Основы алгебры логики и логические основы устройства компьютера

ФОРМЫ МЫШЛЕНИЯ

- **ЛОГИКА** — это наука о формах и законах человеческого мышления и, в частности, о законах доказательных рассуждений.
- Логика изучает мышление как средство познания объективного мира. Законы логики отражают в сознании человека свойства, связи и отношения объектов окружающего мира.

Основные формы мышления

Основными формами мышления являются: ПОНЯТИЯ, СУЖДЕНИЯ, УМОЗАКЛЮЧЕНИЯ.

ПОНЯТИЕ - форма мышления, в которой отражаются существенные признаки отдельного объекта или класса однородных объектов.

Примеры: *портфель, трапеция, ураганный ветер.*

Понятие имеет две стороны: *содержание* и *объем.*

Основные формы мышления

СУЖДЕНИЕ – это форма мышления, в которой что-либо утверждается или отрицается об объектах, их свойствах и отношениях.

Суждениями обычно являются повествовательными предложениями, которые могут быть или истинными или ложными.

«Берн — столица Франции»,
«Река Кубань впадает в Азовское море»,
«2>9», «3×5=10»

Основные формы мышления

УМОЗАКЛЮЧЕНИЕ – это форма мышления, посредством которой из одного или нескольких истинных суждений, называемых посылками, мы по определенным правилам вывода получаем новое суждение (заключение).

Все металлы - простые вещества. Литий - металл.→ Литий - простое вещество.

Один из углов треугольника равен 90º. → Этот треугольник прямоугольный.

АЛГЕБРА ВЫСКАЗЫВАНИЙ

- В основе работы логических схем и устройств персонального компьютера лежит специальный математический аппарат - математическая логика. Математическая логика изучает вопросы применения математических методов для решения логических задач и построения логических схем. Знание логики необходимо при разработке алгоритмов и программ, так как в большинстве языков программирования есть логические операции.
- Английский математик **Джордж Буль (1815 — 1864 г.)** создал логическую алгебру, в которой высказывания обозначены буквами. Сочинение Джорджа Буля, в котором подробно исследовалась эта алгебра, было опубликовано в 1854 г. Оно называлось «Исследование законов мысли» («Investigation of the Laws of Thought»). Отсюда ясно, что Буль рассматривал свою алгебру как инструмент изучения законов человеческого мышления, то есть законов логики.
- Алгебру логики иначе называют алгеброй высказываний. В математической логике суждения называются высказываниями.

ВЫСКАЗЫВАНИЕ - это повествовательное предложение, о котором можно сказать, что оно или истинно или ложно.

Земля - планета Солнечной системы. (Истинно)
$2 \cdot 2 = 5$ (Ложно)

Не всякое предложение является высказыванием:

1) Восклицательные и вопросительные предложения высказываниями не являются.
“Какого цвета этот дом?”; “Пейте томатный сок!”

2) Не являются высказываниями и определения.
Определения не бывают истинными или ложными, они лишь фиксируют принятое использование терминов.
“Назовем медианой отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны”.
3) Не являются высказываниями и предложения типа *“Он сероглаз”* или *“x- $4x + 3=0$”* - в них не указано о каком человеке идет речь или для какого числа x верно равенство. Такие предложения называются ***высказывательными формами.***

Высказывательная форма — это повествовательное предложение, которое прямо или косвенно содержит хотя бы одну переменную и становится высказыванием, когда все переменные замещаются своими значениями.

Высказывания могут быть ***простыми*** *и* ***сложными.***

Высказывание считается простым, если никакую его часть нельзя рассматривать как отдельное высказывание.

Высказывание, которое можно разложить на части, будем называть сложным, а неразложимое далее высказывание - простым.

Сложное высказывание получается путем объединения простых высказываний ***логическими связками*** **— НЕ, И, ИЛИ**. Значение истинности сложных высказываний зависит от истинности входящих в них простых высказываний и объединяющих их связок.

Например, даны простые высказывания:

На улице идет дождь.

На улице светит солнце.

На улице пасмурная погода.

Составим из них сложные высказывания:

На улице идет дождь ***и*** *на улице светит солнце.*

На улице светит солнце ***или*** *на улице пасмурная погода.*

Неверно что *на улице идет дождь.*

- В математической логике не рассматривается конкретное содержание высказывания, важно только, истинно оно или ложно. Поэтому **высказывание можно представить некоторой переменной величиной, значением которой может быть только 0 или 1. Если высказывание истинно, то его значение равно 1, если ложно - 0.**
- Простые высказывания назвали ***логическими переменными*** и для простоты записи их обозначают латинскими буквами: *А, В, С…*
  Луна является спутником Земли. *А = 1*
  Москва – столица Германии. *В = 0*
- Сложные высказывания называются *логическими функциями*. Значения логической функции также может принимать значения только 0 или 1.

БАЗОВЫЕ ЛОГИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ

В алгебре высказываний, как и в обычной алгебре, вводится ряд операций. Логические связки И, ИЛИ и НЕ заменяются логическими операциями: ***конъюнкцией, дизъюнкцией и инверсией.*** Это основные логические операции, при помощи которых можно записать любую логическую функцию.

1. Логическая операция ИНВЕРСИЯ (ОТРИЦАНИЕ)

- соответствует частице НЕ
- обозначается черточкой над именем переменной или знаком ¬ перед переменной
- **Инверсия логической переменной истинна, если сама переменная ложна, и, наоборот, инверсия ложна, если переменная истинна.** Таблица истинности инверсии имеет вид:

A	$\overline{A}$
0	1
1	0

2. Логическая операция ДИЗЪЮНКЦИЯ (ЛОГИЧЕСКОЕ СЛОЖЕНИЕ)

- соответствует союзу ИЛИ
- обозначается знаком v или + или ‖
- Дизъюнкция двух логических переменных ложна тогда и только тогда, когда оба высказывания ложны.
  Это определение можно обобщить для любого количества логических переменных, объединенных дизъюнкцией.
  A v B v C =0, только если A=0, B=0, C=0.
  Таблица истинности дизъюнкции имеет следующий вид:

A	B	$A \vee B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

3. Логическая операция КОНЪЮНКЦИЯ (ЛОГИЧЕСКОЕ УМНОЖЕНИЕ)

- соответствует союзу И
- обозначается знаком & или Λ, или ·
- Конъюнкция двух логических переменных истинна тогда и только тогда, когда оба высказывания истинны.
  Это определение можно обобщить для любого количества логических переменных, объединенных конъюнкцией.
  A & B & C=1, только если A=1, B=1, C=1.
  Таблица истинности конъюнкции имеет следующий вид:

A	B	$A \wedge B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

ЛОГИЧЕСКИЕ ВЫРАЖЕНИЯ И ТАБЛИЦЫ ИСТИННОСТИ

- Сложные высказывания можно записывать в виде формул. Для этого простые логические высказывания нужно обозначить как логические переменные буквами и связать их с помощью знаков логических операций. Такие формулы называются ***логическими выражениями.*** Например:

$$\overline{(A \vee B \,\&\, C)}$$

$$(A \vee B) \,\&\, (\overline{A} \vee \overline{B})$$

- Чтобы определить значение логического выражения необходимо подставить значения логических переменных в выражение и выполнить логические операции. Операции в логическом выражении выполняются слева направо с учетом скобок в следующем порядке:
  1. инверсия;
  2. конъюнкция;
  3. дизъюнкция;

- Для изменения указанного порядка выполнения логических операций используются круглые скобки.

Таблицы истинности

- Для каждого составного высказывания (логического выражения) можно построить *таблицу истинности*, которая определяет истинность или ложность логического выражения при всех возможных комбинациях исходных значений простых высказываний (логических переменных).
- При построении таблиц истинности целесообразно руководствоваться определенной последовательностью действий:

1) записать выражение и определить порядок выполнения операций

2) определить количество строк в таблице истинности. Оно равно количеству возможных комбинаций значений логических переменных, входящих в логическое выражение (определяется по формуле $\boldsymbol{Q=2^n}$, где **n** - количество входных переменных)

3) определить количество столбцов в таблице истинности ***(= количество логических переменных + количество логических операций***)

4) построить таблицу истинности, обозначить столбцы (*имена переменных и обозначения логических операций в порядке их выполнения*) и внести в таблицу возможные наборы значений исходных логических переменных.

5) заполнить таблицу истинности, выполняя базовые логические операции в необходимой последовательности и в соответствии с их таблицами истинности

Теперь мы можем определить значение логической функции для любого набора значений логических переменных.

Например, построим таблицу истинности для логической функции:

$$F(A,B,C) = \overline{A} \wedge (C \vee B)$$

Количество входных переменных в заданном выражении равно трем (A,B,C). Значит, количество входных наборов, а значит и строк $Q=2^3=8$. Количество столбцов равно 6 (3 переменные + 3 операции). Столбцы таблицы истинности соответствуют значениям исходных выражений A,B,C, промежуточных результатов $\overline{A}$ и $(C \vee B)$, а также искомого окончательного значения сложного арифметического выражения

$$\overline{A} \wedge (C \vee B)$$

$$\overline{A} \wedge (C \vee B)$$

A	B	C	$\overline{A}$	B V C	$\overline{A} \wedge (C \vee B)$

$$\overline{A} \wedge (C \vee B)$$

A	B	C	$\overline{A}$	B V C	$\overline{A} \wedge (C \vee B)$
0	0	0			
0	0	1			
0	1	0			
0	1	1			
1	0	0			
1	0	1			
1	1	0			
1	1	1			

A	B	C	$\overline{A}$	B V C	$\overline{A} \wedge (C \vee B)$
0	0	0	1	0	0
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	0
1	1	0	0	1	0
1	1	1	0	1	0

Задание. Постройте таблицу истинности для логического выражения:

$$(A \vee B) \wedge (\overline{A} \vee B)$$

$$(A \vee B) \,\&\, (\overline{A} \vee B)$$

A	B	$A \vee B$	$\overline{A}$	$\overline{A} \vee B$	$(A \vee B) \,\&\, (\overline{A} \vee B)$
0	0	0	1	1	0
0	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	0
1	1	1	0	1	1

РЕШЕНИЕ ЛОГИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

ЗАДАЧА 1.

Разбирается дело Лёнчика, Пончика и Батончика. Кто-то из них нашел и утаил клад. На следствии каждый из них сделал по два заявления.

Батончик: «Я не делал этого. Пончик сделал это»

Лёнчик: «Пончик не виновен. Батончик сделал это»

Пончик: «Я не делал этого. Лёнчик не делал этого»

Суд установил, что один из них дважды солгал, другой — дважды сказал правду, третий — один раз солгал, один раз сказал правду. Кто утаил клад?

Решение:

Введём обозначения: Б –клад утаил Батончик, П - клад утаил Пончик, Л - клад утаил Лёнчик. Рассмотрим три возможных варианта – виноват Батончик, виноват Пончик, виноват Лёнчик. При таких вариантах получаем следующие значения высказываний трёх обвиняемых.

Возможные варианты			Высказывания Батончика		Высказывания Лёнчика		Высказывания Пончика		Соответствие условию задачи
Б	Л	П	¬Б	П	¬П	Б	¬П	¬Л	
1	0	0	0	0	1	1	1	1	-
0	0	1	1	1	0	0	0	1	+
0	1	0	1	0	1	0	1	0	-

В первом варианте один солгал дважды, а двое сказали правду дважды, что не соответствует условию задачи. В третьем варианте все один раз сказали правду и один раз солгали, что также не соответствует условию задачи. Во втором варианте один дважды солгал, другой дважды сказал правду, а третий один раз сказал правду, а один раз солгал, что соответствует условию задачи. Следовательно клад утаил Пончик.

Задача 2.

В школьном первенстве по настольному теннису в четверку лучших вошли девушки: Наташа, Маша, Люда и Рита. Самые горячие болельщики высказали свои предположения о распределении мест в дальнейших состязаниях.
Один считает, что первой будет Наташа, а Маша будет второй.
Другой болельщик на второе место прочит Люду, а Рита, по его мнению, займет четвертое место.
Третий любитель тенниса с ними не согласился. Он считает, что Рита займет третье место, а Наташа будет второй.
Когда соревнования закончились, оказалось, что каждый из болельщиков был прав только в одном из своих прогнозов.
Какое место на чемпионате заняли Наташа, Маша, Люда, Рита?

Решение:

Введём обозначения: Н1 – Наташа на 1 месте, М2 – Маша на 2 месте, Л2 – Люда на 2 месте, Р4 – Рита на 4 месте, Р3 – Рита на 3 месте, Н2 – Наташа на 2 месте. Занесём возможные варианты высказываний трёх болельщиков в таблицу с учётом того, что каждый из болельщиков оказался прав только в одном из своих прогнозов:

Высказывания 1-ого болельщика		Высказывания 2-ого болельщика		Высказывания 2-ого болельщика		Соответствие условию задачи
Н1	**М2**	**Л2**	**Р4**	**Р3**	**Н2**	
0	**1**	0	1	0	**1**	-
0	1	0	**1**	**1**	0	-
0	**1**	**1**	0	1	0	-
0	**1**	1	0	0	**1**	-
1	0	0	1	0	**1**	-
1	0	0	**1**	**1**	0	-
1	0	**1**	0	0	**1**	-
1	0	1	0	1	0	+

Из анализа таблицы видно , что условию задачи соответствует только последняя строка, значит первое место заняла Наташа, второе – Люда, третье – Рита, а Маша –четвёртое.

Задача 3.

Вадим, Сергей и Михаил изучают различные иностранные языки: китайский, японский и арабский. На вопрос, какой язык изучает каждый из них, один ответил: "Вадим изучает китайский, Сергей не изучает китайский, а Михаил не изучает арабский". Впоследствии выяснилось, что в этом ответе только одно утверждение верно, а два других ложны. Какой язык изучает каждый из молодых людей?

Решение:

Введём обозначения: ВК – Вадим изучает китайский язык, СК – Сергей изучает китайский язык, МА - Михаил изучает арабский язык. Занесём в таблицу возможные варианты значений высказываний с учётом условия задачи, что одно из утверждений верно, а два - ложны:

Возможные варианты высказываний						Соответствие условию задачи
ВК	**¬ СК**	**¬ МА**	**ВК**	**СК**	**МА**	
1	0	0	**1**	**1**	1	-
0	0	1	0	1	0	+
0	1	0	**0**	**0**	1	-

Проанализируем строки в трёх последних столбцах. Условию задачи соответствует только вторая строка, значит Сергей изучает китайский язык, Михаил – японский (так как он не изучает арабский), тогда Вадим изучает арабский язык.

Задача 4. Три одноклассника — Влад, Тимур и Юра, встретились спустя 10 лет после окончания школы. Выяснилось, что один из них стал врачом, другой физиком, а третий юристом. Один полюбил туризм, другой бег, страсть третьего — регби.

- Юра сказал, что на туризм ему не хватает времени, хотя его сестра — единственный врач в семье, заядлый турист. Врач сказал, что он разделяет увлечение коллеги.
- Забавно, но у двоих из друзей в названиях их профессий и увлечений не встречается ни одна буква их имен.

Определите, кто чем любит заниматься в свободное время и у кого какая профессия.

Решение: Здесь исходные данные разбиваются на тройки (имя — профессия — увлечение).

Из слов Юры ясно, что он не увлекается туризмом и он не врач. Из слов врача следует, что он турист.

Имя	Юра		
Профессия		врач	
Увлечение		туризм	

Буква "а", присутствующая в слове "врач", указывает на то, что Влад тоже не врач, следовательно врач — Тимур. В его имени есть буквы "т" и "р", встречающиеся в слове "туризм", следовательно второй из друзей, в названиях профессии и увлечения которого не встречается ни одна буква его имени — Юра. Юра не юрист и не регбист, так как в его имени содержатся буквы "ю" и "р". Следовательно, окончательно имеем:

Имя	Юра	Тимур	Влад
Профессия	физик	врач	юрист
Увлечение	бег	туризм	регби

Ответ. Влад — юрист и регбист, Тимур — врач и турист, Юра — физик и бегун.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Трое друзей, болельщиков автогонок "Формула-1", спорили о результатах предстоящего этапа гонок.

— Вот увидишь, Шумахер не придет первым, — сказал Джон. Первым будет Хилл.

— Да нет же, победителем будет, как всегда, Шумахер, — воскликнул Ник. — А об Алези и говорить нечего, ему не быть первым.

Питер, к которому обратился Ник, возмутился:

— Хиллу не видать первого места, а вот Алези пилотирует самую мощную машину.

По завершении этапа гонок оказалось, что каждое из двух предположений двоих друзей подтвердилось, а оба предположения третьего из друзей оказались неверны. Кто выиграл этап гонки?

Задача 2. В спортивных соревнованиях принимали участие пять команд: "Вымпел", "Метеор", "Нептун", "Старт" и "Чайка". Об их итогах соревнования имеется пять высказываний:

1) Второе место занял "Вымпел", а "Старт" оказался на третьем.
2) Хорошо выступала команда "Нептун", она стала победителем, а "Чайка" вышла на второе место.
3) Да нет же, "Чайка" заняла только третье место, а "Нептун"- был последним.
4) Первое место по праву завоевал "Старт", а "Метеор" был 4-м.
5) Да, "Метеор", действительно, был четвертым, а "Вымпел" был 2-м.

Известно, что команды не делили места между собой и что в каждом высказывании одно утверждение правильное, а другое нет.

Как распределились места между командами?

Задача 3 Три дочери писательницы Дорис Кей — Джуди, Айрис и Линда, тоже очень талантливы. Они приобрели известность в разных видах искусств — пении, балете и кино. Все они живут в разных городах, поэтому Дорис часто звонит им в Париж, Рим и Чикаго.

Известно, что:

Джуди живет не в Париже, а Линда — не в Риме;

парижанка не снимается в кино;

та, кто живет в Риме, певица;

Линда равнодушна к балету.

Где живет Айрис, и какова ее профессия?

Логические операции «И», «ИЛИ», «НЕ» лежат в основе работы преобразователей информации любого компьютера

Клод Шеннон
(1916 г.)

американский математик, доказал применимость булевой алгебры в теории контактных и релейно-контактных схем (в 1938 году)

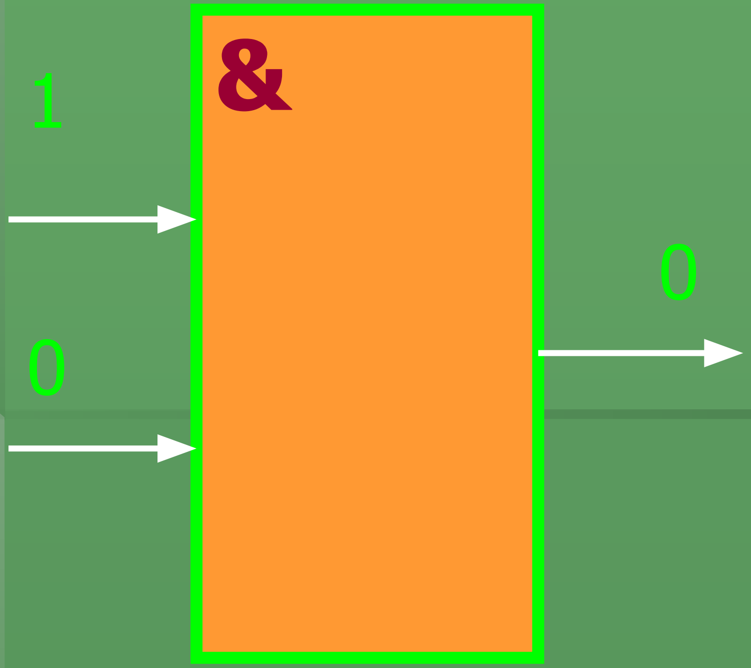
Логический элемент компьютера

— это часть электронной логической схемы, которая реализует элементарную логическую функцию.

- Логическими элементами компьютеров являются электронные схемы И, ИЛИ, НЕ, И—НЕ, ИЛИ—НЕ и другие (называемые также вентилями), а также триггер.
- С помощью этих схем можно реализовать любую логическую функцию, описывающую работу устройств компьютера. Обычно у вентилей бывает от двух до восьми входов и один или два выхода.
- Чтобы представить два логических состояния — “1” и “0” в вентилях, соответствующие им входные и выходные сигналы имеют один из двух установленных уровней напряжения. Например, +5 вольт и 0 вольт.
- Высокий уровень обычно соответствует значению “истина” (“1”), а низкий — значению “ложь” (“0”).
- Каждый логический элемент имеет свое условное обозначение, которое выражает его логическую функцию, но не указывает на то, какая именно электронная схема в нем реализована. Это упрощает запись и понимание сложных логических схем.
- Работу логических элементов описывают с помощью таблиц истинности.

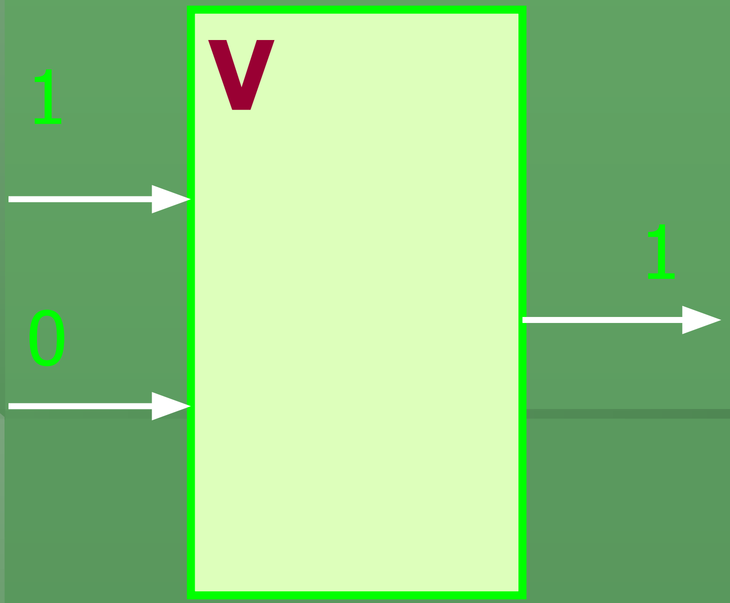
Таблица истинности это табличное представление логической схемы (операции), в котором перечислены все возможные сочетания значений истинности входных сигналов (операндов) вместе со значением истинности выходного сигнала (результата операции) для каждого из этих сочетаний.

Коньюнктор



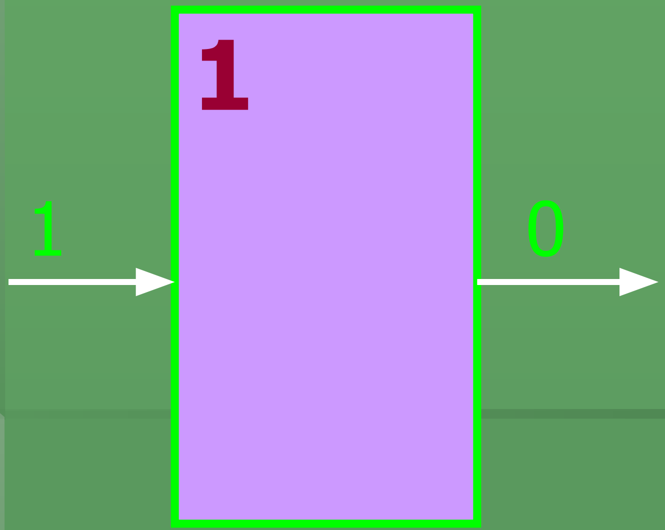
Логический элемент «**И**», преобразует входные сигналы и выдает результат логического умножения

Дизъюнктор

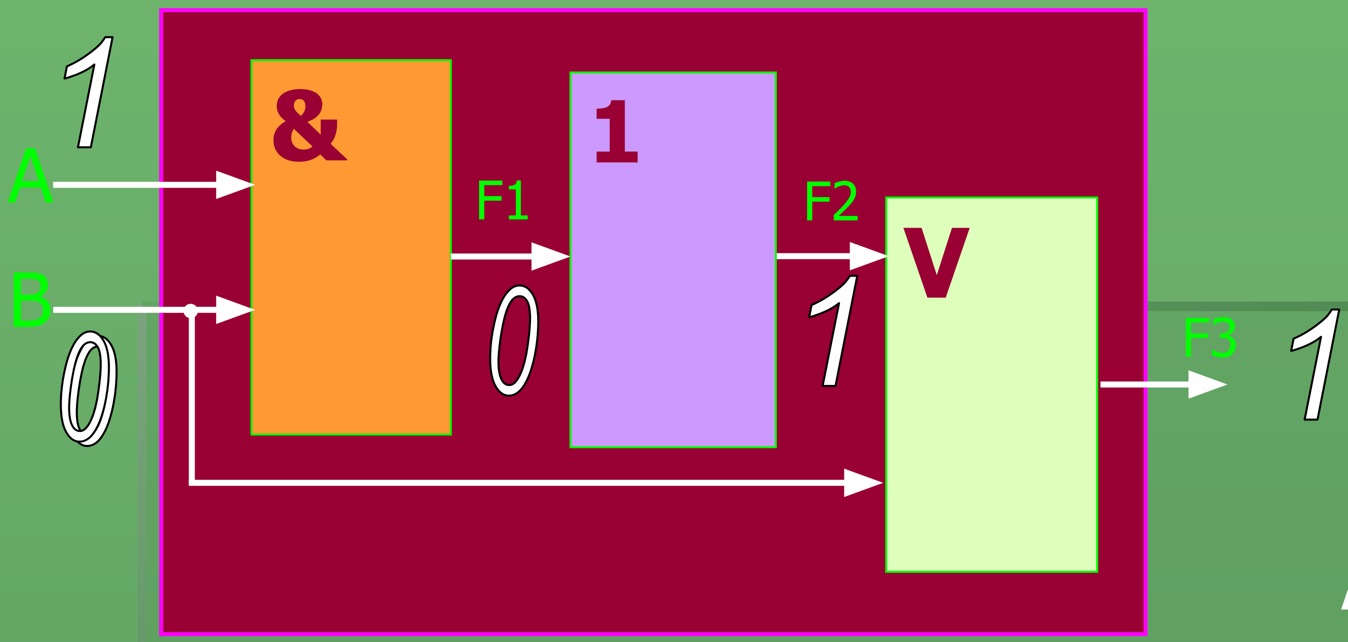


- Логический элемент «**ИЛИ**», преобразует входные сигналы и выдает результат логического сложения.

Инвертор



Логический элемент «**НЕ**». Преобразует входной сигнал и выдает результат логического отрицания.



$\overline{A \& B} \vee B$

Функциональная схема логического устройства

Структурная формула ЛУ

Зная функциональную схему, можно составить структурную формулу данного ЛУ.

Анализируя структурную формулу, можно создать функциональную схему и понять, как работает данное ЛУ.

Контрольные вопросы

- Какие логические операции лежат в основе преобразователей информации в ПК?
- Как называются логические элементы ПК?
- Что такое структурная формула?
- Что можно увидеть на функциональной схеме?
- Какие устройства ПК построены на логических элементах?
- Какие основные операции выполняет центральный процессор?
- Как «работает» память ПК?

Не знаете? тогда идем дальше!

Логические устройства ПК

Так как все многообразие операций в ПК сводится к сложению двоичных чисел, то главной частью процессора (АЛУ) является сумматор.

Рассмотрим сложение одноразрядных двоичных чисел:

Слагаемые		Перенос	Сумма
A	B	P	S
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

Слагаемые		Перенос	Сумма
A	B	P	S
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

P = A & B

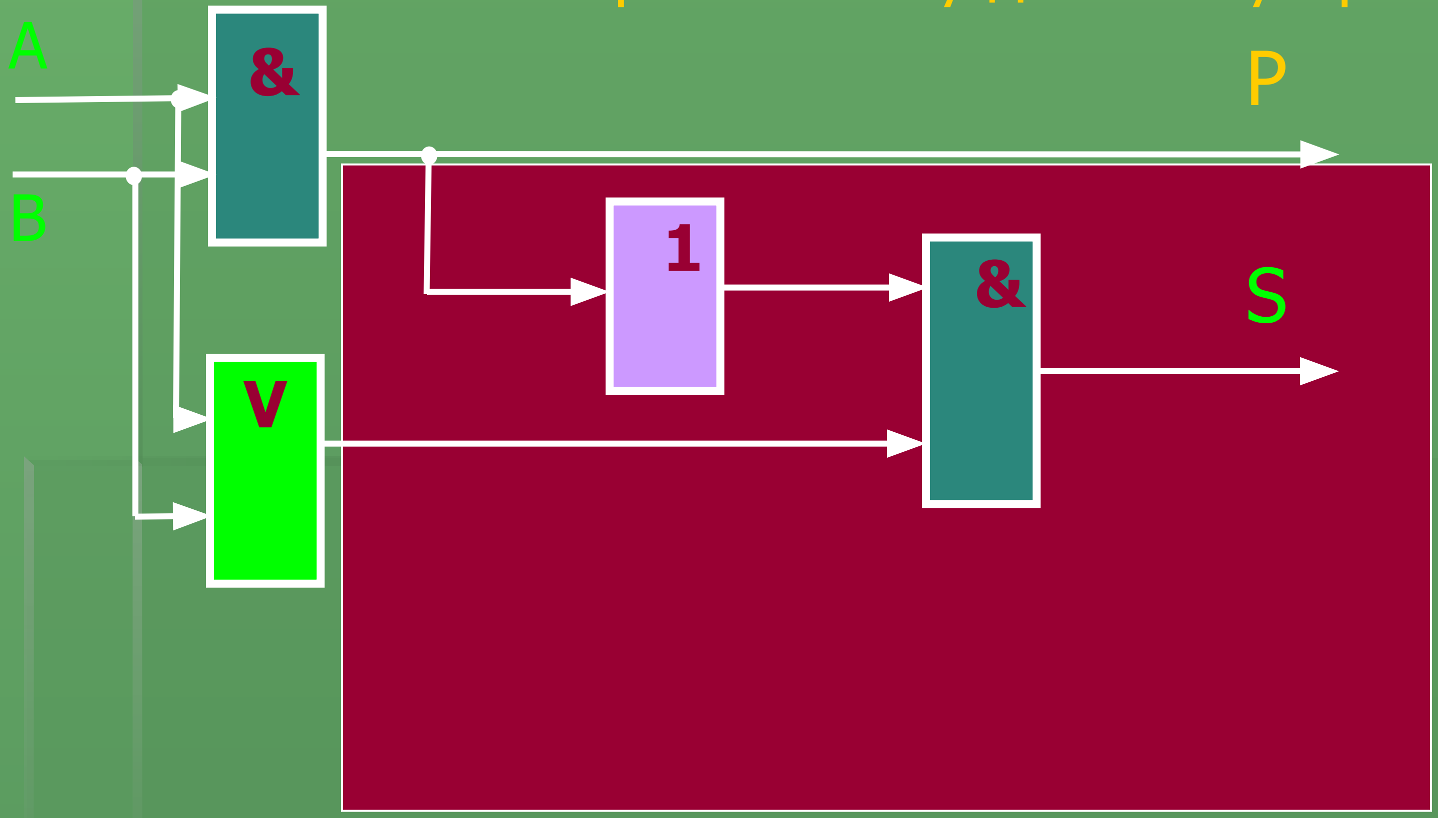
$$S=\underbrace{(A \vee B)}_{1}\ \underbrace{\&}_{4}\ \overset{3}{\overline{\underbrace{(A \,\&\, B)}_{2}}}$$

Докажем это, построив таблицу истинности для данного ЛВ

A	B	1	2	3	4
		A V B	A & B	NOT(2)	1 & 3
0	0	0	0	1	0
0	1	1	0	1	1
1	0	1	0	1	1
1	1	1	1	0	0

$P = A \,\&\, B$ $\qquad S = (A \vee B) \,\&\, (\overline{A \,\&\, B})$

Теперь, на основе полученных логических выражений, можно построить схему данного устройства



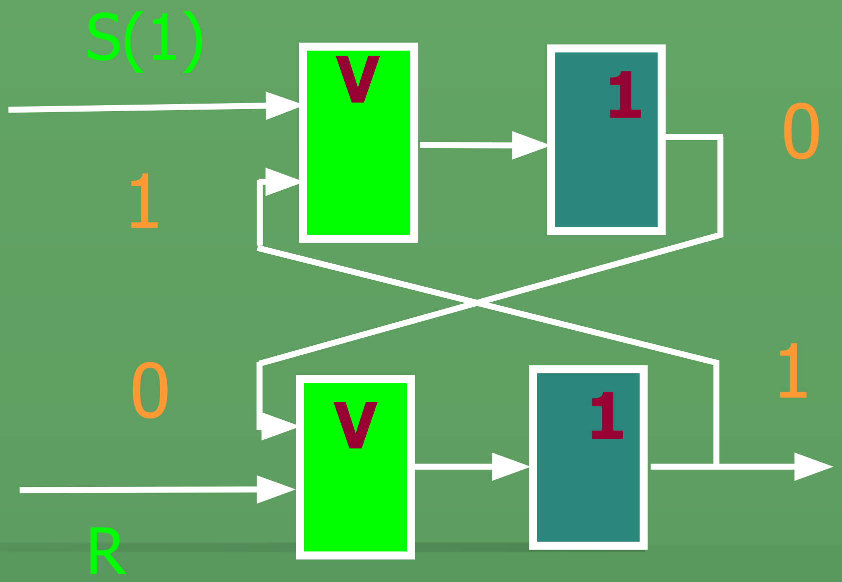
Данная схема называется полусумматором, так как суммирует одноразрядные двоичные числа без учета переноса из младшего разряда.

Многоразрядный сумматор процессора состоит из полных одноразрядных сумматоров, причем выход (перенос) сумматора младшего разряда подключен ко входу сумматора старшего разряда.

Сумматор — это электронная логическая схема, выполняющая суммирование двоичных чисел.

Сумматор служит, прежде всего, центральным узлом арифметико-логического устройства компьютера.

Для хранения информации в ОП и регистрах ЦП применяется устройство ТРИГГЕР. Ячейка памяти состоит из 8, 16 или 32 триггеров, что и определяет разрядность ЦП. Триггер строится из двух элементов «ИЛИ» и двух элементов «НЕ».



В обычном состоянии на входы подан «0». Для записи на вход S подается «1». Он его будет хранить и даже после того, как сигнал на входе «S» исчезнет. Чтобы сбросить информацию, подается «1» на вход R (Reset), после чего триггер возвращается к исходному «нулевому» состоянию.

Триггер

- Триггер — это электронная схема, широко применяемая в регистрах компьютера для надёжного запоминания одного разряда двоичного кода. Триггер имеет два устойчивых состояния, одно из которых соответствует двоичной единице, а другое — двоичному нулю.

- Термин триггер происходит от английского слова trigger — защёлка, спусковой крючок. Для обозначения этой схемы в английском языке чаще употребляется термин flip-flop, что в переводе означает "хлопанье". Это звукоподражательное название электронной схемы указывает на её способность почти мгновенно переходить ("перебрасываться") из одного электрического состояния в другое и наоборот.

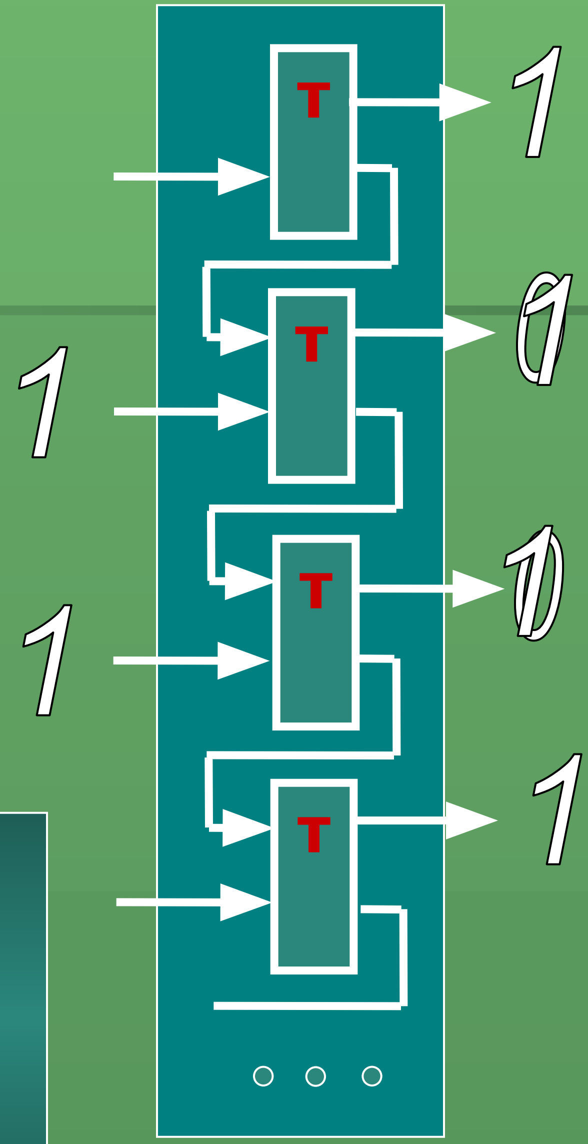
- Самый распространённый тип триггера — так называемый RS-триггер (S и R, соответственно, от английских set — установка, и reset — сброс).

- Несколько триггеров можно объединить в группы - регистры
и использовать в качестве запоминающих устройств (ЗУ).

- Если в регистр входит N триггеров, то при таком ЗУ можно запоминать N-разрядные двоичные слова.

- ОЗУ ЭВМ часто конструируется в виде набора регистров.

- Один регистр образует одну ячейку памяти, каждая из которых имеет свой номер



Таким образом, ЭВМ
состоит из огромного числа
Отдельных логических
элементов,
образующих все ее узлы и
память.