Функции и их графики

Задание №23

1. *Постройте график функции* $y = 1 - \dfrac{x+2}{x^2+2x}$ *и определите, при каких значениях m прямая y = m не имеет с графиком ни одной общей точки.*

Решение.

$$y = 1 - \frac{x+2}{x^2+2x}$$

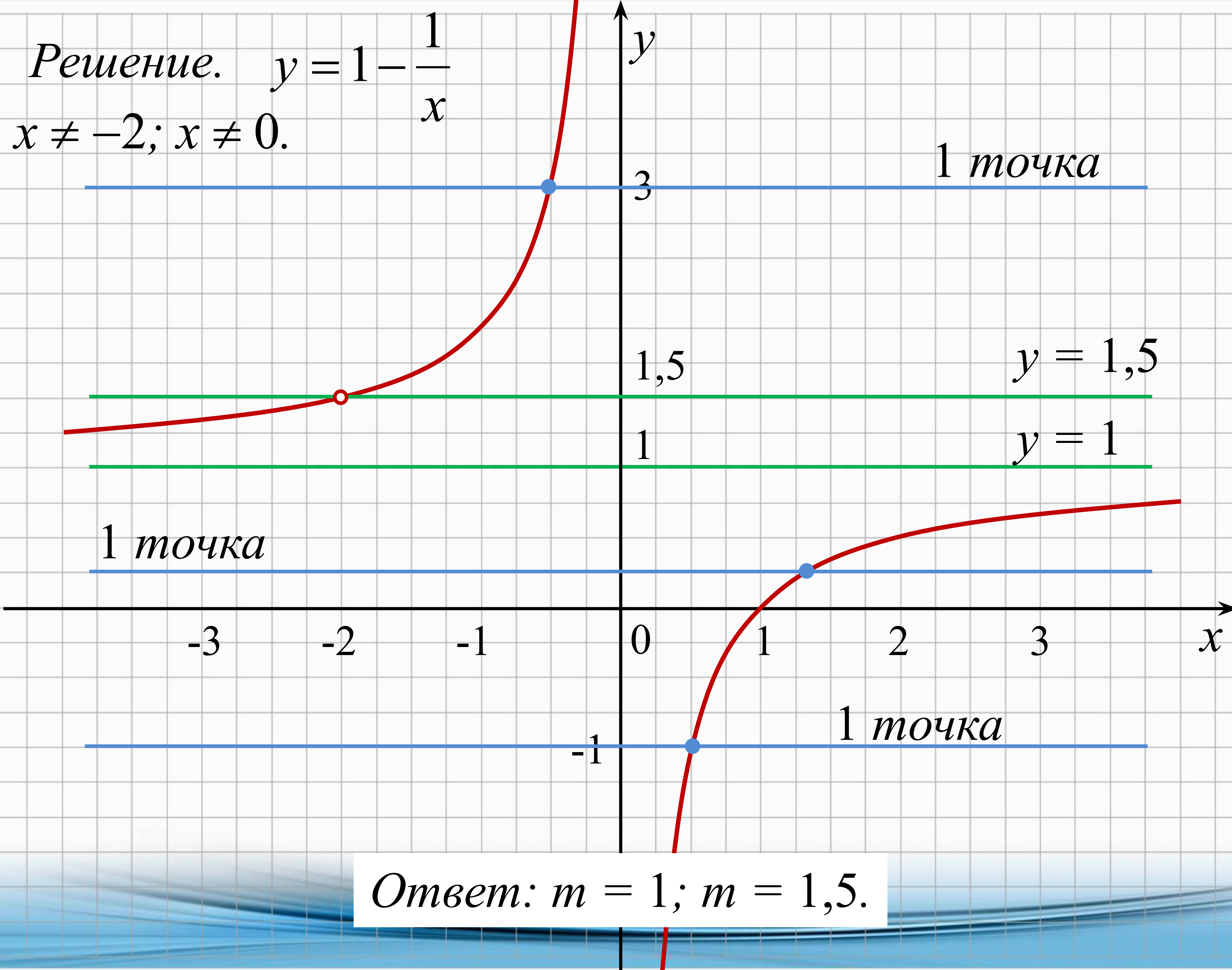
$$1 - \frac{x+2}{x^2+2x} = 1 - \frac{x+2}{x(x+2)} = 1 - \frac{1}{x}$$

при условии $x \neq 0$ *и* $x + 2 \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \neq 0$ *и* $x \neq -2.$

$$D(y) = (-\infty; -2) \cup (-2; 0) \cup (0; +\infty).$$

Решение. $y = 1 - \dfrac{1}{x}$

$x \neq -2;\ x \neq 0.$



Ответ: $m = 1;\ m = 1{,}5.$

2. *Постройте график функции* $y=1-\dfrac{x^4+x^3}{x+x^2}$ *и определите, при каких значениях m прямая y = m имеет с графиком две общие точки.*

Решение.

$$y=1-\frac{x^4+x^3}{x+x^2}$$

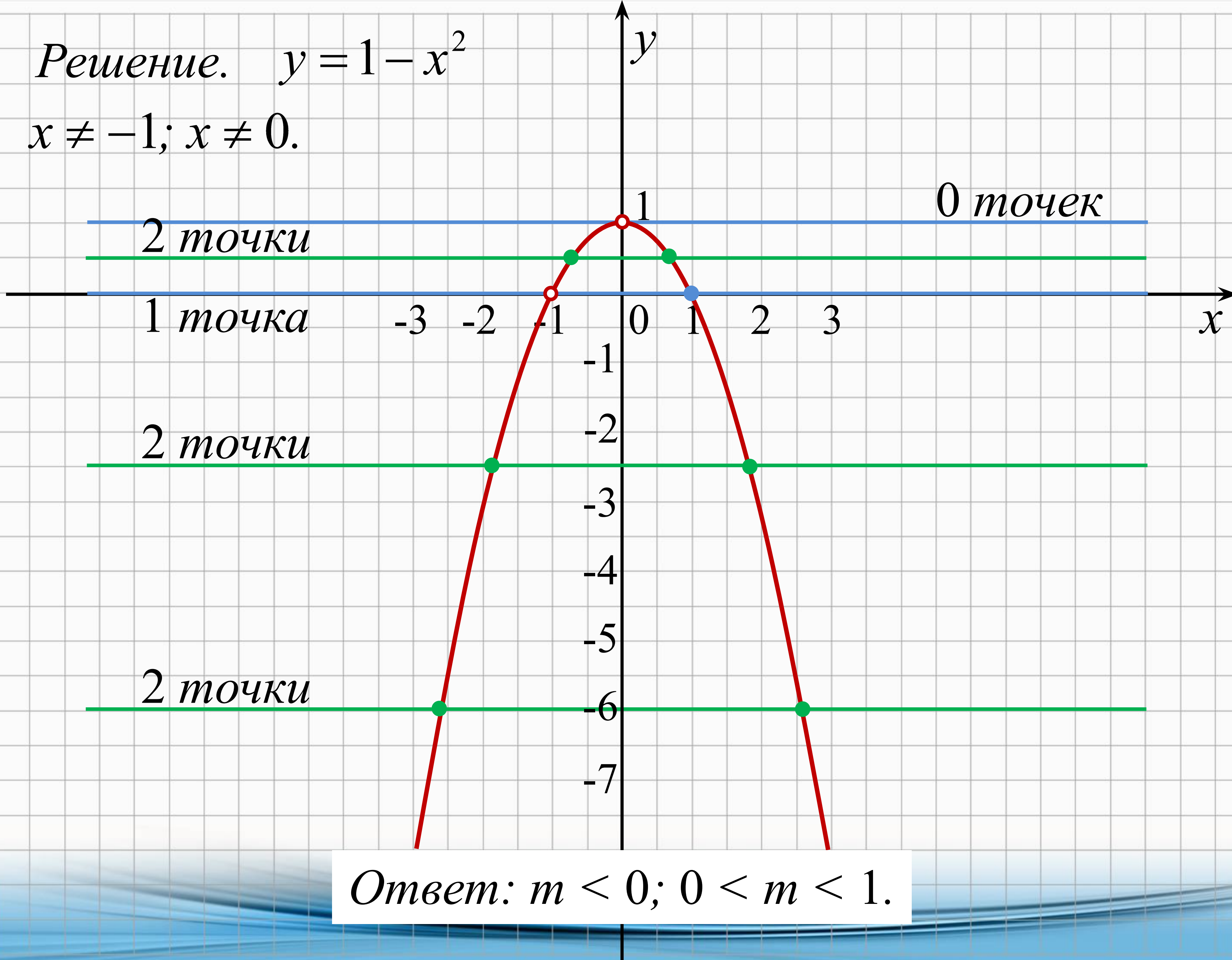
$$1-\frac{x^4+x^3}{x+x^2}=1-\frac{x^3(x+1)}{x(x+1)}=1-x^2$$

при условии $x\neq 0$ *и* $x+1\neq 0 \quad\Leftrightarrow\quad x\neq 0$ *и* $x\neq -1.$

$$D(y)=(-\infty;-1)\cup(-1;0)\cup(0;+\infty).$$

Решение. $y = 1 - x^2$

$x \neq -1;\ x \neq 0.$



Ответ: $m < 0;\ 0 < m < 1.$

3. *Постройте график функции* $y=\dfrac{(x+5)(x^2+5x+4)}{x+4}$ *и определите, при каких значениях m прямая y = m имеет с графиком ровно одну общую точку.*

Решение.

$$y=\frac{(x+5)(x^2+5x+4)}{x+4}$$

$$\frac{(x+5)(x^2+5x+4)}{x+4}=\frac{(x+5)(x+4)(x+1)}{x+4}=(x+5)(x+1)=$$

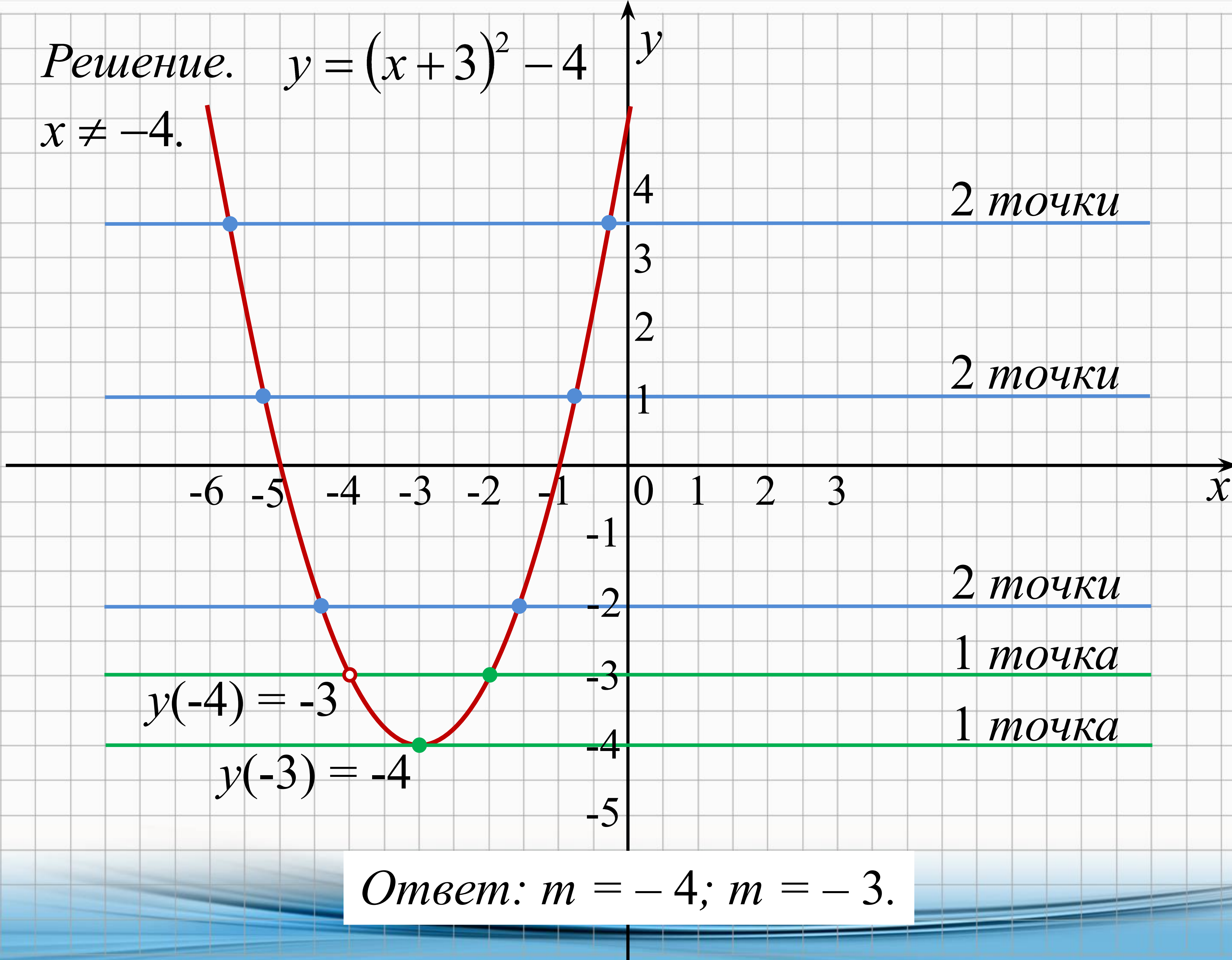
$$=x^2+6x+5=(x+3)^2-4$$

при условии $x+4\neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x\neq -4.$

$$D(y)=(-\infty;-4)\cup(-4;+\infty).$$

Решение. $y=(x+3)^2-4$

$x \neq -4.$



Ответ: $m=-4$; $m=-3$.

4. *Постройте график функции* $y=\left|x^2-x-2\right|$

Какое наибольшее число общих точек график данной функции может иметь с прямой, параллельной оси абсцисс?

Решение.

$$y=\left|x^2-x-2\right|$$

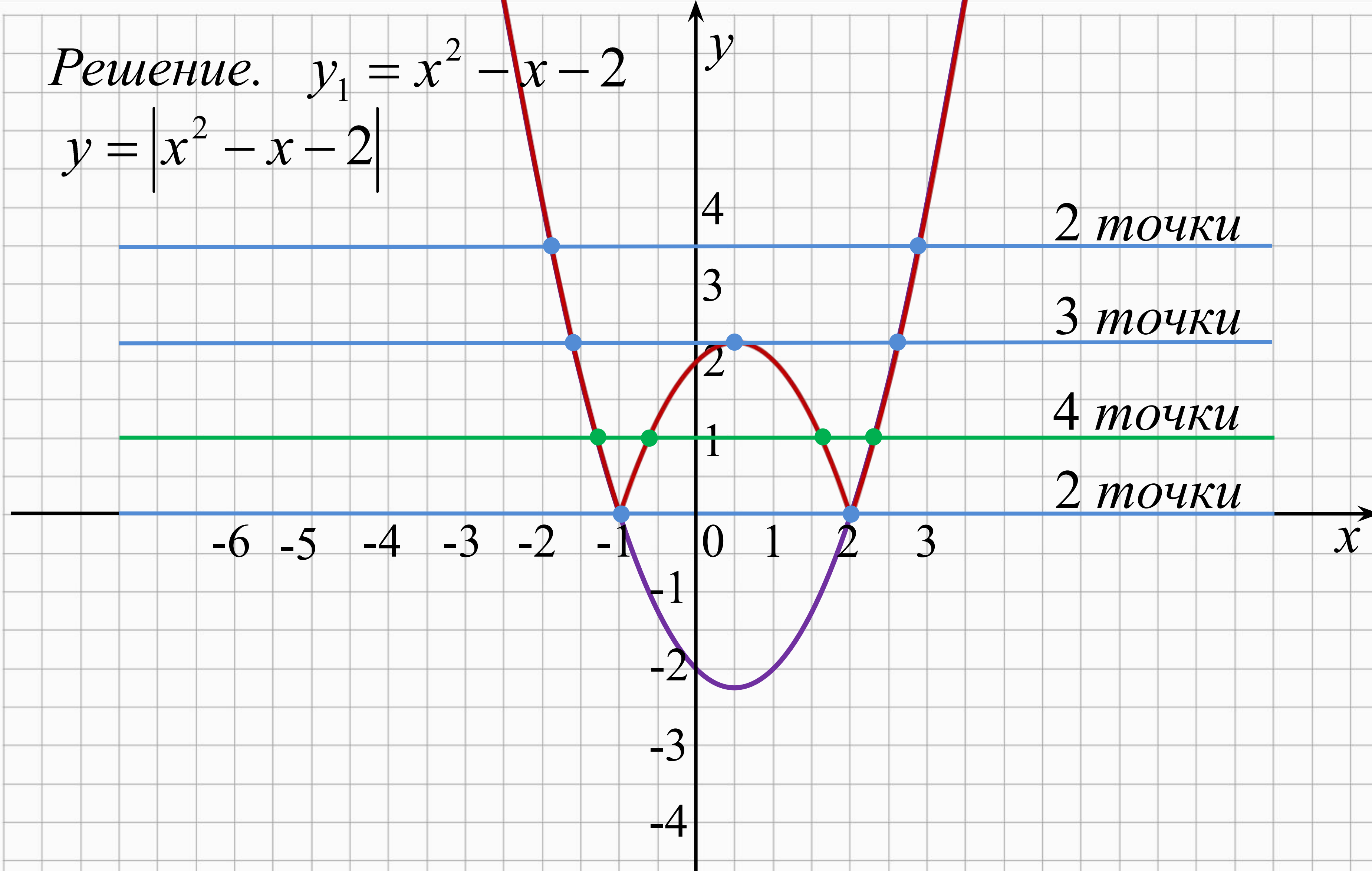
$$y_1=x^2-x-2$$

$$x_в=-\frac{b}{2a}=\frac{1}{2};\quad y_в=\left(\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}-2=-2\frac{1}{4}.$$

x	0	1	-1	2	3	-2
y	-2	-2	0	0	4	4

Решение. $y_1 = x^2 - x - 2$

$y = \left| x^2 - x - 2 \right|$



Ответ: наибольшее число точек пересечения равно 4 *при* $0 < m < 2{,}25$.

5. *Постройте график функции* $y = x^2 - 6|x| + 8$

Какое наибольшее число общих точек график данной функции может иметь с прямой, параллельной оси абсцисс?

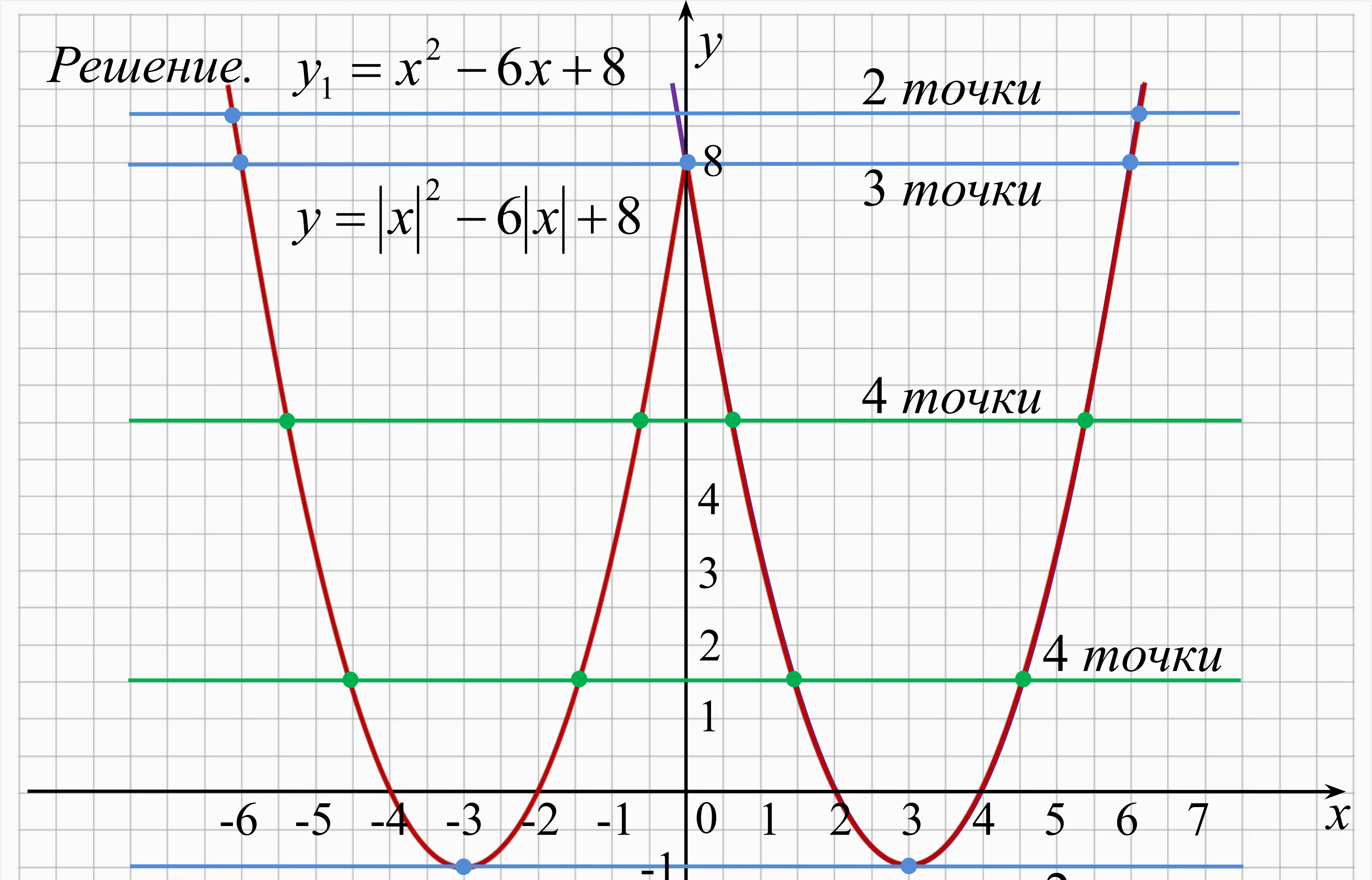
Решение.

$$y = x^2 - 6|x| + 8 \quad \Leftrightarrow \quad y = |x|^2 - 6|x| + 8, \ \text{т.к.} \ |x|^2 = x^2$$

$$y_1 = x^2 - 6x + 8$$

$$x_в = -\frac{b}{2a} = 3; \quad y_в = 3^2 - 6 \cdot 3 + 8 = -1.$$

x	0	6	1	5	2	4
y	8	8	3	3	0	0



Ответ: наибольшее число точек пересечения равно 4 при $-1 < m < 8$.

6. *Постройте график функции* $y=\frac{(x^2-x-6)(x^2-4x-5)}{x^2-2x-3}$ *и определите, при каких значениях m прямая* $y=m$ *имеет с графиком ровно одну общую точку.*

Решение.

$$y=\frac{(x^2-x-6)(x^2-4x-5)}{x^2-2x-3}$$

$$\frac{(x^2-x-6)(x^2-4x-5)}{x^2-2x-3}=\frac{(x-3)(x+2)(x+1)(x-5)}{(x+1)(x-3)}=$$

$$=(x+2)(x-5)=x^2-3x-10=(x-1{,}5)^2-12{,}25.$$

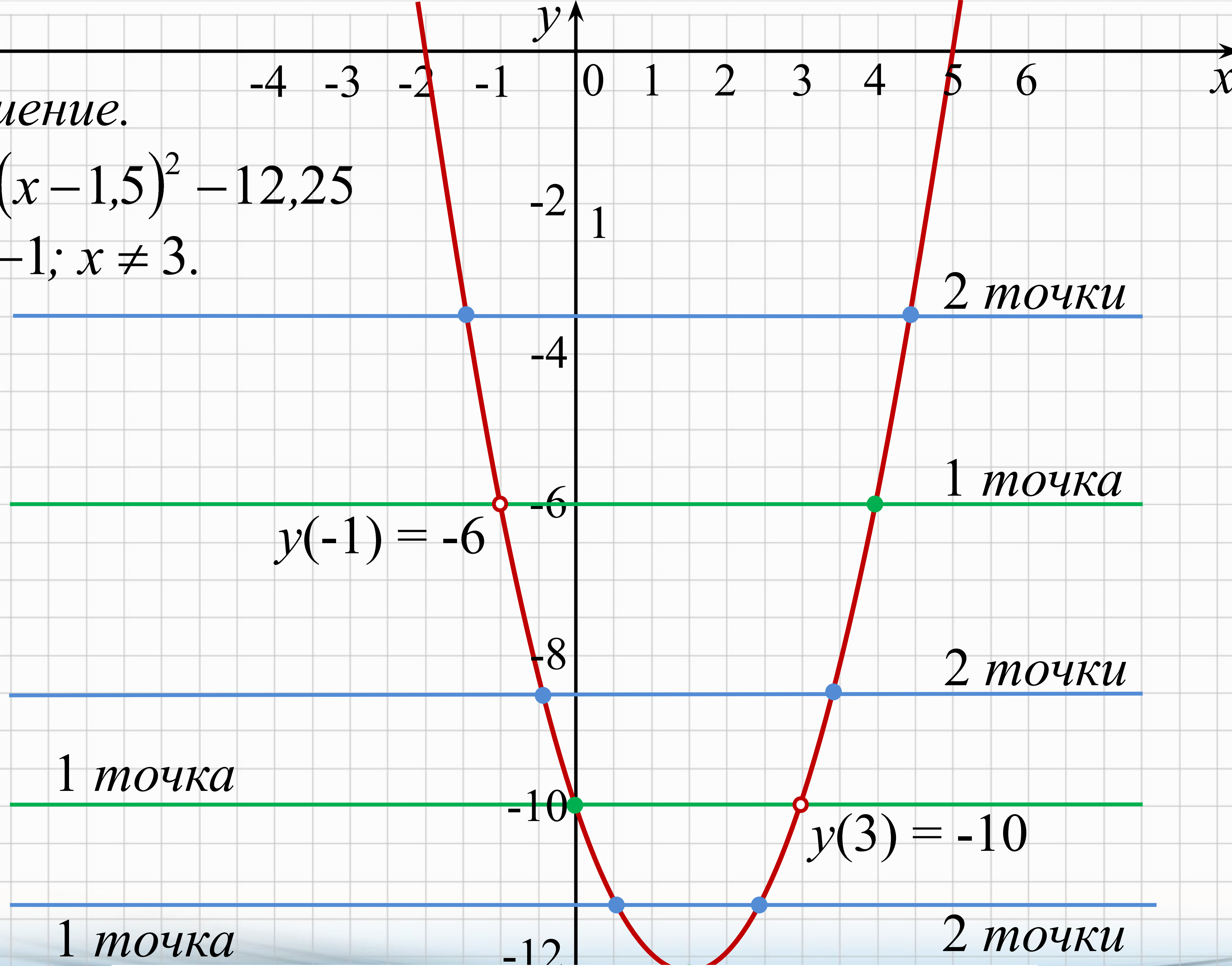
при условии $x+1\neq 0,\ x-3\neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x\neq -1$ *и* $x\neq 3.$

$$D(y)=(-\infty;\,-1)\cup(-1;\,3)\cup(3;\,+\infty).$$

Решение.

$$y=(x-1{,}5)^2-12{,}25$$

$x\neq-1;\ x\neq3.$



Ответ: $m=-12{,}25$; $m=-10$; $m=-6$.

7. *Постройте график функции* $y = \begin{cases} x^2 - 4x + 6, \text{ если } x \geq 1, \\ 3x, \text{ если } x < 1 \end{cases}$

и определите, при каких значениях m прямая y = m имеет с графиком ровно две общие точки.

Решение.

$$y = \begin{cases} x^2 - 4x + 6, \text{ если } x \geq 1, \\ 3x, \text{ если } x < 1 \end{cases}$$

$$y_1 = x^2 - 4x + 6$$

$$x_в = -\frac{b}{2a} = 2;$$

$$y_в = 2^2 - 4 \cdot 2 + 6 = 2.$$

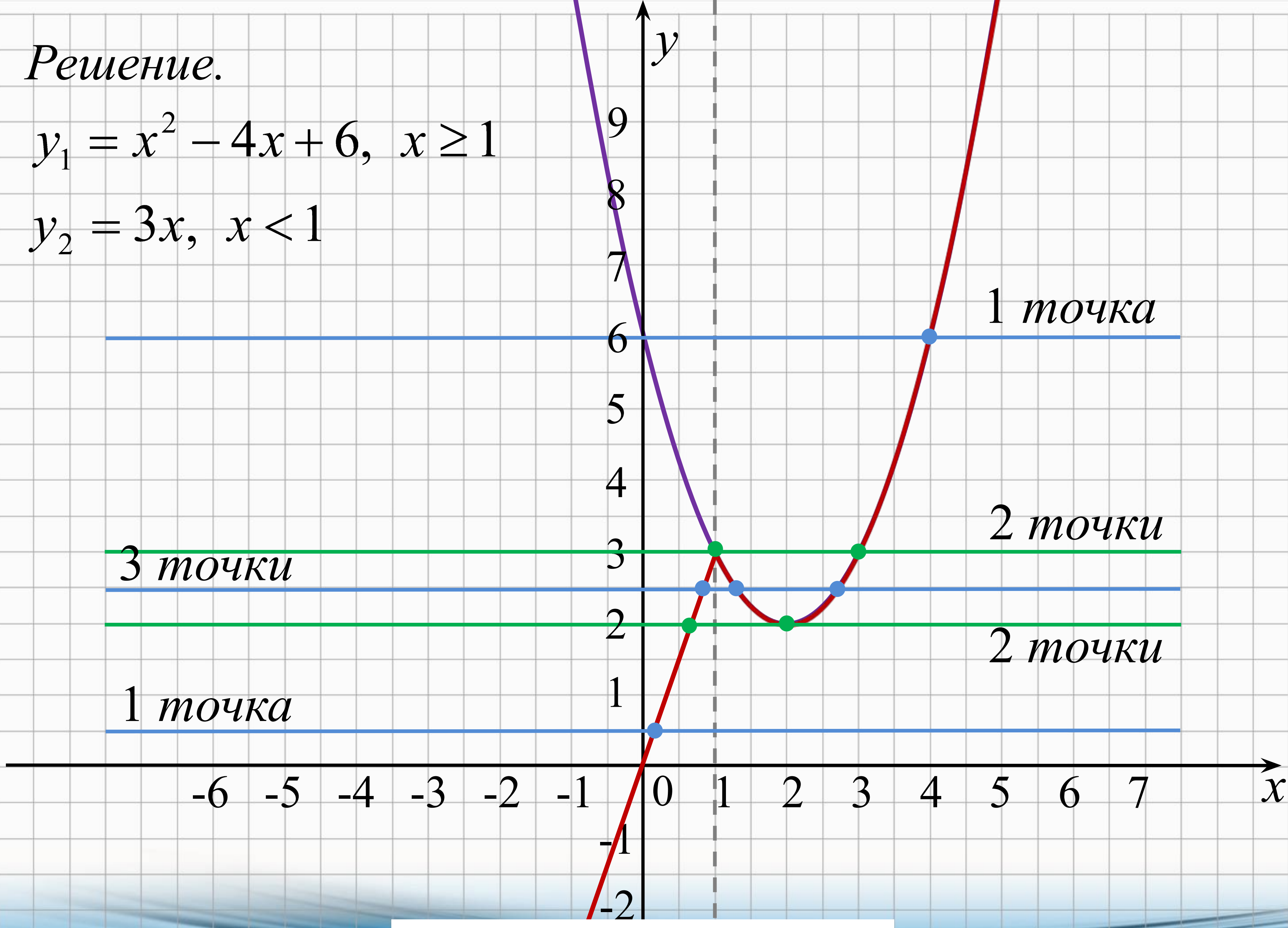
$$y_2 = 3x$$

x	0	-2
y	0	-6

Решение.

$$y_1 = x^2 - 4x + 6, \quad x \geq 1$$

$$y_2 = 3x, \quad x < 1$$



Ответ: $m = 2$; $m = 3$.

8. *Найдите все значения k, при каждом из которых прямая $y = kx$ имеет с графиком функции $y = x^2 + 4$ ровно одну общую точку. Постройте этот график и все такие прямые.*

Решение.

Другими словами, нужно найти все значения k, при каждом из которых система имеет одно решение:

$$\begin{cases} y = x^2 + 4, \\ y = kx; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} kx = x^2 + 4, \\ y = kx; \end{cases}$$

$$kx = x^2 + 4$$

$$x^2 - kx + 4 = 0$$

$$D = k^2 - 16$$

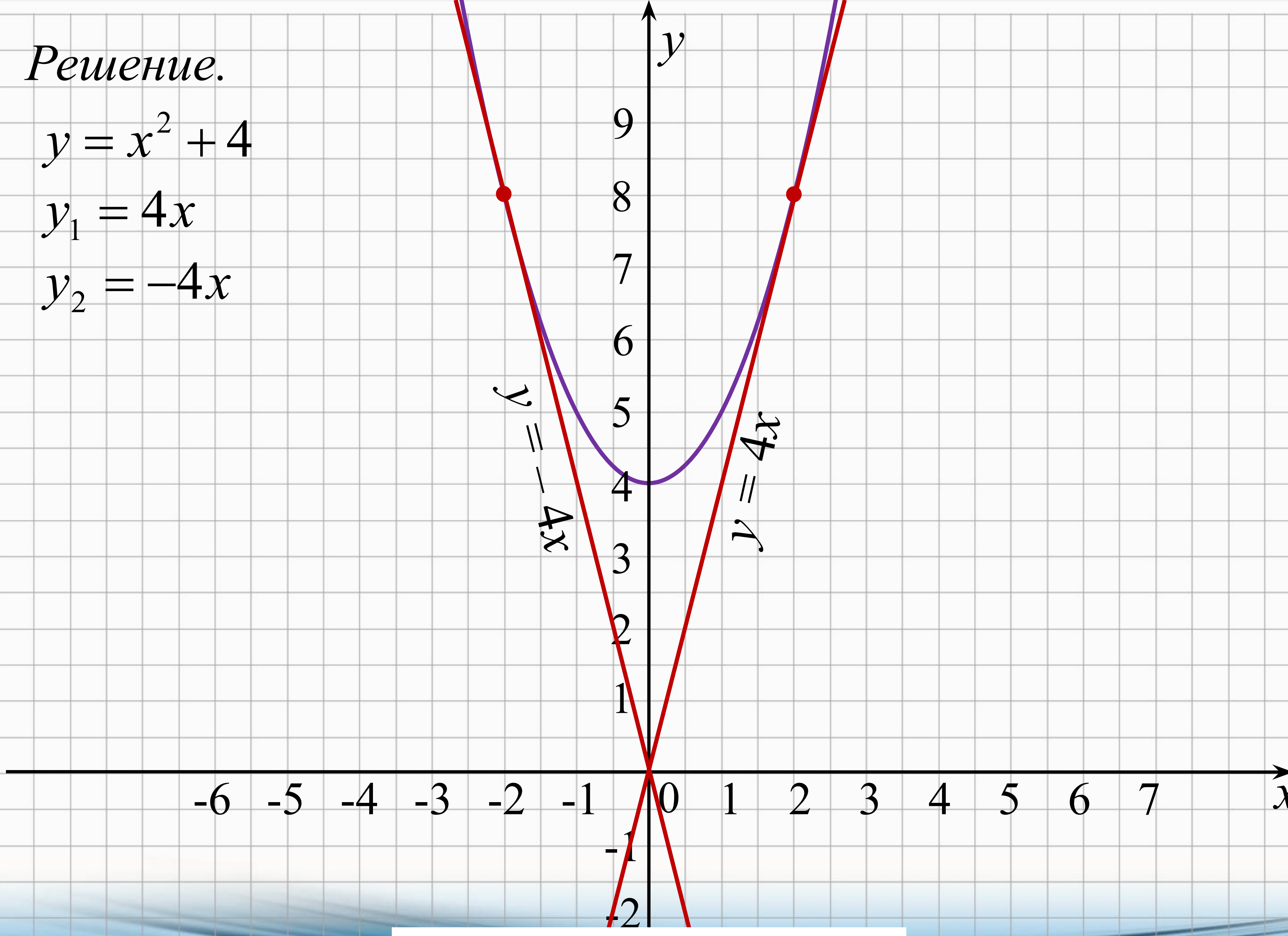
$$1\,\textit{корень} \quad \Leftrightarrow \quad D = 0 \quad \Leftrightarrow \quad k^2 - 16 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad k = \pm 4.$$

Решение.

$$y = x^2 + 4$$

$$y_1 = 4x$$

$$y_2 = -4x$$



Ответ: $k = 4$; $k = -4$.

9. *Найдите все значения k, при каждом из которых прямая y = kx имеет с графиком функции y = – x^2 – 1 ровно одну общую точку. Постройте этот график и все такие прямые.*

Решение.

Другими словами, нужно найти все значения k, при каждом из которых система имеет одно решение:

$$\begin{cases} y=-x^2-1, \\ y=kx; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} kx=-x^2-1, \\ y=kx; \end{cases}$$

$$kx=-x^2-1$$

$$x^2+kx+1=0$$

$$D=k^2-4$$

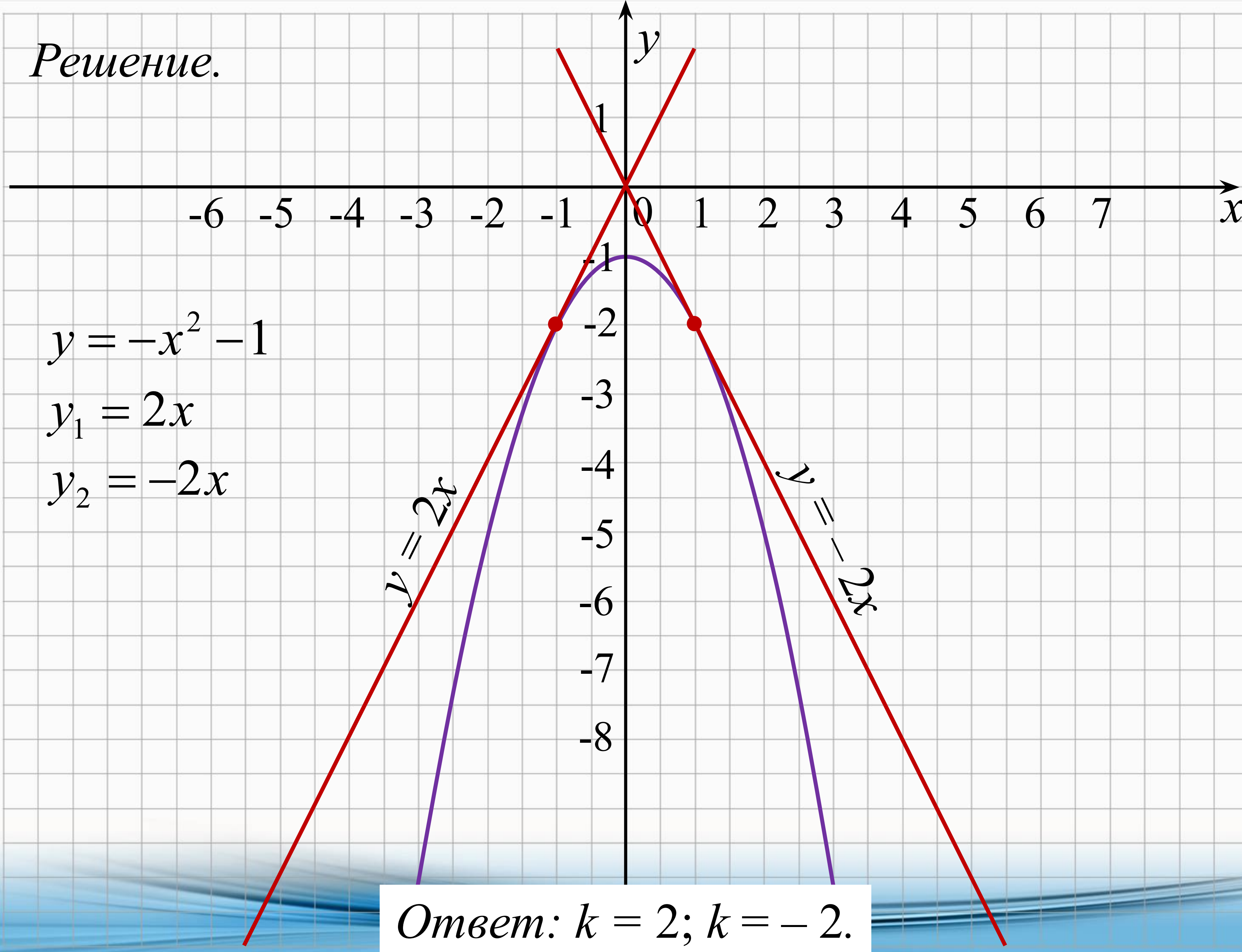
$$1\,\textit{корень} \quad \Leftrightarrow \quad D=0 \quad \Leftrightarrow \quad k^2-4=0 \quad \Leftrightarrow \quad k=\pm 2.$$

Решение.

$$y = -x^2 - 1$$

$$y_1 = 2x$$

$$y_2 = -2x$$



Ответ: $k = 2;\ k = -2.$

10. *Найдите p и постройте график функции y = x^2 + p если известно, что прямая y = 6x имеет с этим графиком ровно одну общую точку.*

Решение.

Другими словами, нужно найти все значения p, при каждом из которых система имеет одно решение:

$$\begin{cases} y = x^2 + p, \\ y = 6x; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x = x^2 + p, \\ y = 6x; \end{cases}$$

$$6x = x^2 + p$$

$$x^2 - 6x + p = 0$$

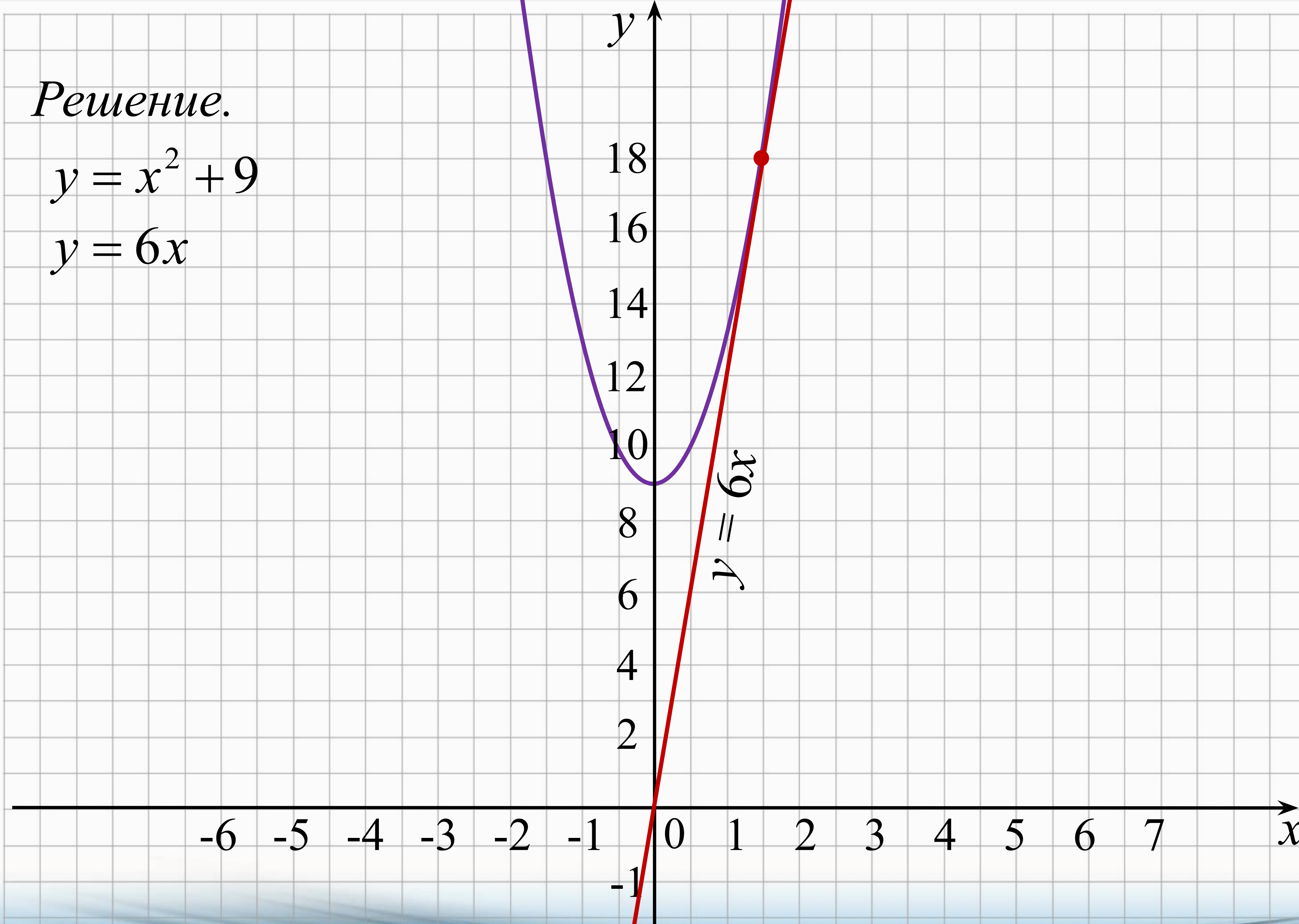
$$D = 36 - 4p$$

$$1\,\textit{корень} \quad \Leftrightarrow \quad D = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 36 - 4p = 0 \quad \Leftrightarrow \quad p = 9.$$

Решение.

$$y = x^2 + 9$$

$$y = 6x$$



Ответ: $p = 9$.

11. *Постройте график функции* $y = \dfrac{(x^2 + x)|x|}{x+1}$ *и определите, при каких значениях m прямая y = m не имеет с графиком ни одной общей точки.*

Решение.

$$y = \frac{(x^2 + x)|x|}{x+1}$$

$$\frac{(x^2 + x)|x|}{x+1} = \frac{x(x+1)|x|}{x+1} = x|x| = \begin{cases} x^2, & \text{если } x \geq 0; \\ -x^2, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

$$\text{при условии } \; x + 1 \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \neq -1.$$

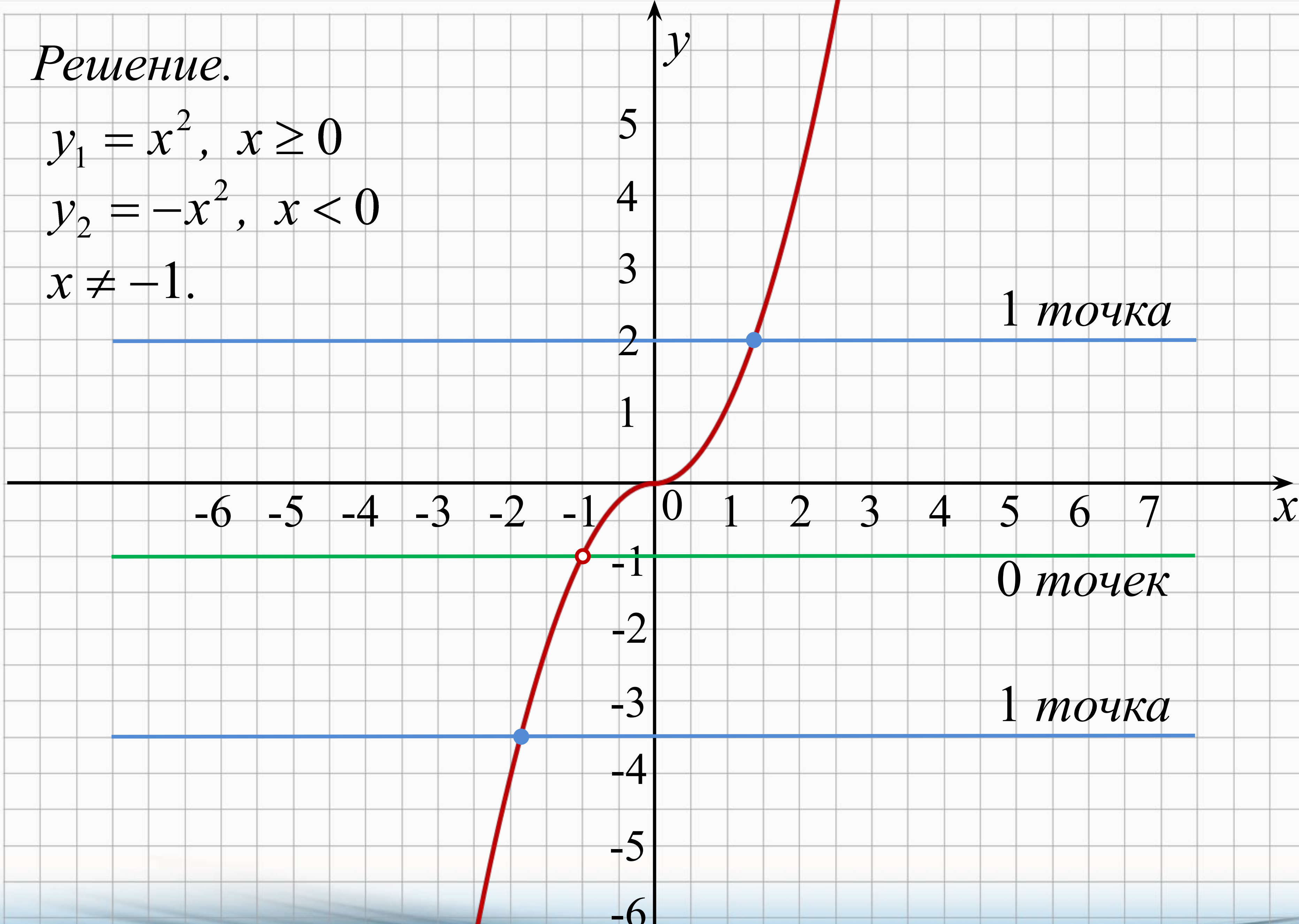
$$D(y) = (-\infty; -1) \cup (-1; +\infty).$$

Решение.

$$y_1 = x^2,\ \ x \geq 0$$

$$y_2 = -x^2,\ \ x < 0$$

$$x \neq -1.$$



Ответ: $m = -1.$