Методы оптимальных решений

Батраков А.С.

Введение

- *Исследование операций – научная дисциплина прикладного направления кибернетики,* занимающаяся разработкой и практическим применением методов наиболее эффективного управления различными организационными (в том числе экономическими) системами.

Введение

- Операция – любое управляемое мероприятие, направленное на достижение цели.
- Всякий определенный выбор *параметров* называется *решением.*
- Модель *операции* — это достаточно точное описание операции с помощью математического аппарата
- Эффективность операции — степень ее приспособленности к выполнению задачи — количественно выражается в виде критерия эффективности — целевой функции.

Введение

- Все факторы, входящие в описание операции, можно разделить на две группы:
  - постоянные факторы (условия проведения операции), на которые мы влиять не можем. Обозначим их через $\alpha 1, \alpha 2, \ldots$;
  - зависимые факторы (элементы решения) $x1, x2, \ldots$, которые в известных пределах мы можем выбирать по своему усмотрению.

Целевая функция: $Z = f\,(x1, x2, \ldots, \alpha 1, \alpha 2, \ldots)$

Классы моделей

- *класс оптимизационных моделей.*

найти переменные x_1, x_2, x_n, *удовлетворяющие системе неравенств*

$$\varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \le b_i,\ i = 1, 2, \dots, m$$

и обращающие в максимум (или минимум) целевую функцию

$$Z = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \to \max(\min).$$

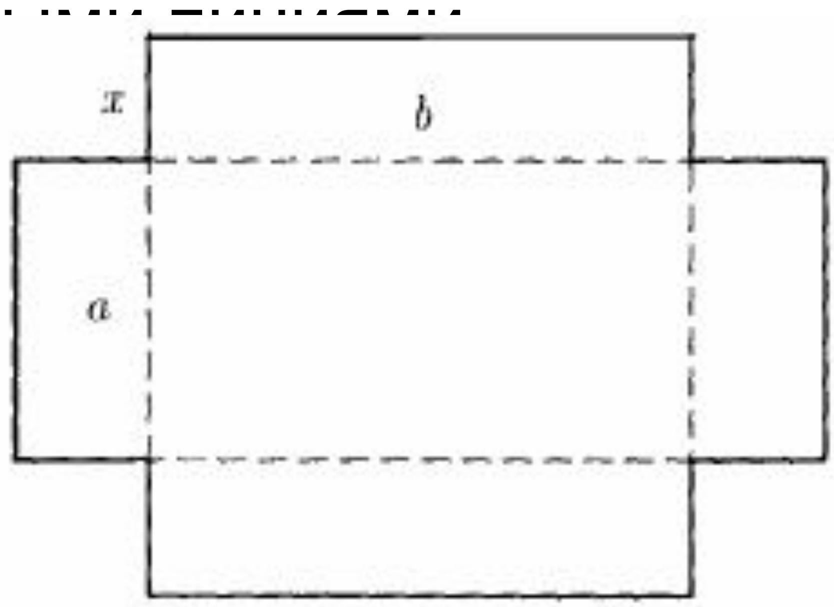
линейного программирования

целочисленного линейного программирования

нелинейного программирования.

Пример оптимизационной задачи

- Рассмотрим пример из области оптимального проектирования. Пусть коробка изготовляется из прямоугольного листа материала размером *a* ×*b*, *a* < *b* . Для этого из четырех углов прямоугольника вырезаются квадраты со стороной *x* и материал сгибается вдоль линий, отмеченных штрихов



Классы моделей

1) Класс оптимизационных задач
2) Задачи сетевого планирования и управления ресурсами
3) Задачи массового обслуживания
4) Задачи управления запасами
5) Задачи распределения ресурсов
6) Задачи ремонта и замены оборудования
7) Задачи составления расписания
8) Задачи планировки и размещения
9) Задачи выбора маршрута
10) Теория игр

Линейное программирование

$$f_1(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max_x$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \ i = 1,\dots,m$$

$$N_j^L \le x_j \le N_j^U, \ j = 1,\dots,n$$

задача планирования производства

Для изготовления двух видов продукции P1 и P2 используют четыре вида ресурсо S1, S2, S3,
S4. Запасы ресурсов, число единиц ресурсов, затрачиваемых на изготовление единицы продукции, приведены в табл. 1 (цифры условные).

Вид ресурса	Запас ресурса	Число единиц ресурсов, затрачиваемых на изготовление единицы продукции	
		P1	P2
S1.	18	1	3
S2	16	2	1
S3	5	—	1
S4	21	3	—
Стоимость ед. продукции		2 д.е.	3 д.е.

Линейное программирование

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 18, \\ 2x_1 + x_2 \le 16, \\ \quad\quad x_2 \le 5, \\ 3x_1 \quad\quad \le 21 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0$$

$$f = 2x_1 + 3x_2$$

Графический метод решения

Аналитический метод решения

Симплекс-метод

Симплекс метод

$$f(x) = c^t x = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$\ldots \quad \ldots \qquad\qquad\qquad \ldots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m$$

$$x_j \geq 0; \quad j = \overline{1,n}$$

$$f(x) = p_0^0 + \sum_{j=m+1}^{n} p_j^0 x_j$$

где $p_0^0 = \sum_{i=1}^{m} c_i b_i^0; \quad p_j^0 = -\sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij}^0 + c_j, \quad j = m+1, \ldots, n$

$$x_i + \sum_{j=m+1}^{n} a_{ij}^0 x_j = b_i^0, \quad i = \overline{1,m}$$

Симплекс метод

$$f(x)=p_0^0+\sum_{j=m+1}^{n} p_j^0 x_j$$

где $p_0^0=\sum_{i=1}^{m} c_i b_i^0;\quad p_j^0=-\sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij}^0+c_j,\quad j=m+1,\dots,n$

$$x_i+\sum_{j=m+1}^{n} a_{ij}^0 x_j=b_i^0,\quad i=\overline{1,m}$$

Базисные переменные	x_{m+1}	…	x_k	…	x_n	Свободные члены
x_1	a_{1m+1}^0		a_{1k}^0		a_{1n}^0	b_1^0
…						…
$\rightarrow x_j$	a_{jm+1}^0		a_{jk}^0		a_{jn}^0	b_j^0
…						…
x_m	a_{mm+1}^0		a_{mk}^0		a_{mn}^0	b_m^0
Целевая функция f	p_{m+1}^0	…	p_k^0	…	p_n^0	$-p_0^0$

Симплекс метод

<u>Шаг 1</u>. Выяснить, имеются ли в последней строке таблицы отрицательные числа (p_0^0 не принимается во внимание). Если все числа неотрицательны, то процесс закончен; базисное решение $\left(b_1^0, \ldots, b_m^0, 0, \ldots, 0\right)$ является оптимальным; $f^* = p_0^0$.

Если в последней строке имеются отрицательные числа $p_{m+1}^0, p_{m+2}^0, \ldots, p_n^0$, перейти к Шаг 2.

<u>Шаг 2.</u>

Просмотреть столбец, соответствующий наименьшему отрицательному числу p_k^0, $m+1 \le k \le n$ и выяснить, имеются ли в нем положительные числа a_{ik}, $i = \overline{1, m}$. Если ни в одном из таких столбцов нет положительных чисел, то оптимального решения не существует.

Если найден столбец, содержащий хотя бы один положительный элемент (если таких столбцов несколько взять любой из них), отметить его вертикальной стрелкой (см. табл. 2.1) и перейти к Шаг 3.

<u>Шаг 3</u>. Разделить свободные члены на соответствующие положительные числа из выделенного столбца и выбрать наименьшее частное. Отметить строку, соответствующую наименьшему частному горизонтальной стрелкой. Выделить разрешающий элемент a_{jk}^0, стоящий на пересечении отмеченных строки и столбца. Перейти к Шаг 4.

Симплекс метод

<u>Шаг 4</u>.

1. Поменять местами переменные x_k и x_j, остальные переменные оставить на прежних местах.
2. На место опорного элемента поставить число $\frac{1}{a^0_{jk}}$.
3. На остальных местах разрешающей (опорной) строки записать соответствующие элементы исходной таблицы, делённые на опорный элемент.
4. На свободные места разрешающего столбца поставить со знаком минус соответствующие элементы исходной таблицы, делённые на опорный элемент.

<u>Шаг 5</u>

Оставшиеся свободные места в новой СТ заполнить построчно следующим образом: из строки элементов исходной таблицы вычесть произведение ее элемента из разрешающего столбца на уже заполненную разрешающую строку новой таблицы.

Симплекс метод

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 18, \\ 2x_1 + x_2 \le 16, \\ \quad\quad x_2 \le 5, \\ 3x_1 \quad\quad \le 21 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{r} x_1 + 3x_2 + x_3 = 18 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 16 \\ x_2 + x_5 = 5 \\ 3x_1 + x_6 = 21 \end{array}\right\}$$

$x_1 \ge 0, \ x_2 \ge 0$

$f = 2x_1 + 3x_2$

Базисные переменные	x_1	x_2 $\downarrow$	Свободные члены
x_3	1	3	18
x_4	2	1	16
$\rightarrow x_5$	0	$\boxed{1}$	5
x_6	3	0	21
f	-2	-3	0

Симплекс метод

Базисные переменные	x_1	x_2 ↓	Свободные члены
x_3	1	3	18
x_4	2	1	16
→ x_5	0	$\boxed{1}$	5
x_6	3	0	21
f	-2	-3	0
	x_1 ↓	x_5	
x_3	$\boxed{1}$	-3	3
x_4	2	-1	11
x_2	0	1	5
x_6	3	0	21
f	-2	3	15

	x_3	x_4	
x_1	-1/5	3/5	6
x_5	-2/5	1/5	1
x_2	2/5	-1/5	4
x_6	3/5	-9/5	3
f	4/5	3/5	24

Ответ: $x^* = (6, 4, 0, 0,1, 3)$; $f^* = 24$

Двойственная задача

Задача I (исходная)	Задача II (двойственная)
$f = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \to \max$ (3.1) при ограничениях $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \le b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \le b_m, \end{cases}$ (3.2) и условии неотрицательности $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, ..., x_n \ge 0.$ (3.3) *Составить такой план выпуска продукции*	$Z = b_1y_1 + b_2y_2 + ... + b_my_m \to \min$ (3.4) при ограничениях $\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + ... + a_{m1}y_m \ge c_1, \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + ... + a_{m2}y_m \ge c_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + ... + a_{mn}y_m \ge c_n, \end{cases}$ (3.5) и условии неотрицательности $y_1 \ge 0, y_2 \ge 0, ..., y_m \ge 0$ (3.6) *Определить такой набор цен ресурсов*
$X = (x_1, x_2, ..., x_n)$, *при котором прибыль (выручка) от реализации продукции будет максимальной при условии, что потребление ресурсов по каждому виду продукции не превзойдет имеющихся запасов*	$Y = (y_1, y_2, ..., y_m)$, *при котором общие затраты на ресурсы будут минимальными при условии, что затраты на ресурсы при производстве каждого вида продукции будут не менее прибыли от реализации этой продукции*

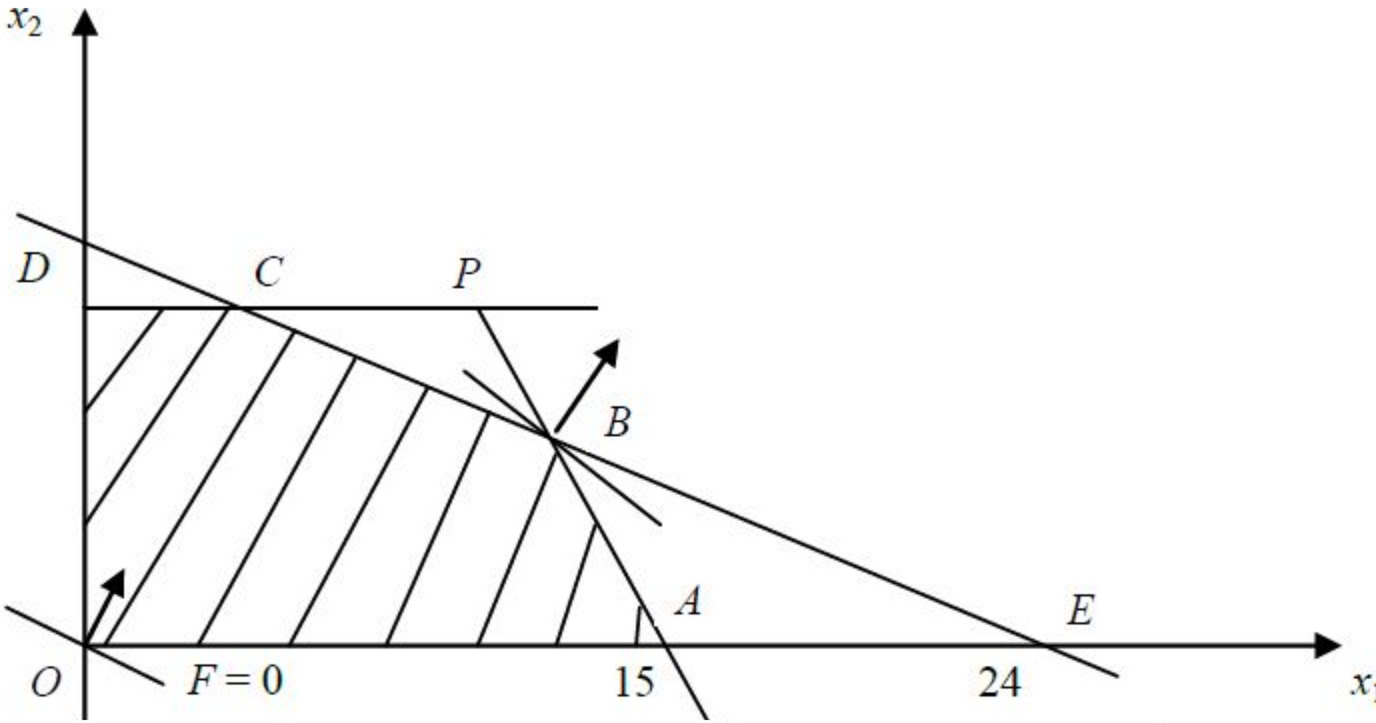
Постоптимальный анализ

Постоптимальный анализ моделей проводится после нахождения оптимального решения задачи линейного программирования. Этот анализ позволяет выявить чувствительность оптимального решения к определенным изменениям исходной модели.

Пример. Заводу требуется составить оптимальный производственный план выпуска двух видов изделий при определенных возможностях трех типов машин. План выпуска должен быть таким, чтобы от реализации выпущенной по этому плану продукции завод получил наибольшую прибыль. Оба вида изделий последовательно обрабатываются этими машинами (табл. 6). Завод от реализации одного изделия первого вида получает 4 руб. прибыли, а от реализации одного изделия второго вида — 6 руб.

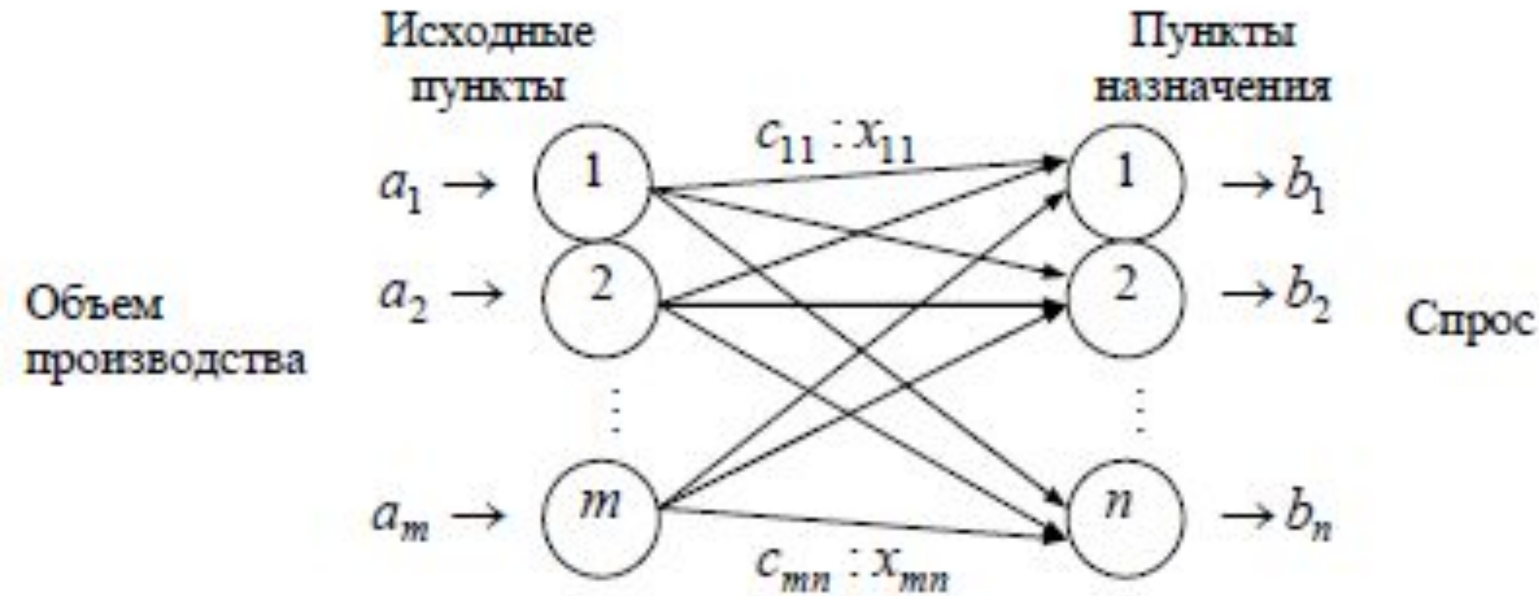
Вид изделия	Вид машины		
	первый	второй	третий
Первое изделие	0,5	2,0	0,0
Второе изделие	1,0	1,0	1,0
Время работы машин	12,0	30,0	9,0

Постоптимальный анализ



Ресурс	Тип ресурса	Максимальное изменение запаса ресурса, ч	Максимальное изменение прибыли, руб.	Ценность ресурсов, руб/ч
1	Дефицитный	9/4	12	48/9
2	Дефицитный	18	12	2/3
3	Недефицитный	–3	0	0

Транспортная задача



$$f(x) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to min$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i;\ i = 1,\dots,m,$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \ge b_j;\ j = 1,\dots,n$$

$$x_{ij} > 0.$$

Транспортная задача

Мощности поставщиков	Мощности потребителей			
	b_1	b_2	...	b_n
a_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	...	c_{1n} x_{1n}
a_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	...	c_{2n} x_{2n}
...	...	...	...	...
a_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	...	c_{mn} x_{mn}

<u>Первоначальное заполнение:</u>

Метод северо-западного угла

Транспортная задача

- Метод последовательного улучшения плана - Метод потенциалов

$$v_j = u_i + c_{ij}$$

$$d_{ij} = (u_i + c_{ij}) - v_j$$

$$d = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -6 & -2 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Мощности поставщиков	Мощности потребителей				
	30	100	40	110	u_i
60	4 30	5 − 30	2 +	3	0
100	1	3 + 70	6 − 30	2	2
120	6	2	7 10	4 110	1
v_j	4	5	8	5	

Задача о назначениях

Задача о назначениях в общем виде может быть сформулирована следующим образом. Имеется n работников, которые могут выполнять n работ, причем использование i-го работника на j-й работе, например, приносит доход c_{ij}. Требуется поручить каждому из работников выполнение одной вполне определенной работы, чтобы максимизировать в данном случае суммарный доход.

Опытные сотрудники	Молодые сотрудники			
	Костин	Мишин	Васин	Юрин
Иванов	2	10	9	7
Петров	15	4	14	8
Сидоров	13	14	16	11
Егоров	4	15	13	19

Нелинейное программирование

Предприниматель должен принять решение о приобретении d единиц продукции, которую выпускают две фирмы. Известно, что если он закажет первой фирме x изделий, то ему придется заплатить ей

$$f_1(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \text{ (руб.)},$$

а при выполнении этого заказа второй фирмой его затраты составят

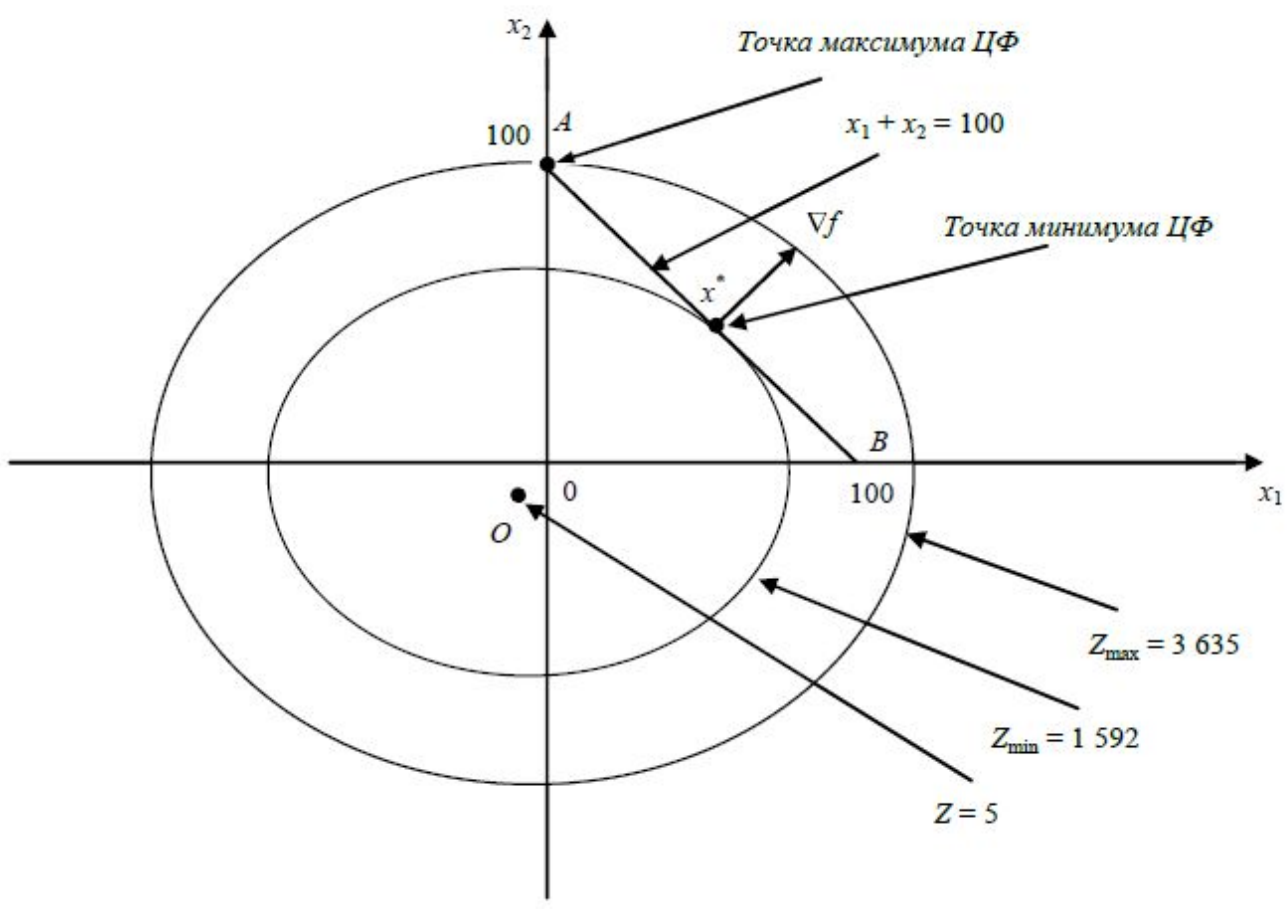
$$f_2(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 \text{ (руб.)}.$$

d	a_0	a_1	a_2	b_0	b_1	b_2
100	25	2	0,2	15	6	0,3

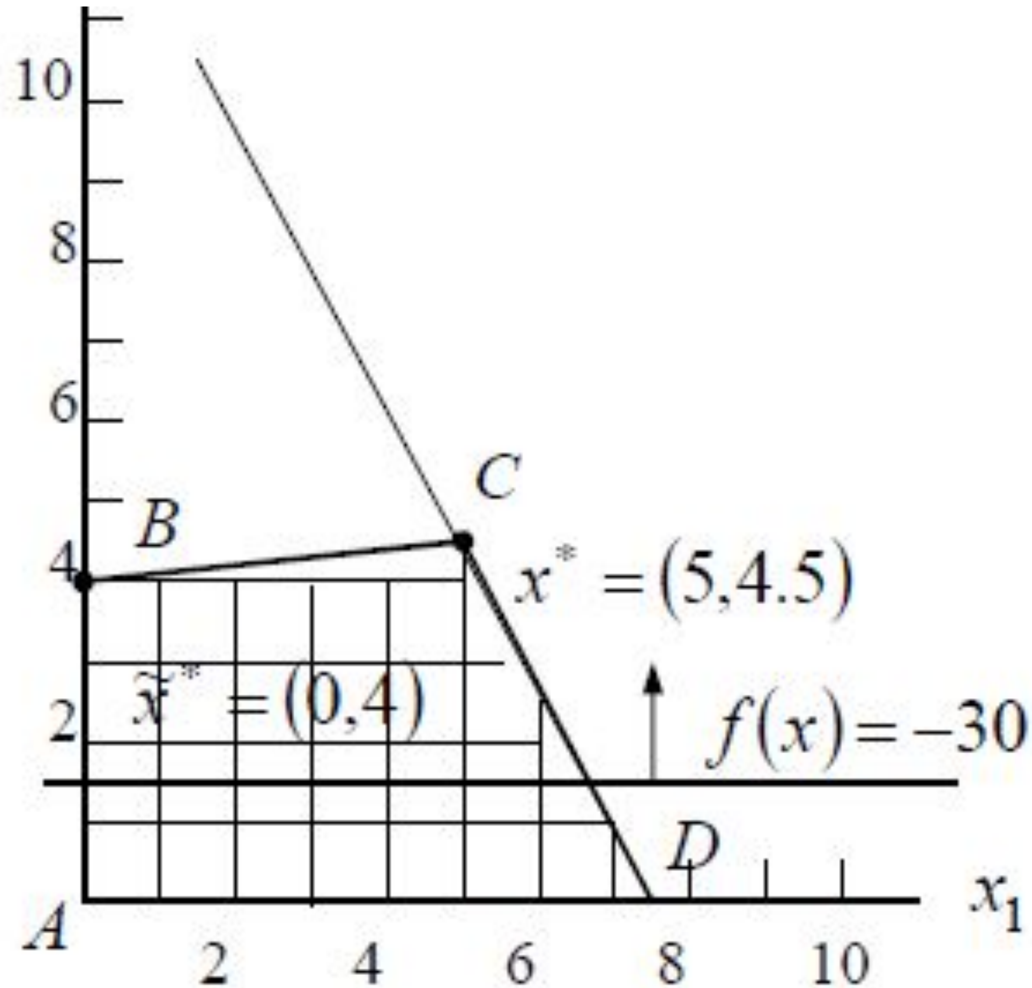
$$Z = 40 + 2x_1 + 0,2x_1^2 + 6x_2 + 0,3x_2^2 \rightarrow \min$$

$$x_1 + x_2 = 100,$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$$

Нелинейное программирование



Целочисленное программирование



Многокритериальная оптимизация

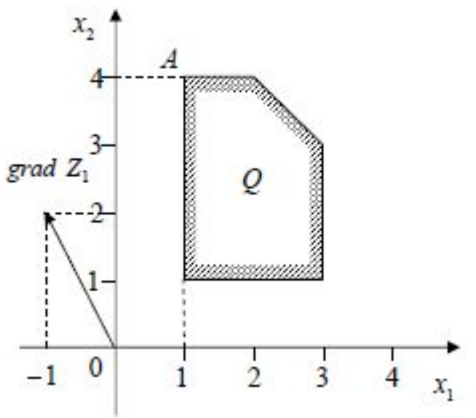
$$Z(X) = \{Z_1(X), Z_2(X), \dots, Z_m(X)\} \to \max,$$
$$X \in S$$

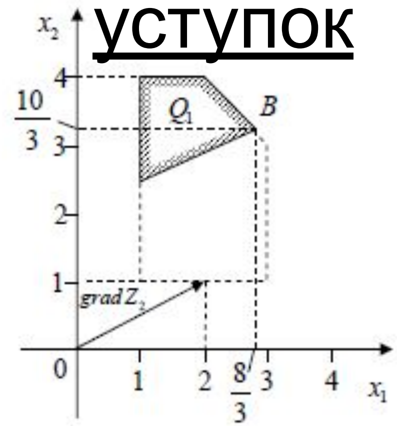
- оптимизация одного признанного наиболее важным критерия, остальные критерии при этом играют роль дополнительных ограничений;
- упорядочение заданного множества критериев и последовательная оптимизация по каждому из них (этот подход рассмотрен ниже на примере *метода* последовательных уступок);
- сведение многих критериев к одному введением экспертных весовых коэффициентов для каждого из критериев таким образом, что более важный критерий получает более высокий вес;
- метод справедливого компромисса, который допускает одинаковую важность всех частных критериев и не требует их нормализации и упорядоченности по степени важности.

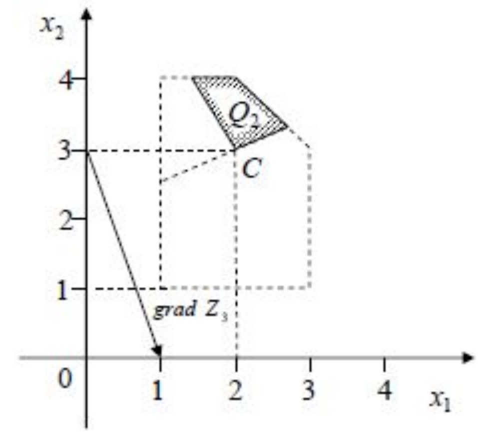
$$Z_1 = -x_1 + 2x_2 \to \max$$
$$Z_2 = 2x_1 + x_2 \to \max$$
$$Z_3 = x_3 - 3x_2 \to \max$$
$$x_1 + x_2 \le 6$$
$$1 \le x_1 \le 3$$
$$1 \le x_2 \le 4$$

Многокритериальная оптимизация

Метод уступок







Метод справедливого компромисса

Справедливым компромиссом будем называть такой компромисс, при котором относительный уровень уменьшения величины одного или нескольких частных критериев не превосходит относительного уровня увеличения величины остальных частных критериев (меньше или равен)

Методы поиска экстремума функции одной переменной

- Прямые методы:
  - Метод равномерного поиска
  - Метод деления отрезка пополам
  - Метод Фибоначи
  - Метод золотого сечения

Методы поиска экстремума функции одной переменной

Схема алгоритма Пауэлла: пусть x_1 - начальная точка; Δx - выбранная величина шага по оси x.

Шаг 1: Вычислить $x_2 = x_1 + \Delta x$.

Шаг 2: Вычислить $f(x_1)$ и $f(x_2)$.

Шаг 3: Если $f(x_1) > f(x_2)$, положить $x_3 = x_1 + 2\Delta x$, если $f(x_1) \le f(x_2)$, то $x_3 = x_1 - \Delta x$. Если $x_3 < x_1$, то перенумеровать точки в естественном порядке: $x_1 = x_3$, $x_2 = x_1$, $x_3 = x_2$.

Шаг 4: Вычислить $f(x_3)$ и найти

$$F_{\min} = \min\{f_1, f_2, f_3\}.$$

$X_{\min}$ равно точке x_i, которая соответствует $F_{\min}$.

Шаг 5: По трем точкам x_1, x_2, x_3 вычислить $\bar{x}$, используя формулу (2.1), т.е. используя квадратичную аппроксимацию.

Шаг 6: Проверка на окончание поиска:

а) является ли разность $\left|F_{\min} - f(\bar{x})\right| \le \varepsilon$;

б) является ли разность $\left|X_{\min} - \bar{x}\right| \le \delta$,

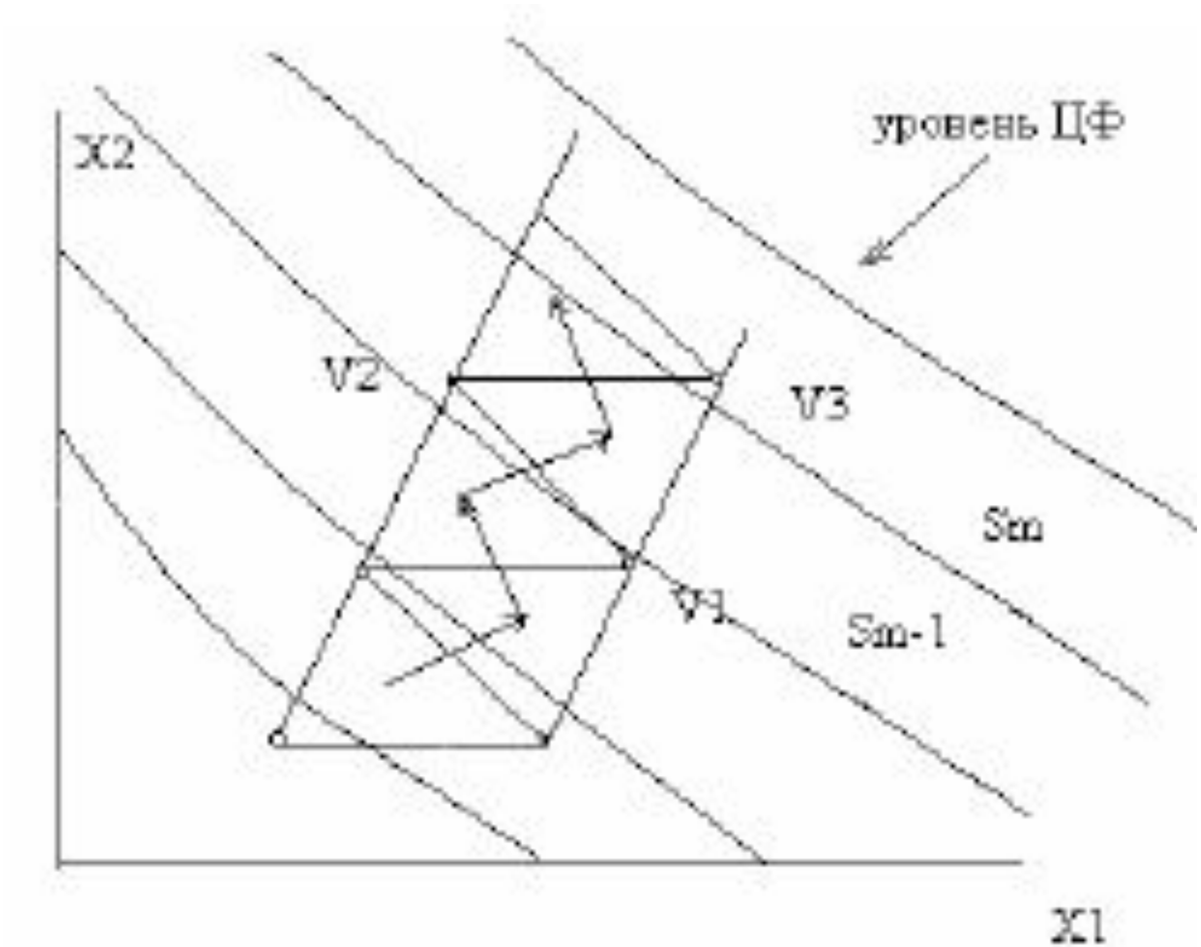
где $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ - заданные точности.

Если условия а) и б) выполняются одновременно, то закончить поиск. Иначе переход на Шаг 7.

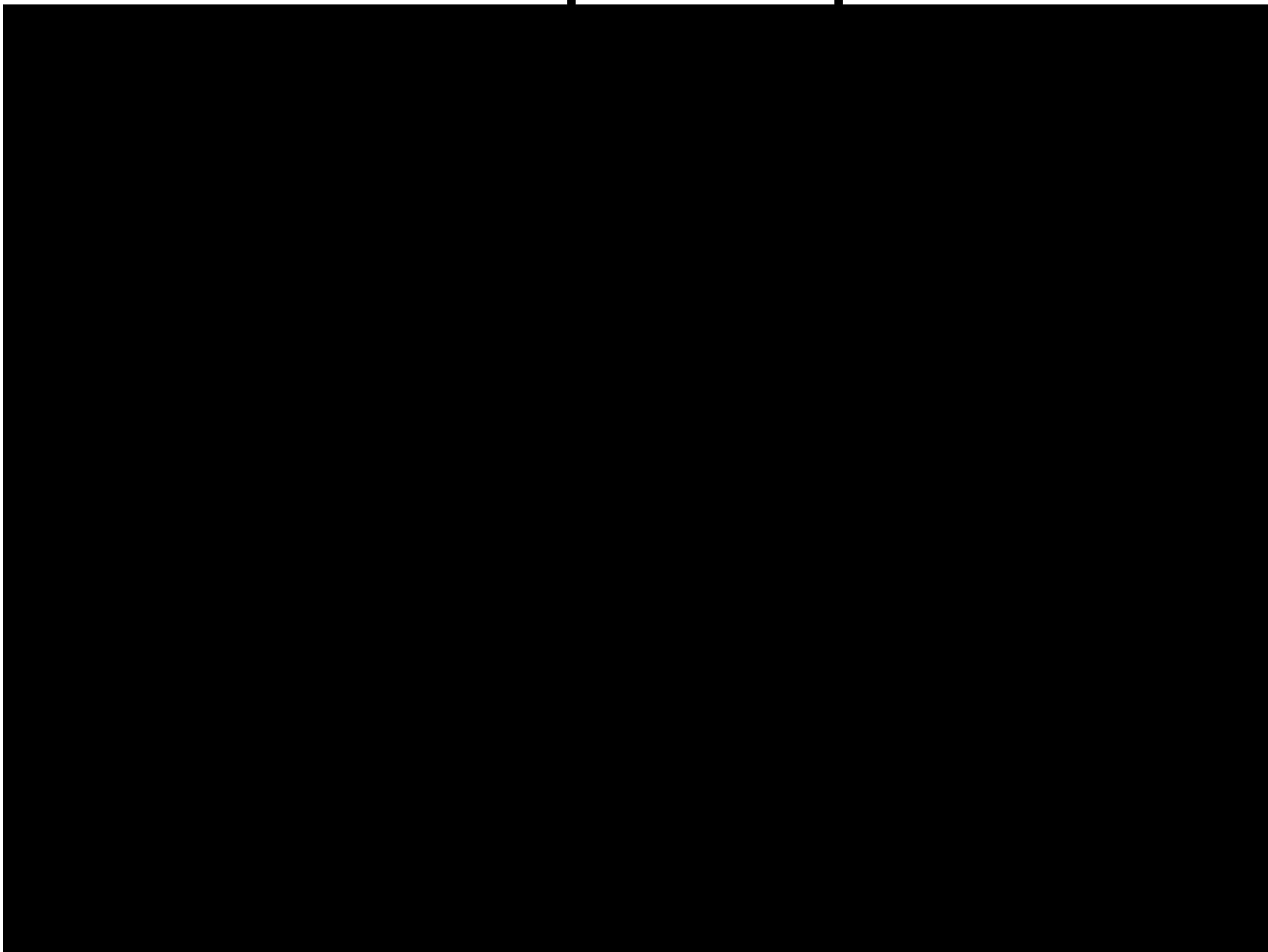
Шаг 7: Выбрать "наилучшую" точку ($X_{\min}$ или $\bar{x}$) и две точки по обе стороны от нее. Обозначить эти точки в естественном порядке и перейти на Шаг 2.

Методы поиска экстремума функции нескольких переменных

- Симплексный метод



Теория игр



Теория игр

- Дилемма заключенного

Теория игр

Агрофирма может выращивать любую из культур A и B. Требуется установить, какими из этих культур и в каких пропорциях нужно засеять земли, принадлежащие фирме, чтобы в предстоящем сезоне после продажи урожая получить максимальную гарантированную в среднем выручку с 1 га используемых земель.

Достоверный прогноз погоды отсутствует: неизвестно, будет ли предстоящее лето засушливым, дождливым или нормальным. Средняя урожайность этих культур в зависимости от погоды, установленная на основе прошлого опыта, приведена в следующей таблице (ц/га):

Культура	Засушливое лето	Нормальное лето	Дождливое лето
A	18	22	32
B	17	9	7

Критерии принятия решения

- Критерий Вальда
- Критерий Байеса – Лапласа
- Критерий Сэвиджа
- Критерий Гурвица
- Критерий Гермейера
- Критерий произведений