

Линейная алгебра

Лекция 3

Системы линейных уравнений

План лекции

- Система линейных алгебраических уравнений
- Совместность, определенность и равносильность систем
- Методы решения систем:
 - *Метод Крамера;*
 - *Метод обратной матрицы;*
 - *Метод Гаусса.*
- Количество решений системы
- Случай однородных систем

Системы линейных уравнений (СЛУ)

Под системой линейных уравнений (СЛУ) будем понимать:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \right.$$

где $x_1, x_2, \dots, x_n$ – «неизвестные» системы,
 $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{mn}, b_1, \dots, b_m \in R$ – коэффициенты системы,
 m – число уравнений, n – число неизвестных.

Матричная запись СЛУ

$$A \cdot X = B$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

А – матрица коэффициентов СЛУ,
В – столбец свободных членов,
Х – столбец неизвестных.

Решение СЛУ

Решением СЛУ называется совокупность чисел

$$x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0 \in R \quad ,$$

удовлетворяющая всем уравнениям системы, т.е.
обращающая их в верные числовые равенства:

[illegible]

Матричная запись решения СЛУ

$$X_0 = \begin{pmatrix} x_{01} \\ x_{02} \\ \dots \\ x_{0n} \end{pmatrix} \in R^n : \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{01} \\ x_{02} \\ \dots \\ x_{0n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix},$$

$$A \cdot X_0 = B$$

$$x_{01} \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + x_{02} \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{n2} \end{pmatrix} + \dots + x_{0n} \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{nm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Типы СЛУ

СЛУ называется совместной, если у неё имеется хотя бы одно решение, в противном случае СЛУ называется несовместной.

Совместная СЛУ называется определённой, если она имеет одно единственное решение и неопределённой в противном случае.

Две системы называются равносильными, если их множества решений совпадают.

СЛАУ $A \cdot X = B$ называется однородной, если $B = 0$, в противном случае СЛУ называется неоднородной.

Расширенная матрица СЛУ

Вся информация о СЛУ $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}$ содержится в расширенной матрице системы:

$$A_1 = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

Совместная СЛУ

Пусть дана совместная определенная СЛАУ от n неизвестных.

Тогда:

если система однородна, то она имеет только **тривиальное** решение $x_i = 0, i=1, \dots, n$;

если система не однородна, то она имеет **единственное** решение, которое может быть найдено

- по правилу Крамера,
- методом обратной матрицы,
- методом Гаусса.

Правило Крамера решения СЛУ

Пусть дана совместная СЛУ от n неизвестных

$$A \cdot X = B, \det(A) = \Delta \neq 0.$$

Тогда система имеет единственное решение

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, i = 1, 2, \dots, n,$$

где Δ_i – определитель, получаемый из определителя Δ заменой i -го столбца на столбец свободных членов.

Правило Крамера. Пример 1

Найти решение СЛУ

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 2 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 3 \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 9 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 45 + 4 - (6 - 12 - 5) = 62 \neq 0 ,$$

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & -1 \\ 9 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 62 , \quad \Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & -1 \\ 2 & 9 & 2 \end{vmatrix} = 62 , \quad \Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 9 \end{vmatrix} = 62 .$$

Следовательно, $x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta} = 1, \quad x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta} = 1, \quad x_3 = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta} = 1 .$

Метод обратной матрицы решения СЛУ

Пусть дана совместная СЛАУ от n неизвестных

$$A \cdot X = B, \det(A) = \Delta \neq 0.$$

Тогда существует A^{-1} и

$$X = A^{-1} \cdot B$$

(т.к. $A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$).

Пример (тот же).

$$\Delta = 62 \neq 0, A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & 2 \end{pmatrix}, A^{-1} = \frac{1}{62} \begin{pmatrix} 7 & 19 & -1 \\ -8 & -4 & 10 \\ 13 & -9 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{62} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 19 & -1 \\ -8 & -4 & 10 \\ 13 & -9 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Метод Гаусса решения СЛУ

Суть метода состоит в последовательном исключении неизвестных: сначала исключается x_1 из всех уравнений системы, начиная со 2-го, далее исключается x_2 из всех уравнений, начиная с 3-го, и т. д., пока в последнем уравнении останется только x_n (прямой ход **схемы Гаусса**). Затем из последнего уравнения находится x_n , с помощью этого значения из предпоследнего уравнения вычисляется x_{n-1} и т. д., пока из 1-го уравнения не найдется x_1 (обратный ход **схемы Гаусса**).

Метод Гаусса решения СЛАУ. Пример

Пример (тот же):

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 2 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 3 \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 9 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 5 & 2 & 9 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{III}-2\text{I}]{\text{II}-3\text{I}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 7 & -10 & -3 \\ 0 & 9 & -4 & 5 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 7 & -10 & -3 \\ 0 & 0 & 62 & 62 \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 1 \end{array}$$

или

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 7 & -10 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 7 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

Алгоритм решения произвольной СЛУ

1. Приведем СЛУ к системе с матрицей A_1 трапециевидного (ступенчатого) вида:

а) полагая $a_{11} \neq 0$ исключим неизвестную переменную x_1 из всех уравнений системы, начиная со 2-го. Для этого

к 2-му уравнению прибавим 1-ое, умноженное на $-\frac{a_{21}}{a_{11}}$,

к 3-му уравнению прибавим 1-ое, умноженное на $-\frac{a_{31}}{a_{11}}$,
..... ,

к n-ому уравнению прибавим 1-ое, умноженное на $-\frac{a_{n1}}{a_{11}}$.

В результате преобразований система примет вид

[illegible]

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij} + a_{1j} \cdot \left(-\frac{a_{i1}}{a_{11}} \right), \quad i = 2, 3, \dots, n, \quad j = 2, 3, \dots, n$$

$$b_i^{(1)} = b_i + b_1 \cdot \left(-\frac{a_{i1}}{a_{11}} \right), \quad i = 2, \dots, n$$

б) полагая $a_{22}^{(1)} \neq 0$, исключим неизвестную переменную X_2

из всех уравнений системы, начиная с третьего. Для этого

к 3-му уравнению прибавим 2-ое, умноженное на $-\frac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}$,

к 4-му уравнению прибавим 2-ое, умноженное на $-\frac{a_{42}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}$,

..... ,

к n-ому уравнению прибавим 2-ое, умноженное на $-\frac{a_{n2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}$.

в) и т.д.

2. Укороченная система

2. Отбросив последние $n - r$ уравнений, запишем укороченную систему, равносильную исходной:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a^{(1)}_{22}x_2 + \dots + a^{(1)}_{2,n}x_n = b^{(1)}_2 \\ \\ a^{(r-1)}_{r,r}x_r + \dots + a^{(r-1)}_{r,n}x_n = b^{(r-1)}_r \end{array} \right.$$

3. Свободные и базисные неизвестные

3. Назовем неизвестные $x_1, x_2, \dots, x_r$ базисными,

$$X_{r+1}, X_{r+2}, \dots, X_n - \underline{\text{свободными.}}$$

Запишем укороченную систему в виде

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1,r}x_r = b_1 \\ \phantom{a_{11}x_1 +} a_{22}^{(1)}x_2 + \dots + a_{2,r}^{(1)}x_r = b_2^{(1)} \\ \dots\dots\dots \\ \phantom{a_{11}x_1 +} \phantom{a_{22}^{(1)}x_2 +} a_{r,r}^{(r-1)}x_r = b_r^{(r-1)} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} - a_{1,r+1}x_{r+1} - a_{1,n}x_n \\ - a_{2,r+1}^{(1)}x_{r+1} - a_{2,n}^{(1)}x_n \\ \dots\dots\dots \\ - a_{r,r+1}^{(r-1)}x_{r+1} - a_{r,n}^{(r-1)}x_n \end{array}$$

4. Общее решение СЛУ

4. Для каждого набора свободных неизвестных

$$x_{r+1} = c_1, \quad x_{r+2} = c_2, \quad \dots, \quad x_n = c_{n-r}$$

укороченная система имеет единственное решение:

$$X(c_1, c_2, \dots, c_{n-r}) = \begin{pmatrix} x_1(c_1, c_2, \dots, c_{n-r}) \\ \vdots \\ x_r(c_1, c_2, \dots, c_{n-r}) \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{n-r} \end{pmatrix}$$

называемое общим решением исходной СЛУ.

Общее решение СЛУ. Пример 2

Найти общее решение СЛУ

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ -2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 0 \end{cases}$$

$$A_1 = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & 0 \\ -2 & 4 & 6 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Положим $x_3 = c_1$, $x_2 = c_2$.

Укороченная система имеет вид $x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 0$,

откуда $x_1 = 2c_2 + 3c_1$.

Общее решение $X(c_1, c_2) = \begin{pmatrix} 2c_2 + 3c_1 \\ c_2 \\ c_1 \end{pmatrix}, \quad c_1, c_2 \in R$.

Теорема о числе решений СЛУ

Пусть дана совместная СЛУ от n неизвестных с матрицей коэффициентов, которая при приведении к ступенчатому виду имеет r ненулевых строк.

Тогда:

1. если $r = n$, то система имеет единственное решение;
2. если $r < n$, то система имеет бесконечно много решений, причем $(n - r)$ неизвестным можно присвоить произвольные значения, а остальные r неизвестных выражаются через них единственным образом.

Следствия из теоремы о числе решений СЛУ

Система n линейных уравнений с n неизвестными имеет единственное решение тогда и только тогда, когда матрица коэффициентов системы **невырожденная**.

Однородная система $A \cdot X = 0$ всегда совместна, т.к. имеет **тривиальное решение** $X = 0$. Для существования нетривиального решения однородной системы необходимо и достаточно, чтобы выполнялось $r < n$.

Фундаментальное множество решений однородной СЛУ

Общее решение однородной системы имеет вид

$$X = c_1 E_1 + c_2 E_2 + \dots + c_{n-r} E_{n-r},$$

где $c_1, c_2, \dots, c_{n-r}$ – произвольные постоянные.

Фундаментальное множество решений

$$\{E_1, E_2, \dots, E_{n-r}\}$$

может быть получено из общего решения, если свободным неизвестным придавать поочередно значение 1, полагая остальные равными 0.

Фундаментальное множество решений однородной СЛУ. Пример 2 (продолжение)

Найти фундаментальное множество решений СЛУ

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ -2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 0 \end{cases}$$

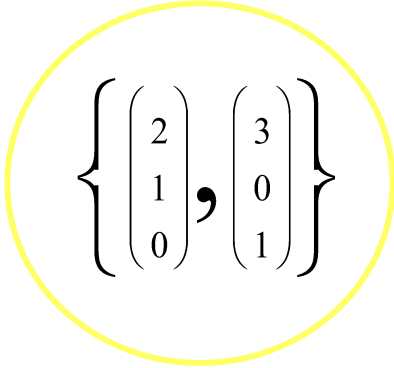
Общее решение $X = \begin{pmatrix} 3c_2 + 2c_1 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

При $c_1=1, c_2=0$ $E_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, при $c_2=1, c_1=0$ $E_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Пример 2 (продолжение)

Общее решение системы может быть записано так:

$$X = c_1 E_1 + c_2 E_2 = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, c_1, c_2 \in R$$


$$\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

- фундаментальное множество решений исходной СЛУ.

Структура общего решения неоднородной СЛУ

Общее решение неоднородной системы $A \cdot X = B$ может быть найдено как сумма общего решения соответствующей однородной системы $A \cdot X = 0$ и произвольного частного решения неоднородной системы.

$$X = X_{\text{одн}} + \tilde{X}_{\text{неодн}}$$

Структура множества решений неоднородной СЛУ. Пример 3

Найти множество решений СЛУ

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1 \end{cases}$$

$$A_1 = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 2 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -4 & -1 & -2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Укороченная система имеет вид
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 1 \\ x_2 - 4x_3 - x_4 = -2 \end{cases}$$

$n-r = 2$. Полагаем $x_3 = c_1$, $x_4 = c_2$, тогда

$$x_2 = -2 + 4c_1 + c_2$$

$$x_1 = 1 + 2 - 4c_1 - c_2 - 2c_1 - c_2 = 3 - 6c_1 - 2c_2$$

Пример 3 (продолжение)

Общее решение

$$X = \begin{pmatrix} 3 - 6c_1 - 2c_2 \\ -2 + 4c_1 + c_2 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

общее решение
однородной СЛУ

частное решение
неоднородной СЛУ