Лекция N2

Тема: Матрицы, операции над матрицами

Если число строк не равно числу столбцов, то матрица называется прямоугольной

Если число строк равно числу столбцов, то матрица называется квадратной

Примеры

a_{ij} **- элементы матрицы**

Опр. 2 **Матрица называется нулевой, если все элементы равны нулю.**

Опр. 3 **Матрица *E* называется единичной, если она квадратная, на главной диагонали стоят единицы, а вне диагонали - нули.**

Операции над матрицами

1. Сложение

Для сложения матриц нужно сложить соответствующие элементы.

$$A+B=\begin{pmatrix} 1+3 & 2+1 \\ 0+2 & 1+(-4) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Складывать можно матрицы, имеющие одинаковые размерности.

2. Умножение на число

Чтобы умножить матрицу на число, нужно каждый элемент умножить на это число.

3. Умножение матриц

Число столбцов матрицы *A* должно совпадать с числом строк матрицы *B*.

<u>Пример.</u>

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 3 & 1 & -1\end{pmatrix}; \qquad B=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & 3\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Найти $A\cdot B.$

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix};$$

$$C_{11} = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 4;$$

$$C_{12} = 1 \cdot 0 + 2 \cdot 3 + 0 \cdot 1 = 6;$$

$$C_{21} = 3 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 = 7;$$

$$C_{22} = 3 \cdot 0 + 1 \cdot 3 + (-1) \cdot 1 = 2.$$

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$A \cdot B \neq B \cdot A.$$

Если $A \cdot B = B \cdot A,$ **то матрицы *A* и *B* называются коммутативными.**

4. Возведение в степень

Дома

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}; \qquad B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

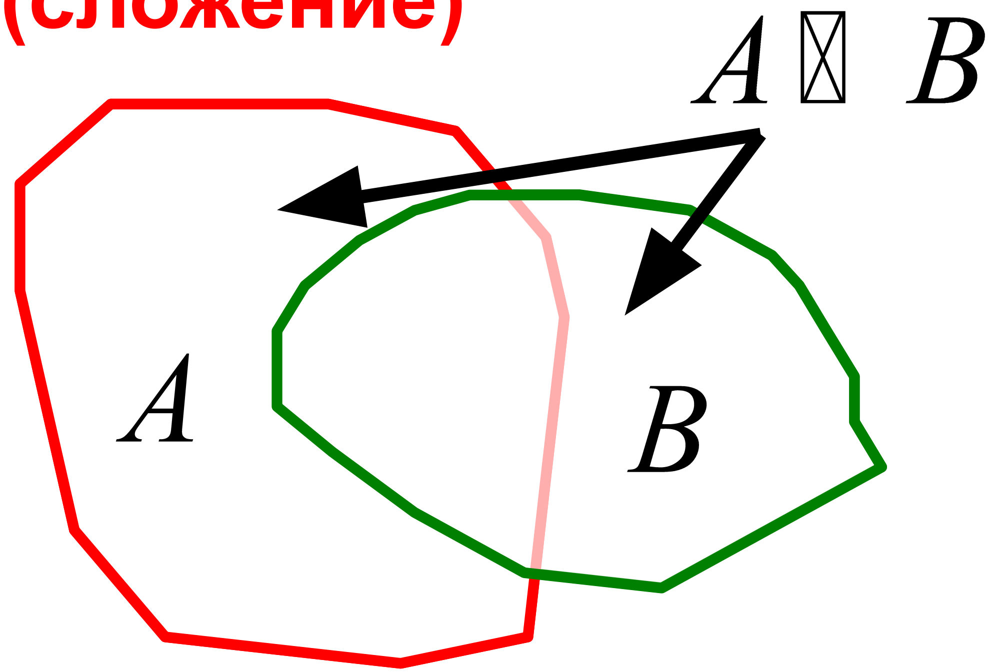
Найти: $A+2B; \quad A\cdot B; \quad B\cdot A;$

$$A^2; \ (A+B)^2.$$

Множества

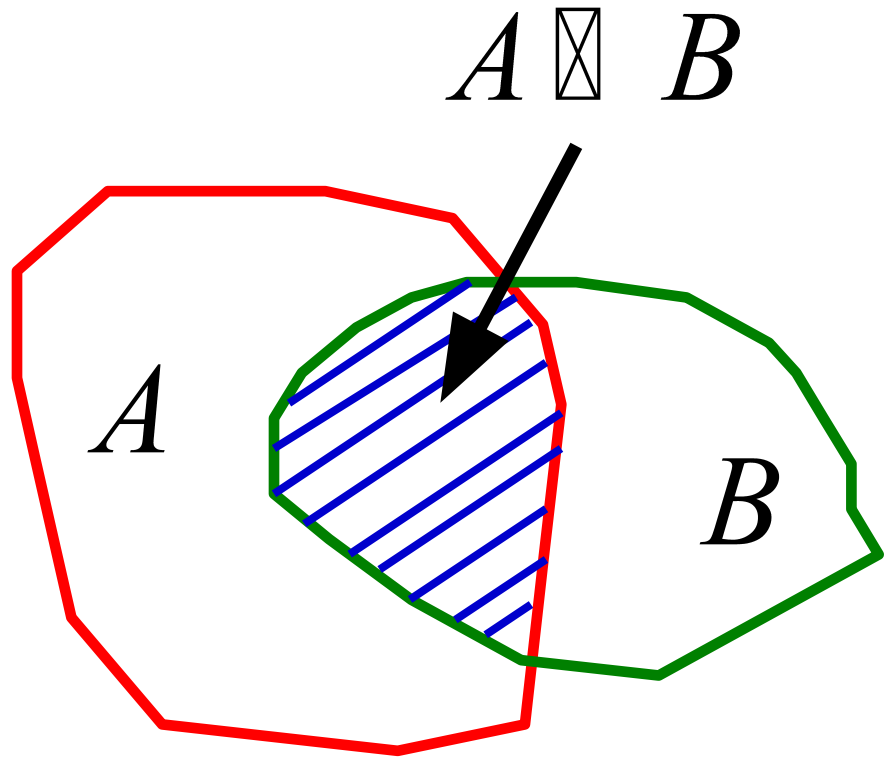
$$A, B, C, ...$$

1. Объединение (сложение)



2. Пересечение

$A \cap B$



Тема:

Матрицы: элементарные преобразования строк, приведение к ступенчатому виду и виду Гаусса. Ранг матрицы

<u>Опр. 1</u> Элементарными преобразованиями строк матрицы называются:

1. **Перестановка местами двух строк**
2. **Замена строки суммой этой строки и некоторой другой, умноженной на число**
3. **Умножение строки на ненулевое число α**

Аналогично вводятся элементарные преобразования столбцов.

Опр.2 Опорным элементом строки называется первый слева ненулевой элемент этой строки.

Пример.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1 2 4 – опорные элементы

У нулевой строки опорного элемента нет

Опр. 3 Матрица называется **ступенчатой**, если опорный элемент в каждой последующей строке расположен правее, чем в предыдущей.

Если строка нулевая, то все последующие строки также нулевые.

Пример.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Опр. 4 Матрица имеет **вид Гаусса**, если

1) она ступенчатая

2) все опорные элементы равны единице

3) над опорными элементами только нули

Пример.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Теорема 4 Любая матрица может быть приведена к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований.

Опр. 5 Строки и столбцы матрицы, в которых расположены ее опорные элементы, называются **базисными**.

Опр. 6 **Рангом матрицы** **называется число ненулевых строк в ступенчатом виде матрицы.**

Обозначается $r(A)$.

Пример.

Привести матрицу к ступенчатому виду и найти ранг.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

+ -3

$\bullet\left(\frac{1}{2}\right) \rightarrow$

3 2

$\bullet\left(\frac{1}{16}\right) \rightarrow$

$\bullet\left(\frac{1}{11}\right)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad -1$$