{\partial F(x_1, x_2, \ldots, x_k;\ t_1, t_2, \ldots, t_k)}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_k}$$

Основные характеристики СП

$$m_x(t) = M\xi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x;\, t)\, dx \qquad (1)$$

$$K_x(t_1, t_2) = M\left[\left(\xi(t_1) - m(t_1)\right)\left(\xi(t_2) - m(t_2)\right)\right] =$$

(2)

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \left(x_1 - m_x(t_1)\right)\left(x_2 - m_x(t_2)\right) f(x_1, x_2; t_1.t_2)\, dx_1 dx_2$$

$$\sigma_x^2(t) = D\xi(t) = M\left(\left(\xi(t) - m\right)^2\right) =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x - m_x(t)\right)^2 f(x;t)\, dx \quad \overset{(2)}{\Rightarrow} \quad \sigma_x^2(t) = K_x(t,\, t)$$

Свойства характеристик СП

C1 $$Y(t) = X(t) + a(t) \Rightarrow$$

$$m_y(t) = m_x(t) + a(t)$$

$$K_y(t_1, t_2) = K_x(t_1, t_2)$$

C2 $$Y(t) = b(t) \cdot X(t) \Rightarrow$$

$$m_y(t) = b(t) \cdot m_x(t)$$

$$K_y(t_1, t_2) = b(t_1) \cdot b(t_2) \cdot K_x(t_1, t_2)$$

C3 $$K_x(t_1, t_2) = K_x(t_2, t_1)$$

C4 $$\left| K_x(t_1, t_2) \right| \le \sigma_x(t_1) \cdot \sigma_x(t_2)$$

Свойства характеристик СП

$$\overset{\circ}{\xi}(t) = \xi(t) - m(t)$$

$$M\left[\overset{\circ}{\xi}(t)\right] = 0$$

$$K_{\overset{\circ}{x}}(t_1, t_2) = K_x(t_1, t_2)$$

$$\overset{*}{\xi}(t) = \frac{\overset{\circ}{\xi}(t)}{\sigma_x(t)} \quad \Rightarrow$$

$$M\left[\overset{*}{\xi}(t)\right] = 0$$

$$K_{\overset{*}{x}}(t_1, t_2) = R_x(t_1, t_2)$$

Стационарность и эргодичность

Определение. Стационарность в узком смысле

$$f\left(x_1, x_2, \ldots, x_k;\ t_1, t_2, \ldots, t_k\right) =$$
$$= f\left(x_1, x_2, \ldots, x_k;\ t_1 + \Delta, t_2 + \Delta, \ldots, t_k + \Delta\right)$$

$$f(x;t) = f(x;t+\Delta) \Rightarrow f(x;t) = f(x) \quad \Rightarrow m_x(t) = m_x$$

$$f\left(x_1, x_2;\ t_1, t_2\right) = f\left(x_1, x_2; t_2 - t_1\right) = f\left(x_1, x_2; \tau\right)$$
$$\Rightarrow K_x(t_1, t_2) = K(\tau)$$

Определение. Стационарность в широком смысле

$$m_x(t) = m_x = const$$
$$K_x(t_1, t_2) = K(t_2 - t_1) = K(\tau)$$

Свойства к.ф. стационарного СП

Сс1 $K(0) = const = D_x$

Сс2 $K(-\tau) = K(\tau)$

Сс3 $|K(\tau)| \le K(0)$

$$\sigma_x^2(t) = K_x(t,t)$$

$$K_x(t_1, t_2) = K_x(t_2, t_1)$$

$$|K_x(t_1, t_2)| \le$$
$$\le \sigma_x(t_1) \cdot \sigma_x(t_2)$$

$$R(\tau) = \frac{K(\tau)}{D_x}$$

Нормированная корреляционная функция (н.к.ф.)

Значение н.к.ф. $R(\tau)$ равно коэффициенту корреляции между двумя сечениями СП, разделенными временным промежутком τ

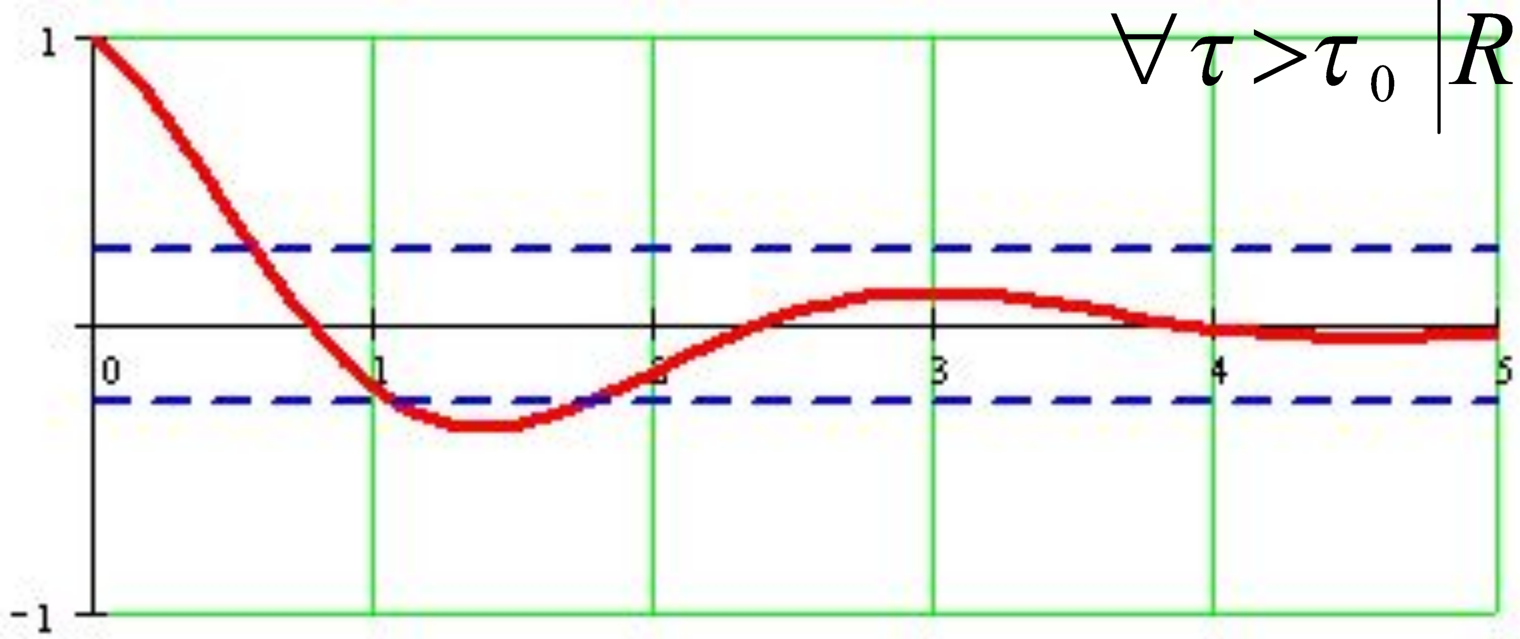
Свойства н.к.ф. стационарного СП

1. $R(0)=1$
2. $R(-\tau)=R(\tau)$
3. $|R(\tau)|\le 1$

$$\boxed{R(\tau)=\frac{K(\tau)}{D_x}}$$

Интервал корреляции $[\,0;\tau_0\,]$

$$\forall \tau>\tau_0 \quad |R(\tau)|<\varepsilon$$



$\varepsilon=0.27$

$\tau_0=1.76$

Стационарность и эргодичность

Стационарность + Эргодичность $\Rightarrow$

$$\Rightarrow m_x^k =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x^k \cdot f(x;t)\,dx = \lim_{T\to\infty}\left(\frac{1}{T}\int_0^T x^k(t)\,dt\right)$$

Среднее по ансамблю = Среднее по времени

Стационарность и эргодичность

<u>Теорема</u>. (Достаточные условия эргодичности).

Пусть

$$1)\ \ \xi(t) - ССП$$

$$2)\ K(\tau)\underset{\tau\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

$$3)\ X(t) \sim N(a_t, \sigma_t)\ \forall t$$

Тогда

$$(1)+(2) \Rightarrow \quad m_x = \lim_{T\to\infty}\left(\frac{1}{T}\int_0^T x(t)\,dt\right)$$

$$(1)+(2)+(3) \Rightarrow$$

$$K(\tau) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T \mathring{x}(t)\,\mathring{x}(t+\tau)\,dt$$