Дифференциальные уравнения.

Основные понятия

Определение 1: Обыкновенным дифференциальным уравнением n-ого порядка называется уравнение вида

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0 \quad (1)$$

где, $y = y(x)$ искомая функция.

Определение 2: Любая функция y=φ(x), которая обращает уравнение (1) в тождество, называется ***решением*** этого уравнения, а график этой функции – ***интегральной кривой***.

Определение 3: Если решение данного уравнения задано в неявном виде $\Phi(x,y)=0$, то оно называется *интегралом* уравнения (1).

Определение 4: Функция $y=\varphi(x, C_1, C_2, ..., C_n)$ (2), содержащая n независимых произвольных постоянных, называется *общим решением* уравнения (1), если она является его решением при любых значениях постоянных $C_1, C_2, ..., C_n$.

Определение 5: Если в выражении (2) константам придать некоторые определенные значения, то получим некоторые *частные решения*.

Таким образом, общее решение уравнения (1) представляет собой семество функций, которое имеет вид

$y = \varphi(x, C_1, C_2, ..., C_n)$ (2).

Чтобы из этого семейства выделить какое-то конкретное решение нужно на функцию $y =$ $\varphi(x, C_1, C_2, ..., C_n)$ наложить некоторые ограничения, которые обычно задают в виде начальных условий:

$$y(x_0) = y_0^0, y'(x_0) = y_0^1, ..., y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{n-1} \quad (3)$$

Дифференциальные уравнения первого порядка

Определение 6: Дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение $F(x; y; y') = 0$ (4).

Определение 7: Если уравнение (4) удается привести к виду $y' = f(x,y)$ (5), то оно называется разрешенным относительно производной, в противном случае – неразрешенным относительно производной. Здесь функция $f(x,y)$ определена на некотором множестве $D \subset R^2$

Определение: Общим решением дифференциального уравнения первого порядка $y' = f(x,y)$ в области D, называется функция $y = \varphi(x, C)$, обладающая следующими свойствами:

1) Она является решением данного уравнения при любых значениях произвольной постоянной C, принадлежащих некоторому множеству.

2) Для любого начального условия $y(x_0) = y_0$ такого, что $y = \varphi(x, C)$,существует единственное значение $C = C_0$, при котором решение $(x_0, y_0) \in D$ удовлетворяет заданному начальному условию.

Определение: Всякое решение $y = \varphi(x, C_0)$, получающееся из общего решения $y = \varphi(x, C)$, при конкретном C= C_0 называется частным решением.

Определение задачи Коши: Задача, в которой требуется найти частное решение уравнения , удовлетворяющее начальному условию у(x_0)= y_0, называется задачей Коши.

Определение: Общее решение $y = \varphi(x, C)$, построенное на плоскости графика, называется семейством интегральных кривых.

Однако встречаются дифференциальные уравнения, имеющие также решения, которые не получаются из общего ни при каких значениях C (в том числе и при $C = \pm\infty$). Такие решения называются особыми. Графиком особого решения является интегральная кривая, которая в каждой своей точке имеет общую касательную с одной из интегральных кривых, определяемых общим решением. Такая кривая называется огибающей семейства интегральных кривых.

Уравнения первого порядка с разделяющимися переменными

Определение: Дано дифференциальное уравнение $F(x,y,y')=0$. Пусть его можно переписать в виде $y' = f(x, y)$ (5)

Если уравнение (5) можно привести к виду

$y' = A(x)B(y)$ (6)

или к виду

$f_1(x)g_1(y)dx = f_2(x)g_2(y)dy$ (6.1), то это уравнение называется уравнением с разделяющимися переменными.

Метод решения:

$$f_1(x)g_1(y)dx = f_2(x)g_2(y)dy \qquad |:g_1(y) \neq 0$$

$$|: f_2(x) \neq 0$$

$$\frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy = \frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx$$

Интегрируя обе части,

$$\int \frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy - \int \frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx = C$$

получаем общий интеграл уравнения.

Линейные дифференциальные уравнения первого порядка.

Метод Бернулли.

Определение: Дифференциальные уравнения первого порядка вида a(x)y’+ +b(x)y+c(x)=0,где a,b,c – заданные функции, называется линейным дифференциальным уравнением первого порядка.

Определение: Если a(x)=1,то уравнение называется приведенным линейным уравнением первого порядка.

$$y'+p(x)\cdot y = f(x)$$

Метод решения:

Определение: Если $f(x)=0$, то уравнение $y'+p(x)y=0$ называется однородным и является относительно y' и y уравнением с разделяющимися переменными.

Определение: Если $f(x)\neq 0$, то линейное уравнение называется неоднородным.

$$y'+p(x)y=f(x)$$

Решение методом Бернулли у ищем в виде произведения функции $\upsilon = \upsilon(x)$ и $u = u(x)$,

т.е. $y = u \cdot \upsilon$

$$u'\upsilon + u \cdot \upsilon' + p(x) \cdot u \cdot \upsilon = f(x)$$ …,в уравнение

$$y' = u'\upsilon + u \cdot \upsilon'$$

$$u'\upsilon + u \cdot (\upsilon' + p(x) \cdot \upsilon) = f(x)$$

Найдем одну функцию υ такую, чтобы

$$\upsilon' + p(x) \cdot \upsilon = 0 \;;$$

υ – любая, ($\neq 0$),так как

$u\upsilon$ должно удовлетворять уравнению.

Уравнение с разделяющимися переменными:

$$\upsilon' + p(x) \cdot \upsilon = 0$$

$$\frac{dv}{dx} + p(x) \cdot \upsilon = 0 \qquad \frac{dv}{v} + p(x) \cdot dx = 0$$

$$\ln|\upsilon| + \int p(x)dx = 0$$ (так как $v \neq 0$);

$$\ln|\upsilon| = -\int p(x)dx$$

Уравнение с разделяющимися переменными.

$$\upsilon = e^{-\int p(x)dx}, \quad u'\upsilon = f(x), \quad u'e^{-\int p(x)dx} = f(x)$$

$$u = \int f(x)\cdot e^{\int p(x)dx}dx + C$$

Общее решение:

$$y = \left(\int f(x)\cdot e^{\int p(x)dx}dx + C\right)\cdot e^{-\int p(x)dx}$$

Особых решений нет.

Уравнение Бернулли

Определение: Дифференциальное уравнение первого порядка вида $y' + p(x) \cdot y = f(x) \cdot y^m$ называется уравнением Бернулли.

Метод решения: с помощью подстановки $z = y^{1-m}$ уравнение Бернулли сводится к неоднородному дифференциальному уравнению. Но проще решать данное уравнение методом Бернулли.

Метод вариации произвольной постоянной. Метод Лагранжа.

Дано: уравнение первого порядка вида y'+p(x)*y=f(x)

Алгоритм решения.

Рассмотрим соответствующее однородное уравнение $y' + p(x)\cdot y = 0$. Найдем его решение. Это уравнение с разделяющимися переменными.

$$\frac{dy}{dx} = -p(x)y, \qquad \frac{dy}{y} = -p(x)dx,$$

$$\ln|y| = -\int p(x)dx + \ln|c|,$$

$$\ln\left|\frac{y}{C}\right| = -\int p(x)dx, \qquad y = Ce^{-\int p(x)dx}$$

Варьируем произвольную постоянную.

Пусть $C = C(x)$. Найдем функцию $C(x)$ из условия, что функция

$$y = C(x)e^{-\int p(x)dx}$$

является решением неоднородного дифференциального уравнения. Для этого поставим данную в функцию в неоднородное уравнение

$$y' = C'(x)\cdot e^{-\int p(x)dx} + \quad C(x)\cdot e^{-\int p(x)dx} \cdot(-p(x)) \quad \cdot C'(x)\cdot e^{-\int p(x)dx} -$$

$$C(x)\cdot e^{-\int p(x)dx} \cdot p(x) \;+\; p(x)\cdot C(x)\cdot e^{-\int p(x)dx} = f(x)$$

$$C' = \frac{dc}{dx}, \qquad C(x) = \int f(x)\cdot e^{-\int p(x)dx}dx + C$$

Общее решение:

$$y = C(x)e^{-\int p(x)dx} = (\int f(x)\cdot e^{-\int p(x)dx}dx + C)\cdot e^{-\int p(x)dx}$$

Однородные дифференциальные уравнения

Определение: Функция f(x,y) называется однородной измерения *m*, если для любой

$$\lambda,\ f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^m f(x, y)\ \cdot$$

Определение: Уравнение вида $P((x, y)dy + Q(x, y)dx = 0$ называется однородным, если P и Q однородные функции одного измерения.

Теорема 1: Однородные дифференциальные уравнения первого порядка сводится к уравнению первого порядка с разделёнными переменными с помощью подстановки

$U = \frac{y}{x}$, $V = \frac{x}{y}$, где $U = U(x)$ ($V = V(x)$).

Теорема 2: Дифференциальное уравнение $y' = f(x,y)$ является однородным тогда и только тогда, когда $f(x,y)$ есть однородная функция нулевого измерения.

Теорема существования и единственности решения.

Особые решения.

Теорема Коши.

Если в дифференциальном уравнении $y' = f(x,y)$ функция $f(x,y)$ непрерывна в некоторой области D плоскости Оху и имеет в этой области ограниченную частную производную $f_y^{'}(x, y)$, то для любой точки в некотором интервале $x_0 - h \leq x \leq x_0 + h$ существует и притом единственное решение этого уравнения, удовлетворяющее начальному условию.

Геометрически это означает, что через каждую точку М области D проходит одна и только одна интегральная кривая уравнения .

Определение: Точки области D, в котором нарушается единственность решения задачи Коши, называется особыми точками дифференциального уравнения.

Определение: Решение (интегральная кривая) уравнения $y' = f(x, y)$, в каждой точке которого нарушается единственность решения задачи Коши, называется особым решением (особой интегральной кривой) этого уравнения.

Особое решение не может быть получено из общего, ни при каких значениях C (включая $C = \pm\infty$).

Графиком особого решения является огибающая семейства интегральных кривых, она находится путем исключения, если это возможно, параметра C из системы уравнений.

$$\begin{cases} y = \varphi(x, C) \\ 0 = \varphi'_C(x, C) \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \varphi(x, y, C) = 0 \\ \varphi'_C(x, y, C) = 0 \end{cases} \textit{где}$$

$y = \varphi(x, C)$ - общий интеграл

$\varphi(x, y, C)$ - общее решение дифференциального уравнения

Теорема существования и единственности решения задачи

Коши для дифференциальных уравнения высших порядков

Определение: $F(x, y, y',..., y^{n}) = 0$.

Определение: Задачей Коши для дифференциальных уравнений: $F(x, y, y',..., y^{n}) = 0$ называется задача отыскания решения y=y(x), удовлетворяющего заданным начальным ????? условиям $y(x_0)=y_0$, $y'(x_0)=y_0'$,…,$y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}$.

Определение: Общим решением уравнения $F(x, y, y', ..., y^n) = 0$ называется такая функция $y = \varphi(x, C_1, C_2, ..., C_n)$, которая при любых допустимых значениях параметров $C_1, C_2, ..., C_n$, является решением дифференциального уравнения и для любой задачи Коши с условиями $y(x_0)=x_0$, $y'(x_0)=y_0'$,…, $y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}$ найдутся постоянные $C_1, C_2, ..., C_n$????? определяемые из системы уравнений.

$$y_0 = \varphi(x, C_1, C_2, ..., C_n)$$

$$y_0' = \varphi'(x, C_1, C_2, ..., C_n)$$

$$y_0^{(n-1)} = \varphi^{(n-1)}(x, C_1, C_2, ..., C_n)$$

Теорема: Существования и решения задачи Коши: Если дифференциальное уравнение $y^{(n)} = f(x, y', ..., y^{(n-1)})$ таково, что функция $f(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$ в некоторой области D своих аргументов непрерывна и имеет непрерывные частные производные , $\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y'}, ..., \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}$

то для любой точки $(x_0, y_0, y_0', ..., y_0^{(n-1)})$ принадлежащий D существует такой интервал $x_0 - h \le x \le x_0 + h$, на котором существует и притом единственное решение этого уравнения, удовлетворяющее начальному условию.