Линейная алгебра

Лекция 1
Введение

Контакты

Лектор:

Фаизова Анна Андреевна,

ассистент каф. Управления рисками и страхования

a.faizova@spbu.ru

faizova.anna@gmail.com

ОСНОВНЫЕ РАЗДЕЛЫ КУРСА

- Матрицы. Определители. Обратные матрицы
- Системы линейных уравнений
- Векторы
- Базисы и размерность
- Примеры экономических приложений

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

Основная

- З.И.Боревич. Определители и матрицы. М.2004.
- Н.Ш.Кремер. Высшая математика для экономистов. Москва. 1997.
- Д.К.Фаддеев. Лекции по алгебре.Наука. М.1984.
- Учебные и контрольные задания по математике (высшая алгебра). Изд. ЭСФ СПбГУ. 2005.

Дополнительная

- Н.А.Вавилов, В.Г.Халин. «MATHEMATICA 5.* для нематематика.» Выпуски 1 и 2. СПб.:

КОНТРОЛЬ ЗНАНИЙ И НАВЫКОВ

1. Письменные контрольные работы (1 и 2).
2. Индивидуальные контрольные задания.

ЭКЗАМЕН

- Теоретическая часть: знание всех определений и формулировок;
- Практическая часть: навыки решения задач, предусмотренных программой.

Использование пособий, учебников, конспектов и технических устройств не допускается.

КРИТЕРИИ ОЦЕНКИ

- Экзамен письменный. 10 заданий: 5 теоретических вопросов и 5 задач. Каждый оценивается из 7 баллов - итого 70 баллов
- Правильное выполнение индивидуальных
3 контрольных заданий –10 баллов (5 работ по 2 балла каждая)
- Письменные контрольные работы – 20 баллов (по 10 баллов каждая)

Дополнительно:

Активность на практических занятиях, решение задач повышенной сложности, выполнение домашних заданий

ШКАЛА ОЦЕНОК

«отлично» (A) – 90-100 баллов,

«очень хорошо» (B) – 80-89 баллов,

«хорошо» (C) – 70-79 баллов,

«удовлетворительно» (D) –60-69 баллов,

«посредственно» (E) – 50-59 баллов,

«неудовлетворительно» (F) – менее 50 баллов

Линейная алгебра

Лекция 1

Матрицы. Действия над матрицами

ПЛАН ЛЕКЦИИ

- Матрицы.
- Матрицы специального вида.
- Операции над матрицами:

  сложение матриц;

  умножение матрицы на число;

  умножение матриц;

  транспонирование матриц.
- Свойства операций над матрицами.

МАТРИЦЫ. Пример.

Определение

Матрицей размера m x n называется прямоугольная таблица из чисел a_{ij} (элементов матрицы), $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Обозначения:

$$A = \left(a_{ij}\right)$$

$$A = \left\{a_{ij}\right\}$$

Примеры

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -1{,}2 & 2{,}25 & 0{,}5 \\ 30 & -6{,}7 & 2 \\ 0{,}4 & 0{,}22 & -1 \end{pmatrix}; \; C = \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ -2 \\ 3{,}3 \end{pmatrix}; \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

КВАДРАТНАЯ МАТРИЦА

Определение

Если число столбцов матрицы равно числу строк (m=n), то матрица называется **квадратной**.

Примеры.

$$B = \begin{pmatrix} -1,2 & 2,25 & 0,5 \\ 30 & -6,7 & 2 \\ 0,4 & 0,22 & -1 \end{pmatrix}; \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ТРЕУГОЛЬНАЯ МАТРИЦА

Определение

Пусть А – квадратная матрица.

Если $a_{ij} = 0$ для всех **i>j** либо для всех **i<j**,

то матрица называется **треугольной**.

В частности, матрица называется

верхнетреугольной, если $a_{ij} = 0$ для всех i>j,

и **нижнетреугольной**, если $a_{ij} = 0$ для всех i<j.

$$\begin{pmatrix} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & \bullet \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \bullet & 0 & 0 & 0 \\ \bullet & \bullet & 0 & 0 \\ \bullet & \bullet & \bullet & 0 \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \end{pmatrix}$$

ДИАГОНАЛЬНАЯ МАТРИЦА

Определение

Квадратная матрица вида

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

называется **диагональной**.

$$a_{ij} = 0, \quad i \neq j$$

ЕДИНИЧНАЯ МАТРИЦА

Для квадратных матриц определена единичная матрица порядка n – квадратная матрица nxn , все диагональные элементы которой равны единице, а остальные – нулю:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

СИММЕТРИЧЕСКАЯ МАТРИЦА

Определение.

Пусть А – квадратная матрица.

Если $a_{ij} = a_{ji}$, то матрица называется **симметрической**.

Примеры

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 6 \\ 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}; \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

СЛОЖЕНИЕ МАТРИЦ

Суммой $A+B$ матриц размера $m \times n$ $A=(a_{ij})$ и $B=(b_{ij})$ называется матрица $C=(c_{ij})$ того же размера, каждый элемент которой равен сумме соответственных элементов матриц A и B :

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \,, \qquad \begin{matrix} i = 1,2,\ldots,\ m \,, \\ j = 1,2,\ldots,\ n \,, \end{matrix}$$

Пример

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 6 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 0,5 \\ 0 & -7 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} ; \qquad A+B = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 0,5 \\ 3 & -1 & 4 \\ 8 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

УМНОЖЕНИЕ ЧИСЛА НА МАТРИЦУ

<u>Произведением</u> λA числа λ и матрицы $A = (a_{ij})$ называется матрица $B = (b_{ij})$, получающаяся из матрицы $\mathbf{A}$ умножением всех ее элементов на λ:

$$b_{ij} = \lambda a_{ij}, \qquad i = 1, 2, \ldots, m, \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

<u>Пример</u>

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 6 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad 3 \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 9 & 18 & 6 \\ 12 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

УМНОЖЕНИЕ МАТРИЦ

<u>Произведением</u> **AB** матрицы $A=\left(a_{ij}\right)$ размера mxn и матрицы $B=\left(b_{ij}\right)$ размера nxk называется матрица $C=\left(c_{ij}\right)$ размера mxk , элемент которой равен сумме произведений соответственных элементов i-ой строки матрицы **A** и j-го столбца матрицы **B** :

$$c_{ij}=\sum_{s=1}^{n} a_{is}b_{sj}\,, \qquad i=1,2,\ldots,m\,,\ j=1,2,\ldots,k.$$

<u>Пример</u>

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 2 & -1 & 2\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 3\\ 1 & 2\end{pmatrix};\qquad AB=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 6 & 3\end{pmatrix}$$

НЕКОММУТАТИВНОСТЬ УМНОЖЕНИЯ МАТРИЦ

Для матриц, вообще говоря, **AB ≠ BA**

Пример:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}; \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Если **AB = BA**, матрицы **A** и **B** называются **коммутирующими**.

СВОЙСТВА ОПЕРАЦИЙ НАД МАТРИЦАМИ

1) $A+B = B+A$
2) $(A+B)+C = A+(B+C)$
3) $\lambda(A+B) = \lambda A+\lambda B$
4) $A(B+C) = AB + AC$
5) $(A+B)C = AC + BC$
6) $\lambda(AB)=(\lambda A)B=A(\lambda B)$
7) $A(BC)=(AB)C$

СВОЙСТВО ЕДИНИЧНОЙ МАТРИЦЫ

Для любой квадратной матрицы $\mathbf{A}$ выполнено:

$$\mathbf{AE} = \mathbf{EA} = \mathbf{A}$$

Пример:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 7 & 2 \\ 2 & 9 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 7 & 2 \\ 2 & 9 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 7 & 2 \\ 2 & 9 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 7 & 2 \\ 2 & 9 & 4 \end{pmatrix}$$

ТРАНСПОНИРОВАНИЕ МАТРИЦ

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

A - матрица размера m x n

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

A'- матрица размера n x m , называется <u>транспонированной</u> для A

<u>Обозначения</u>: A', A^T.

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ОПЕРАЦИИ ТРАНСПОНИРОВАНИЯ МАТРИЦ

$$A'' = (A')' = A$$

$$(A \cdot B)' = B' \cdot A'$$