Линейная алгебра

Лекция 5

Векторы

План лекции

- Понятие n-мерного вектора
- Действия над векторами и их свойства
- Скалярное произведение векторов
- Длина вектора.
- Угол между векторами.
- Линейная комбинация векторов.
- Линейная независимость.

Пространство **n-мерных векторов.**

Множество столбцов вещественных чисел высоты **n:**

$$V = \left\{ X = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix},\ \alpha_1, \alpha_2, .., \alpha_n \in R \right\}$$

Действия над n-мерными векторами

Суммой двух векторов X и Y называется вектор, координаты которого равны сумме соответствующих координат исходных векторов, то есть:

$$X+Y=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \dots\\ \dots\\ \alpha_n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \dots\\ \dots\\ \beta_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_1+\beta_1\\ \alpha_2+\beta_2\\ \dots\\ \dots\\ \alpha_n+\beta_n\end{pmatrix}$$

Действия над n-мерными векторами

Произведением числа λ и вектора X называется вектор, координаты которого равны соответствующим координатам вектора, умноженным на λ, то есть:

$$\lambda X = \lambda \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\alpha_1 \\ \lambda\alpha_2 \\ \dots \\ \dots \\ \lambda\alpha_n \end{pmatrix}$$

n-мерное координатное пространство

Множество V n-мерных векторов вместе с введенными выше операциями сложения векторов и умножения вектора на число называется n-мерным координатным пространством. Обозначение: R^n

Свойства операций над векторами

1. $X+Y=Y+X$
2. $(X+Y)+Z=X+(Y+Z)$
3. $X+0=X$
4. $X+(-X)=0$
5. $(\lambda+\mu)X= \lambda X+\mu X$
6. $\lambda(X+Y)= \lambda X+ \lambda Y$
7. $(\lambda \mu)X= \lambda (\mu X)$
8. $1 \cdot X=X$

Скалярное произведение

Скалярным произведением векторов

$$X = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \dots \\ \dots \\ \beta_n \end{pmatrix}$$

называется число

$$(X, Y) = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \dots + \alpha_n\beta_n$$

Свойства скалярного произведения

1. $(X,Y)=(Y,X)$
2. $(\lambda X,Y)= \lambda(X,Y)$
3. $(X+Y,Z)=(X,Z)+(Y,Z)$
4. $(X,X)\geq 0$, причем $(X,X)=0$ тогда и только тогда, когда $X=0$.

Длина вектора

Длиной (нормой) вектора $X = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$

называется число

$$\| X \| = \sqrt{\alpha_1{}^2 + \alpha_2{}^2 + \ldots + \alpha_n{}^2}$$

Угол между векторами

Угол между векторами $X = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \dots \\ \dots \\ \beta_n \end{pmatrix}$

$$\cos(X \,\hat{}\, Y) = \frac{(X,Y)}{\|X\| \cdot \|Y\|} = \frac{\alpha_1\beta_1 + \dots + \alpha_n\beta_n}{\sqrt{\alpha_1{}^2 + \dots + \alpha_n{}^2}\sqrt{\beta_1{}^2 + \dots + \beta_n{}^2}}$$

Для ортогональных векторов (X,Y)=0.

Линейная комбинация векторов. Определение

Линейной комбинацией векторов $e_1, e_{2,} ...e_k \in R^n$

называют вектор

$$x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + ... + \lambda_k e_k$$

при некоторых коэффициентах $\lambda_1,\ \lambda_2,\ ...,\ \lambda_k \in R$

Линейная зависимость и линейная независимость векторов

Определение

Совокупность векторов $e_1, e_2, \ldots e_k \in R^n$ называется линейно зависимой (ЛЗС), если найдутся числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in R$, не равные нулю одновременно, такие, что выполняется равенство:

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_k e_k = O \in R^n$$

В противном случае совокупность $e_1, e_2, \ldots e_k \in R^n$ называется линейно независимой (ЛНС).

Линейная зависимость. Пример

Показать, что система столбцов $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix} \in R^3$

линейно зависима.

Действительно,

$$\lambda_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+\lambda_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}+\lambda_4\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases}\lambda_1-\lambda_4 = 0\\ \lambda_2-\lambda_4 = 0\\ \lambda_3 = 0\end{cases}$$

Очевидно, что полученная СЛУ имеет нетривиальные решения.

Критерии линейной зависимости

1. Система векторов $X_1,\ldots,X_m$ линейно зависима тогда и только тогда, когда хотя бы один вектор системы линейно выражается через остальные.
2. Система n-мерных векторов $X_1,\ldots,X_n$ линейно зависима тогда и только тогда, когда определитель, строками (столбцами) которого являются компоненты векторов системы равен нулю.

Следствие:

Если система содержит нулевой элемент или линейно зависимую подсистему, то она линейно зависима.