

Цепи Маркова

Определение и способы задания ЦМ

$$\xi : \Omega \times T \rightarrow E \subseteq R$$

$$1) t = 0, 1, 2, \dots$$

$$2) X_t = X = \{ x_1, x_2, \dots, x_n \}$$

$$\begin{aligned} 3) P(X_t = x_j | (X_0 = x_m) \dots (X_{t-2} = x_k)(X_{t-1} = x_i)) = \\ = P(X_t = x_j | X_{t-1} = x_i) = p_{ij}^t \end{aligned}$$

Однородные ЦМ:

$$p_{ij}^t = p_{ij}$$

Цепи Маркова

Определение и способы задания ЦМ

1) $t = 0, 1, 2, \dots$ $\xi : \Omega \times T \rightarrow E \subseteq R$

2) $X_t = X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$

3) $P(X_t = x_j | (X_0 = x_m) \dots (X_{t-2} = x_k)(X_{t-1} = x_i)) =$
 $= P(X_t = x_j | X_{t-1} = x_i) = p_{ij}^t$

Матрица
перехода ЦМ

Однородные
ЦМ:

$$p_{ij}^t = p_{ij}$$

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{n1} & p_{n2} & \dots & p_{nn} \end{bmatrix}$$

$$0 \leq p_{ij} \leq 1$$

$$\sum_{j=1}^n p_{ij} = 1$$

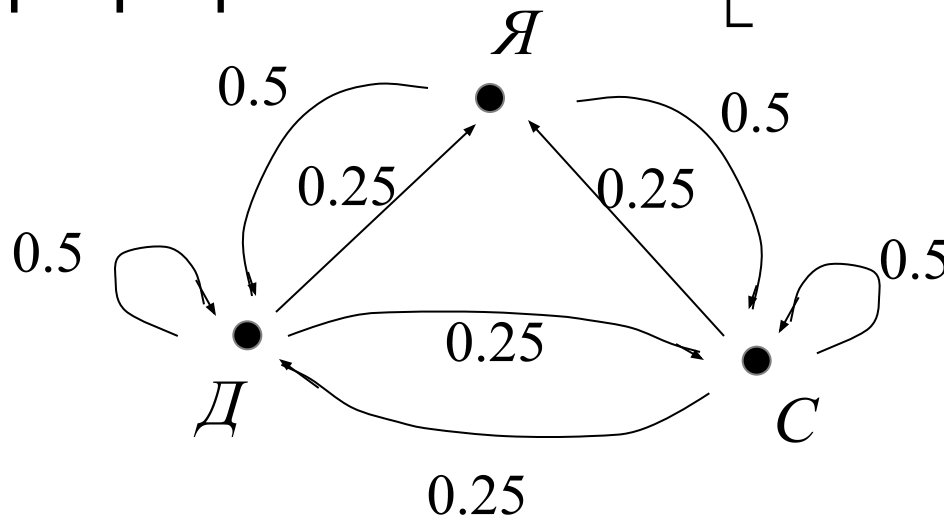
Цепи Маркова

Пример 1 (задача о погоде) Всем хороша Земля Оз, но только не своей погодой. Здесь никогда не бывает двух ясных дней подряд. Если сегодня ясно, то завтра с одинаковой вероятностью пойдет дождь или снег. Если сегодня дождь или снег, то с вероятностью 0,5 погода не изменится. Если все же она изменится, то в половине случаев снег заменится дождем или наоборот, и лишь в половине случаев на следующий день будет ясная погода.

$$X = \{Я, С, Д\}$$

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} Я & С & Д \end{matrix} \\ \begin{matrix} Я \\ С \\ Д \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.25 & 0.5 & 0.25 \\ 0.25 & 0.25 & 0.5 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Орграф ЦМ



Многошаговый переход в ЦМ

Какова вероятность за m шагов перейти из состояния x_i в состояние x_j ?

Гипотеза H_k : через s шагов ($s < m$) перешли в состояние x_k

$$p_{ij}(m) = \sum_{k=1}^n p_{ik}(s) p_{kj}(m-s) \quad i, j = \overline{1, n}$$

$$P(m) = P(s) \cdot P(m-s)$$

- уравнение Колмогорова-Чепмена

Многошаговый переход в ЦМ

Уравнение
Колмогорова-Чепмена

Теорема

$$P(m) = P^m$$

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.25 & 0.5 & 0.25 \\ 0.25 & 0.25 & 0.5 \end{bmatrix}$$

$$P(m) = P(s) \cdot P(m - s)$$

$$P^2 = \begin{bmatrix} 0.25 & 0.375 & 0.375 \\ 0.188 & 0.438 & 0.375 \\ 0.188 & 0.375 & 0.438 \end{bmatrix}$$

$$P^3 = \begin{bmatrix} 0.188 & 0.406 & 0.406 \\ 0.203 & 0.406 & 0.391 \\ 0.203 & 0.391 & 0.406 \end{bmatrix}$$

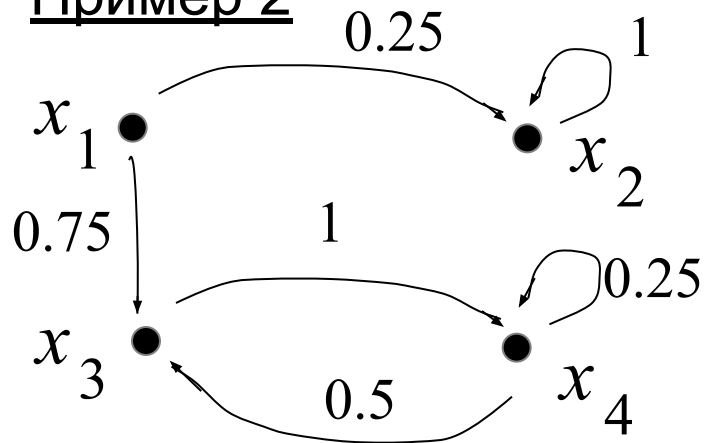
$$P^5 = \begin{bmatrix} 0.199 & 0.4 & 0.4 \\ 0.2 & 0.4 & 0.399 \\ 0.2 & 0.399 & 0.4 \end{bmatrix}$$

Следствие

$$R_m^T = R_0^T \cdot P^m \quad \left| \quad p_j(m) = \sum_{k=1}^n p_k(0) p_{kj}(m) \quad j = \overline{1, n} \right.$$

Классификация состояний ЦМ

Пример 2



Состояние x_j
ДОСТИЖИМО из
состояния x_i

$$\exists m : p_{ij}(m) > 0$$

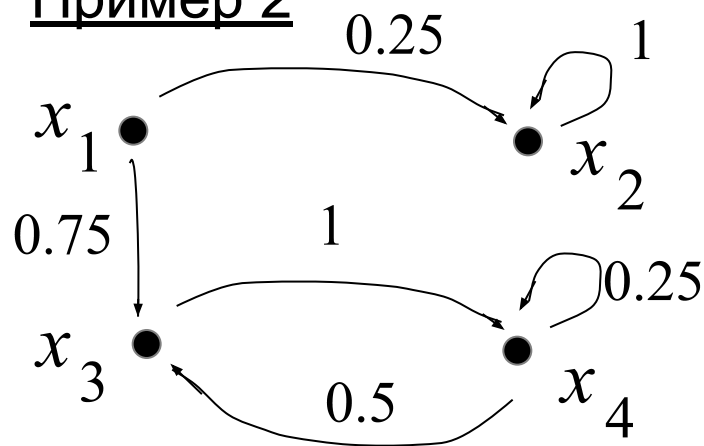
Если состояния взаимодостижимы, то они принадлежат одной сильной компоненте орграфа.

Множество состояний S **замкнуто**, если

$$\forall x_i \in S \text{ и } \forall x_j \notin S \quad p_{ij} = 0$$

Классификация состояний ЦМ

Пример 2



Состояние x_j
поглощающее, если

$$p_{jk} = 0 \quad \forall k \neq j$$

Состояние x_j **транзитное**, если

$$\sum_{k \neq j} p_{jk} > 0$$

Множество состояний D **эргодическое**, если оно замкнуто, но никакое его собственное подмножество не является замкнутым.

В примере 2: x_2 - поглощающее, x_1, x_3, x_4 - транзитные,
Множество $C = \{x_4, x_3\}$ - замкнутое, эргодическое

Переход в эргодическое состояние

Теорема (о переходе в эргодическое состояние)

$$p_{\mathfrak{E}}(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 1$$

Если конденсация орграфа ЦМ слабосвязна, то независимо от начального состояния вероятность перейти за t шагов в эргодическое состояние стремится к 1 при $t \rightarrow \infty$

В конденсации орграфа эргодическому множеству соответствует сильная компонента без исходящих дуг

$$\Rightarrow \exists r: \forall y \in \mathfrak{E} \quad \forall x \notin \mathfrak{E} \quad d(x, y) \leq r$$

$$\Rightarrow \exists p > 0: \forall x \notin \mathfrak{E} \quad p_{\mathfrak{E}}(\leq r) = p$$

Переход в эргодическое состояние

Теорема (о переходе в эргодическое состояние)

$$p_{\mathfrak{E}}(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 1$$

1) Пусть число шагов $t \leq r \Rightarrow p_{\bar{\mathfrak{E}}}(\leq r) = 1 - p$

2) Вторая серия из числа шагов $t \leq r \Rightarrow$

$$p_{\bar{\mathfrak{E}}}(\leq 2r) = (1 - p)^2$$

... ..

k) k серия из числа шагов $t \leq r \Rightarrow$

$$p_{\bar{\mathfrak{E}}}(\leq kr) = (1 - p)^k$$

$$0 < p \leq 1 \Rightarrow (1 - p)^k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \quad p_{\mathfrak{E}}(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 1$$

Изучение ЦМ:

I этап: до перехода в эргодическое множество;

II этап: поведение внутри эргодического множества

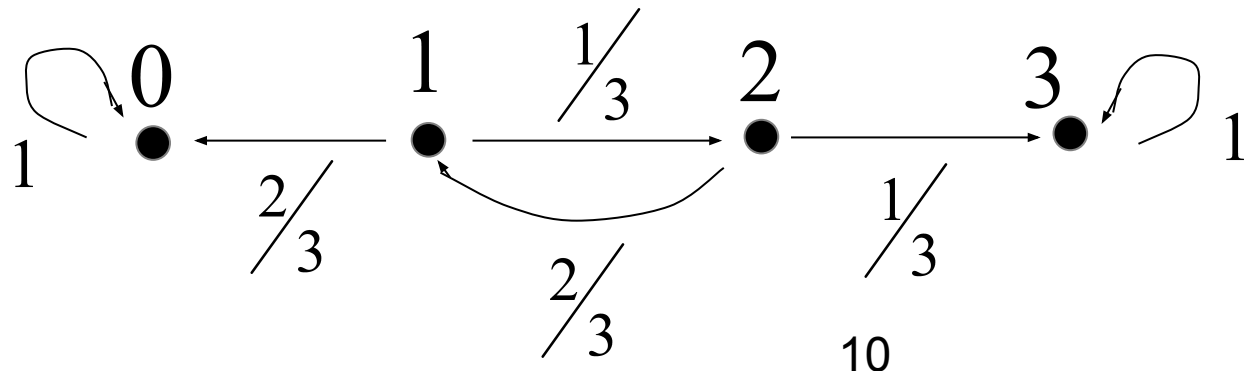
Поглощающие цепи Маркова

Определение. ЦМ – поглощающая, если имеет хотя бы одно поглощающее состояние x_p и для любого непоглощающего состояния x_h

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_{hp}(k) > 0$$

Пример 3

Некий игрок, имея не более трех тугриков, начинает игру в наперстки (при угадывании получает тугрик, при ошибке – отдает). Заранее он решает, что прекращает игру, как только его капитал составит три тугрика.



$$X = \{0, 1, 2, 3\}$$

Поглощающие цепи Маркова

Канонический вид матрицы перехода

$\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ поглощающие состояния ЦМ:

$\{x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n\}$ непоглощающие состояния

Матрица
перехода ЦМ

$$P = \begin{bmatrix} I & O \\ R & Q \end{bmatrix}$$

$$I - (m \times m)$$

$$O - (m \times (n - m))$$

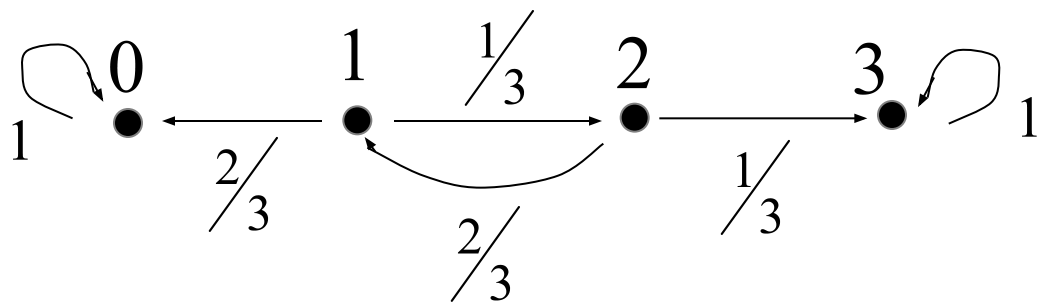
$$R - ((n - m) \times m)$$

$$Q - ((n - m) \times (n - m))$$

Поглощающие цепи Маркова

Пример 3

Некий игрок, имея не более трех тугриков, начинает игру в наперстки (при угадывании он получает тугрик, при ошибке – отдает). Заранее он решает, что прекращает игру, как только его капитал составит 3 тугрика.



$$X = \{0, 1, 2, 3\}$$

$$0 \rightarrow x_1 \quad 3 \rightarrow x_2$$

$$1 \rightarrow x_3 \quad 2 \rightarrow x_4$$

Матрица перехода

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Канонический вид

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2/3 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1/3 & 2/3 & 0 \end{bmatrix}$$

Поглощающие цепи Маркова

Теорема 1. Для поглощающей ЦМ с матрицей P справедливо

$$P = \begin{bmatrix} I & O \\ R & Q \end{bmatrix}$$

а) $Q^t \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$

б) существует матрица, обратная к матрице $E - Q$, и ее можно найти по формуле

$$(E - Q)^{-1} = E + Q + Q^2 + \dots = \sum_{t=0}^{\infty} Q^t$$

Теорема о переходе в эргодическое состояние $\Rightarrow$ а)

$$(E - Q)(E + Q + Q^2 + \dots + Q^{t-1}) = E - Q^t \Rightarrow \text{б)}$$

$$(E - Q)^{-1} = N$$

- фундаментальная матрица ЦМ

Поглощающие цепи Маркова

Теорема 2. Пусть в начальный момент времени поглощающая ЦМ находилась в состоянии x_i . Тогда элемент n_{ij} фундаментальной матрицы $\mathbf{N}$ равен среднему времени нахождения ЦМ в непоглощающем состоянии x_j до момента поглощения.

$$P = \begin{bmatrix} I & O \\ R & Q \end{bmatrix}$$

$$(E - Q)^{-1} = N$$

Рассмотрим СВ $Y_j(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } X_t = x_j \\ 0, & \text{если } X_t \neq x_j \end{cases}$

$$M\left(\sum_{t=0}^{\infty} Y_j(t) \middle| X_0 = x_i\right) = \sum_{t=0}^{\infty} M(Y_j(t) \middle| X_0 = x_i) =$$

Поглощающие цепи Маркова

Теорема 2. Пусть в начальный момент времени поглощающая ЦМ находилась в состоянии x_i . Тогда элемент n_{ij} фундаментальной матрицы $\mathbf{N}$ равен среднему времени нахождения ЦМ в непоглощающем состоянии x_j до момента поглощения.

$$P = \begin{bmatrix} I & O \\ R & Q \end{bmatrix}$$

$$(E - Q)^{-1} = N$$

Рассмотрим СВ $Y_j(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } X_t = x_j \\ 0, & \text{если } X_t \neq x_j \end{cases}$

$$M\left(\sum_{t=0}^{\infty} Y_j(t) \mid X_0 = x_i\right) = \sum_{t=0}^{\infty} ((1 - p_{ij}(t)) \cdot 0 + p_{ij}(t) \cdot 1) =$$

Поглощающие цепи Маркова

Теорема 2. Пусть в начальный момент времени поглощающая ЦМ находилась в состоянии x_i . Тогда элемент n_{ij} фундаментальной матрицы $\mathbf{N}$ равен среднему времени нахождения ЦМ в непоглощающем состоянии x_j до момента поглощения.

$$P = \begin{bmatrix} I & O \\ R & Q \end{bmatrix}$$

$$(E - Q)^{-1} = N$$

$$\begin{aligned} M\left(\sum_{t=0}^{\infty} Y_j(t) \mid X_0 = x_i\right) &\equiv \sum_{t=0}^{\infty} ((1 - p_{ij}(t)) \cdot 0 + p_{ij}(t) \cdot 1) = \\ &= \sum_{t=0}^{\infty} p_{ij}(t) = n_{ij} \quad \text{т.к.} \quad (E - Q)^{-1} = \sum_{t=0}^{\infty} Q^t \end{aligned}$$

Поглощающие цепи Маркова

Теорема 2. Пусть в начальный момент времени поглощающая ЦМ находилась в состоянии x_i . Тогда элемент n_{ij} фундаментальной матрицы **N** равен среднему времени нахождения ЦМ в непоглощающем состоянии x_j до момента поглощения.

$$P = \begin{bmatrix} I & O \\ R & Q \end{bmatrix}$$

$$(E - Q)^{-1} = N$$

Следствие. Пусть в начальный момент времени поглощающая ЦМ находилась в состоянии x_i . Среднее число шагов до поглощения равно сумме элементов i -ой строки матрицы **N**.

Поглощающие цепи Маркова

Пример 3 (игра в «наперстки»)

$$X = \{0, 1, 2, 3\} \quad \begin{array}{l} 0 \rightarrow x_1 \\ 1 \rightarrow x_3 \\ 3 \rightarrow x_2 \\ 2 \rightarrow x_4 \end{array}$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2/3 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1/3 & 2/3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} I & O \\ R & Q \end{bmatrix}$$

$$(E - Q)^{-1} = N$$

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 1/3 \\ 2/3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$E - Q = \begin{bmatrix} 1 & -1/3 \\ -2/3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$N = \begin{bmatrix} 9/7 & 3/7 \\ 6/7 & 9/7 \end{bmatrix}$$

Поглощающие цепи Маркова

Теорема 3. В поглощающей ЦМ с матрицей перехода (*) вероятность перехода в заданное поглощающее состояние определяется матрицей **$B=NR$** .

$$P = \begin{bmatrix} I & O \\ R & Q \end{bmatrix} \quad (*)$$

$$(E - Q)^{-1} = N$$

Пусть в начальный момент времени поглощающая ЦМ находилась в состоянии x_i . Обозначим b_{ik} - вероятность попасть в k -ое поглощающее состояние

В момент времени $t = 1$ возможны гипотезы:

а) $X_1 = x_k$

б) $X_1 = x_l \quad l \neq k \quad 1 \leq l \leq m$

в) $X_1 = x_r \quad m + 1 \leq r \leq n$

Поглощающие цепи Маркова

Теорема 3. В поглощающей ЦМ с матрицей перехода (*) вероятность перехода в заданное поглощающее состояние определяется матрицей **$B=NR$** .

$$P = \begin{bmatrix} I & O \\ R & Q \end{bmatrix} \quad (*)$$

$$(E - Q)^{-1} = N$$

По формуле полной вероятности

$$b_{ik} = p_{ik} \cdot 1 + p_{il} \cdot 0 + \sum_{r=m+1}^n p_{ir} b_{rk} \quad \begin{matrix} k = \overline{1, m} \\ i = \overline{m+1, n} \end{matrix}$$

В матричной
форме

$$B = R + Q \cdot B \Rightarrow B = N \cdot R$$

Поглощающие цепи Маркова

Пример 3 (игра в «наперстки»)

$$X = \{0, 1, 2, 3\} \quad \begin{array}{ll} 0 \rightarrow x_1 & 3 \rightarrow x_2 \\ 1 \rightarrow x_3 & 2 \rightarrow x_4 \end{array}$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2/3 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1/3 & 2/3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} 2/3 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} I & O \\ R & Q \end{bmatrix}$$

$$(E - Q)^{-1} = N$$

$$N = \begin{bmatrix} 9/7 & 3/7 \\ 6/7 & 9/7 \end{bmatrix}$$

$$B = N \cdot R = \begin{bmatrix} 6/7 & 1/7 \\ 4/7 & 3/7 \end{bmatrix}$$

Эргодические цепи Маркова

Эргодическая ЦМ: нет поглощающих состояний и из любого состояния можно попасть в любое другое.

Орграф эргодической ЦМ сильносвязан.

Стационарный режим ЦМ:

при достаточно больших t вероятность нахождения в состоянии x_i не зависит от того, каким было начальное состояние системы.

Достаточное условие существования стационарного режима – регулярность.

ЦМ называется **регулярной**, если

$$\exists k : \quad p_{ij}(k) > 0 \quad \forall i, j = \overline{1, n}$$

Эргодические цепи Маркова

Теорема Если ЦМ с матрицей перехода P регулярна, то

а) $P^t \xrightarrow{t \rightarrow \infty} W$, где все строки матрицы W одинаковы

$$w_{ij} = u_j \quad j, i = \overline{1, n}$$

б) существует единственный вектор

$$u^T = (u_1, u_2, \dots, u_n)^T$$

такой, что

$$\sum_{j=1}^n u_j = 1 \quad \text{и} \quad u^T P = u^T$$

Эргодические цепи Маркова

Пример 1 (задача о погоде)

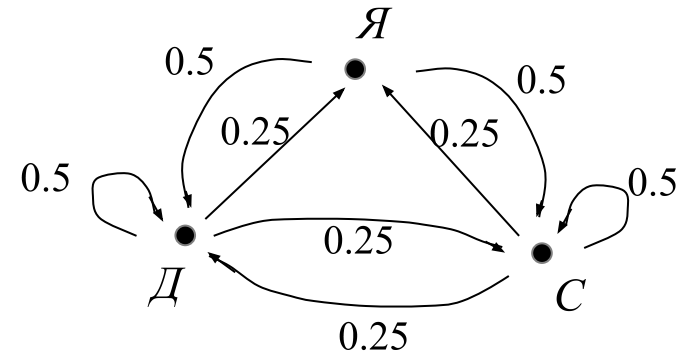
$$u^T = (u_1, u_2, u_3)^T$$

$$\sum_{j=1}^n u_j = 1 \quad \text{и} \quad u^T P = u^T$$

$$\begin{cases} u_1 = 0.25u_2 + 0.25u_3 \\ u_2 = 0.5u_1 + 0.5u_2 + 0.25u_3 \\ u_3 = 0.5u_1 + 0.25u_2 + 0.5u_3 \\ u_1 + u_2 + u_3 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4u_1 - u_2 - u_3 = 0 \\ 2u_1 - 2u_2 + u_3 = 0 \\ u_1 + u_2 + u_3 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_1 = \frac{1}{5} \\ u_2 = \frac{2}{5} \\ u_3 = \frac{2}{5} \end{cases}$$

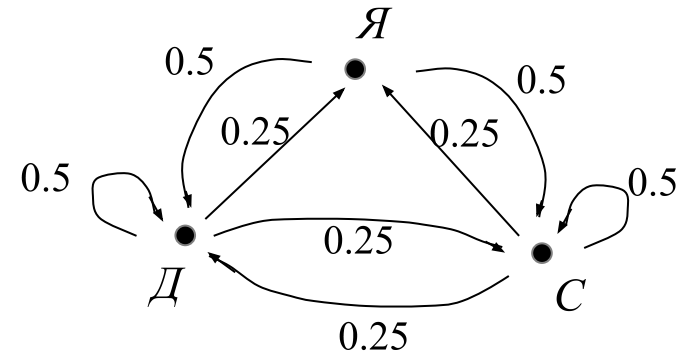


$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.25 & 0.5 & 0.25 \\ 0.25 & 0.25 & 0.5 \end{bmatrix}$$

$$u^T = \left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{2}{5} \right)^T$$

Эргодические цепи Маркова

Пример 1 (задача о погоде)



$$P^2 = \begin{bmatrix} 0.25 & 0.375 & 0.375 \\ 0.188 & 0.438 & 0.375 \\ 0.188 & 0.375 & 0.438 \end{bmatrix}$$

$$P^5 = \begin{bmatrix} 0.199 & 0.4 & 0.4 \\ 0.2 & 0.4 & 0.399 \\ 0.2 & 0.399 & 0.4 \end{bmatrix}$$

$$P^{10} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.4 & 0.4 \\ 0.2 & 0.4 & 0.4 \\ 0.2 & 0.4 & 0.4 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.25 & 0.5 & 0.25 \\ 0.25 & 0.25 & 0.5 \end{bmatrix}$$

$$u^T = \left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{2}{5} \right)^T$$