МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ МОСКОВСКОЙ ОБЛАСТИ
Государственное образовательное учреждение высшего образования Московской области
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ОБЛАСТНОЙ УНИВЕРСИТЕТ
(МГОУ)

Кафедра высшей алгебры, элементарной математики и методики преподавания математики

КУРСОВАЯ РАБОТА

по курсу «Элементарная математика»
тема: *«Решение задач с параметром, сводящихся к исследованию корней квадратного трехчлена»*

Выполнил студент:
11 группы 1 курса
очной формы обучения
физико-математического
факультета
Шаммаи Ирани Сюзанна
Маджидовна
Научный руководитель:
ст. преподаватель Высоцкая П.А.

Москва
2018

Цель работы: *изучение различных методов и приёмов решений задач с параметрами, сводящихся к исследованию корней квадратного трехчлена*

Задачи:

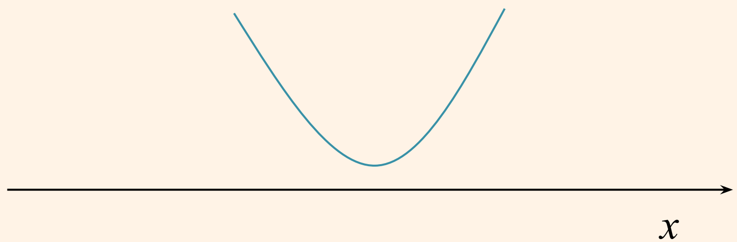
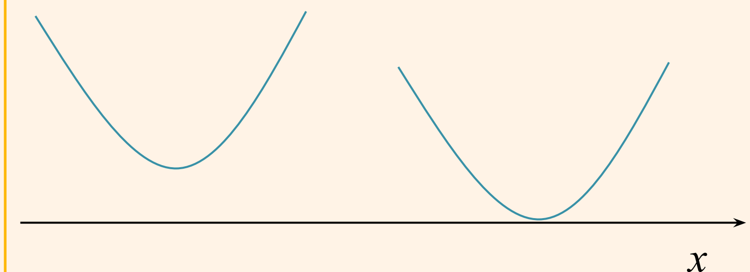
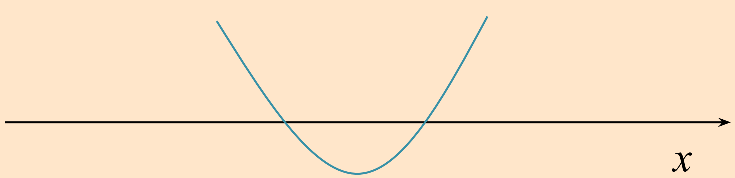
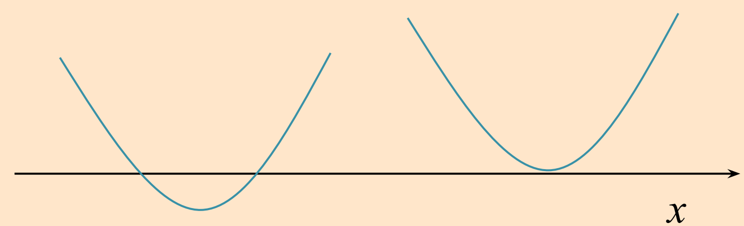
- *определить теоретические основы для решения задач по данной теме;*
- *выделить основные методы и приёмы решения задач с параметром, сводящихся к исследованию корней квадратного трехчлена;*
- *разработать набор упражнений, позволяющий рассмотреть различные методы решения задач данного типа.*

Исследование корней квадратного трехчлена с помощью дискриминанта

- $f(x) = ax^2 + bx + c$ - квадратный трехчлен, где $a \neq 0$
- $D = b^2 - 4ac$ - дискриминант
- Если $D>0$, то $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$
- Если $D = 0$, то $x = \dfrac{-b}{2a}$
- Если $D<0$, то уравнение не имеет действительных решений.

Исследование корней квадратного трехчлена с помощью дискриминанта

$$f(x) = x^2 + px + q$$

<u>Теорема 1</u> Для любого x, $f(x) > 0$, если $D < 0$  	**<u>Теорема 2</u>** Для любого x, $f(x) \geq 0$, если $D \leq 0$ 
<u>Теорема 3</u> $f(x) < 0$ имеет решение, если $D > 0$  	**<u>Теорема 4</u>** $f(x) \leq 0$ имеет решение, если $D \geq 0$ 

Пример 1. Найдите все значения параметра *p*, для каждого из которых квадратное уравнение $4x^2 - px + 1 = 0$:

а) имеет два различных корня;

б) не имеет корней;

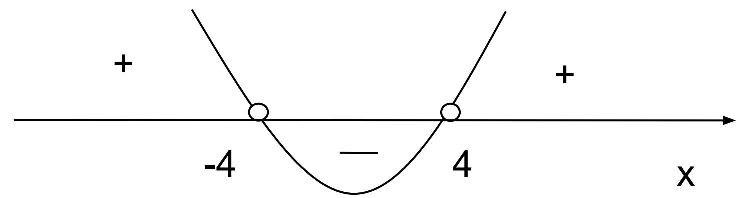
в) имеет один корень (два совпадающих). [3, стр.7]

Решение

1) $a = 4,\ b = -p,\ c = 1$

2) $D = b^2 - 4ac = (-p)^2 - 4\cdot 4 = p^2 - 16$

3) $f(p) = (p-4)(p+4)$



Ответ: а) $(-\infty; -4) \cup (4; +\infty)$; б) $(-4; 4)$; в) ± 4 .

Пример 2. Решите уравнение: $\frac{2x+1}{x-b}+\frac{2x}{b}=\frac{bx-2}{b^2-bx}$

относительно x. [3, стр. 15]

Решение $\frac{(2x+1)b+2x(x-b)+(bx-2)}{b(x-b)}=0$

$$\frac{2x^2+bx+b-2}{b(x-b)}=0$$

При $b\neq 0$ и $b\neq x$: $2x^2+bx+b-2=0$

$D = b^2-8(b-2)=b^2-8b+16=(b-4)^2\geq 0$

При $b=4$: $x=\frac{-4}{2\cdot 2}=-1$

При $b\neq 4$: $D>0$; $x_1=\frac{-b-(b-4)}{4}=\frac{2-b}{2}\neq b \Rightarrow b\neq\frac{2}{3}$, $x_2=\frac{-b-(b+4)}{4}=-1\neq b$

Ответ: $x=-1$ при $b\in\mathbb{R}\setminus\{-1;0\}$; $x=\frac{2-b}{2}$ при $b\in\mathbb{R}\setminus\left\{0;\frac{2}{3};4\right\}$.

Пример 3. В равностороннем треугольнике высота менее стороны на **m**. Найти сторону.

Решение

Сторона треугольника: x

Высота: $x - m$

По теореме Пифагора:

$AB^2 = BH^2 + AH^2$

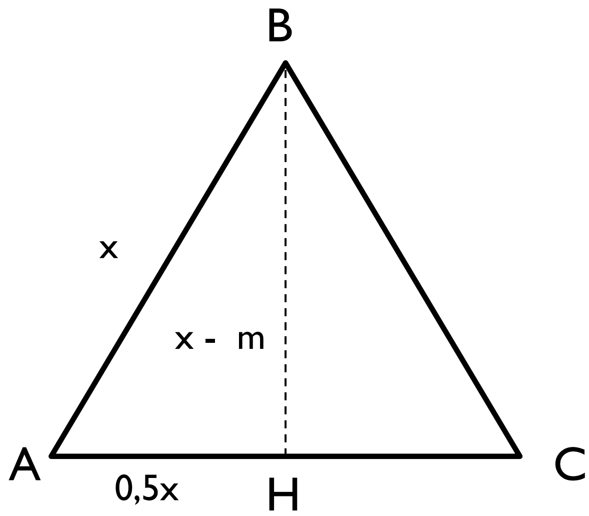
$x^2 = 0,25x^2 + x^2 - 2xm + m^2$

$x^2 - 8xm + 4m^2 = 0$

$D' = 16m^2 - 4m^2 = 12m^2$

$x = 4m \pm 2m\sqrt{3}$

Ответ: $4m \pm 2m\sqrt{3}$



Теорема Виета

- Теорема Виета: если x_1 и x_2 - корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, то
$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$
$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

- Теорема, обратная к теореме Виета: если квадратное уравнение имеет корни x_1 и x_2 такие, что $x_1 + x_2 = -p$ и $x_1 \cdot x_2 = q$, то уравнение может быть записано как $x^2 + px + q = 0$.

Пример 4. При каких значениях параметра k система

$$\begin{cases} 2x + y = k - 1, \\ 2xy = k^2 - 3k + 1, \\ 4x^2 + y^2 \le -k^2 + 5k - 4 \end{cases}$$

имеет решение? [9, стр.22]

Решение. По обратной теореме Виета из первых двух уравнений системы следует, что $2x$ и y – корни квадратного уравнения $z^2 + (1 - k)z + k^2 - 3k + 1 = 0$

Чтобы у этого уравнения существовали действительные корни, необходимо чтобы $D \ge 0$: $D = (1 - k)^2 - 4(k^2 - 3k + 1) \ge 0 \Rightarrow k \in \left[\frac{1}{3}; 3\right]$.

Заметим, что $4x^2 + y^2 = (2x + y)^2 - 4xy$, тогда третье неравенство системы имеет вид: $(k - 1)^2 - 2(k^2 - 3k + 1) \le -k^2 + 5k - 4 \Rightarrow k \ge 3$.

Из области определения подходит только $k = 3$.

Ответ: 3.

Пример 5. При каких значениях параметра p уравнение

$4^x + (p^2 + 5) \cdot 2^x - p^2 + 9 = 0$ не имеет решений? [9, стр.23]

Решение. Сделаем замену: $2^x = a > 0$. Получаем: $a^2 + (p^2 + 5)a - p^2 + 9 = 0$.

По теореме Виета: $a_1 + a_2 = -p^2 - 5 < 0$ при любом p, $a_1 \cdot a_2 = -p^2 + 9$.

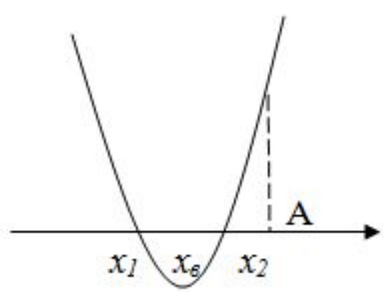
Если $p \in [-3; 3]$, то есть $-p^2 + 9 \geq 0$, то либо корней нет, либо они оба неположительные. В обоих случаях исходное уравнение не имеет решений.

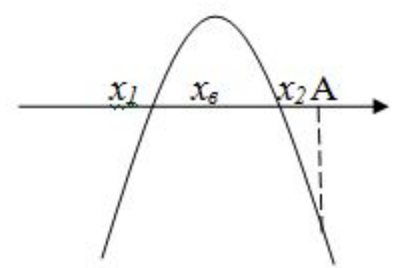
Если $p \notin [-3; 3]$, то $D = (p^2 + 5)^2 + 4(p^2 - 9)$, что больше нуля при любом значении p из данного промежутка. И по теореме Виета $a_1 \cdot a_2 = -p^2 + 9 < 0$, значит один из данных корней положительный, а другой отрицательный. При обратной замене $2^x = a$ положительный корень даст решение $x = \log_2 a$.

Ответ: $[-3; 3]$.

Расположение корней квадратного трехчлена

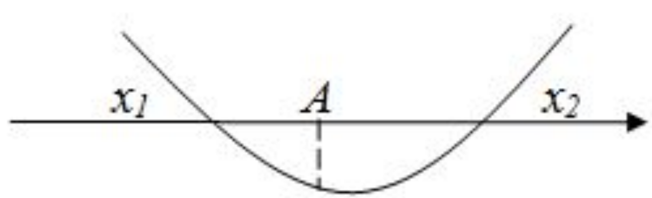
- Теорема 1. Корни квадратного трехчлена $f(x) = ax^2 + bx + c$ x_1 и x_2 (возможно, совпадающие) меньше числа A тогда и только тогда, когда $\begin{cases} x_в < A, \\ af(A) > 0 \end{cases}$

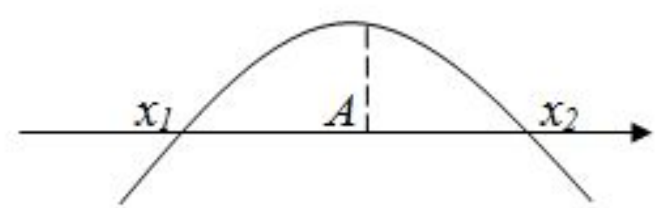




Расположение корней квадратного трехчлена

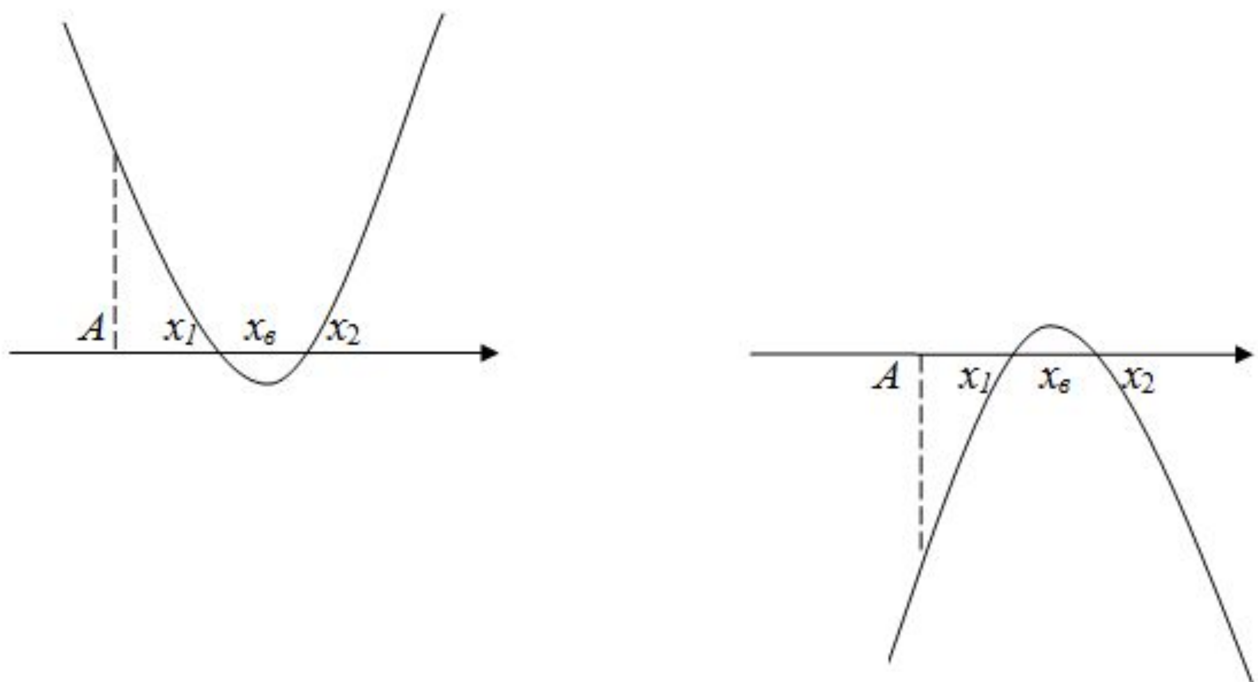
- Теорема 2. Число A расположено строго между корнями квадратного трехчлена $f(x) = ax^2 + bx + c$ тогда и только тогда, когда $a \cdot f(A) < 0$





Расположение корней квадратного трехчлена

- <u>Теорема 3.</u> Корни квадратного трехчлена $f(x) = ax^2 +$ $+bx + c$ x_1 и x_2 (возможно, совпадающие) больше числа A тогда и только тогда, когда $\begin{cases} af(A) > 0 \\ x_в > A \end{cases}$



Пример 6. Найдите все значения параметра q, при которых один корень уравнения $qx^4 - (q - 3)x^2 + 3q = 0$ меньше -2, а три остальные больше -1. [6, стр.16]

Решение. Сделаем замену: $x^2 = z$; $qz^2 - (q-3)z + 3q = 0$. Переформулируем условие задачи: найдите все значения параметра q, при которых один корень уравнения $qz^2 - (q-3)z + 3q = 0$ больше 4, а другой меньше 1, но не меньше 0.

Полученное уравнение должно иметь два различных действительных корня $\Rightarrow D > 0$ и $q \neq 0$, значит, его можно разделить на q: $z^2 - \frac{q-3}{q} z + 3 = 0$.

По теореме 3 из данного параграфа и следствию к ней: $f(1) < 0$, $f(4) < 0$, $f(0) > 0$. Заметим, что $f(0) = 3 \Rightarrow$ задача сводится к решению системы:

$$\begin{cases} 1 - \frac{q-3}{3} + 3 < 0 \\ 16 - \frac{4q-12}{3} + 3 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3q-3}{3} < 0 \\ \frac{15q-12}{3} < 0 \end{cases} \Rightarrow 0 < q < 0{,}8$$

Ответ: $0 < q < 0{,}8$.

Пример 7. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $1 + a\sin x = a^2 - (\sin x)^2$ имеет решение. [6, стр.14]

Решение. Заменим $\sin x$ на z и переформулируем условие задачи: найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $z^2 + az + 1 - a^2 = 0$ имеет хотя бы одно решение на отрезке $[-1; 1]$?

Рассмотрим граничные значения z: $z = -1 \Rightarrow a = 1$ или $a = -2$; $z = 1 \Rightarrow a = -1$ или $a = 2$. Возможно ещё два случая:

1) только один корень принадлежит интервалу от -1 до $1 \Rightarrow$ следствию к теореме из данного параграфа: $f(-1)\cdot f(1) < 0$, то есть $(1 - a + 1 - a^2)\cdot(1 + a + 1 - a^2) < 0 \Leftrightarrow (a + 1)(a + 2)(a - 1)(a - 2) < 0 \Rightarrow$ $a \in (-2; -1) \cup (1; 2)$;

2) оба корня уравнения принадлежат интервалу от -1 до $1 \Rightarrow$ по следствию к теореме из данного параграфа: $\begin{cases} 5a^2 - 4 \ge 0 \\ -1 < -0{,}5a < 1 \\ f(-1) > 0 \\ f(1) > 0 \end{cases}$

$\Rightarrow a \in \left(-1; -\frac{2}{\sqrt{5}}\right] \cup \left[\frac{2}{\sqrt{5}}; 1\right)$

Объединяя все возможные случаи, получаем: $a \in \left[-2; -\frac{2}{\sqrt{5}}\right] \cup \left[\frac{2}{\sqrt{5}}; 2\right]$

Ответ: $a \in \left[-2; -\frac{2}{\sqrt{5}}\right] \cup \left[\frac{2}{\sqrt{5}}; 2\right]$.

Заключение

- В данной курсовой работе были изучены теоремы о положении квадратичной функции и её корней, теорема Виета и обратная к ней теорема, а также было рассмотрено применение данных теорем к задачам с параметрами, сводящихся к исследованию корней квадратного трехчлена.
- Многие задачи с параметрами можно свести к исследованию корней квадратного трехчлена. Вычисление корней квадратного уравнения может вызвать технические трудности при решении задач с параметрами. Рассмотренные в данной работе теоремы позволяют решить эти задачи без прямого вычисления при помощи необходимых и достаточных условий.
- Необходимо выделить особое внимание решению задач с параметрами, сводящихся к исследованию корней квадратного трехчлена, поскольку с их помощью можно проверить теоретические знания основных разделов школьной математики и умение применить эти знания на практике, уровень математического и логического мышления, способность находить нестандартные решения и творчески подходить к заданию. Задачи с параметром, в том числе задачи, рассмотренные в данной работе, носят исследовательский характер и требуют уверенного владения теоретическим материалом. Они являются будущей моделью научной работы учащегося.

Литература и источники

- Алгебра. 8 класс: учеб. для общеобразоват. организаций / [Ю. Н. Макарычев, Н. Г. Миндюк, К. И. Нешков, С. Б. Суворова]; под ред. С. А. Теляковского. – М.: Просвещение, 2013. – 287 с.
- Амелькин В.В., Рябцевич В.А. Задачи с параметрами. – Минск: Издательство «Асар», 2004. – 464 с.
- Зевина Е.П. Решение квадратных уравнений с параметрами: методическое пособие. – Оренбург, 2015. – 28 с.
- Крамор В. С. Задачи с параметром и методы их решения / В. С. Крамор. – М. : ООО «Издательство Оникс» : ООО «Издательство Мир и Образование», 2007. – 416 с.
- Локоть В.В. Задачи с параметрами. Линейные и квадратные уравнения, неравенства, системы: Учебное пособие. – 2-е изд., испр. и доп. – М.: АРКТИ, 2005. – 96 с.
- Магомедов И.М. Квадратные уравнения с параметрами: методическое пособие. – Мегион, 2013 – 22 с.
- Маринин А.И. Исследование квадратного трехчлена: учебное пособие. – Н.Новгород, 2009. – 33 с.
- Прокофьев А.А. Задачи с параметрами. – М. : МИЭТ, 2004. – 258 с.
- Садовничий Ю.В. ЕГЭ 2017. Математика. Профильный уровень. Задание 18. Задачи с параметром / Ю. В. Садовничий. – М.: Издательство «Экзамен», 2017. – 126 с.
- Яковлев И.В. Параметры и квадратный трехчлен. – М., 2017. – 14 с.
- Ястрибинский Г.А. Уравнения и неравенства, содержащие параметр : пособие для учителей. – М.: Просвещение, 1972 – 126 с.
- Дрофеев Г.В. Квадратный трехчлен в задачах. – Львов: журнал «Квантор», 1991
- Безрукова О.Л. Задачи с параметрами, сводящиеся к исследованию расположения корней квадратного трехчлена [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://открытыйурок.рф/статьи/528319/
- Будников А.А. Задачи с параметрами. Простейшие задачи на квадратный трёхчлен [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://abudnikov.ru/ege/chast-2.2/zadachi-s-parametrami/kvadratnyie-uravneniya-s-parametrom.html
- Городецкий С.Е. Квадратные уравнения и неравенства с параметрами [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://phystech.academy/course/1222/2-kvadratnye-uravneniya-i-neravenstva-s-parametrom
- Гущин Д.Д. Задачи с параметром [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://ege.sdamgia.ru/problem?id=513278
- Задачи на расположение корней квадратного трехчлена [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://files.school-collection.edu.ru/dlrstore/504b6cb5-27bf-416c-ab23-cbe398559496/block2.htm
- Решение квадратных неравенств [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://uclg.ru/education/matematika/9_klass/neravenstva/lecture_lec_reshenie_kvadratnyih_neravenstv.html

Спасибо за внимание!