Государственное образовательное учреждение высшего образования Московской области
Московский государственный областной университет (МГОУ)

Физико-математический факультет

Кафедра высшей алгебры, элементарной математики и методики преподавания математики

Координатно-параметрический метод решения задач с параметром

студент: **Королева Мария Владимировна**
преподаватель: **старший преподаватель Высоцкая П.А.**

Москва, 2018

Содержание

Цели и задачи

Цель исследования:

1. Изучить координатно-параметрический метод решения задач с параметром;

2. Проклассифицировать задачи с параметром.

2. Систематизировать знания решения задач с параметром.

Для достижения цели следует выдвинуть следующие **задачи**:

1. Приобретение знаний и овладение различными умениями, навыками, приемами для решения параметрических заданий.

2. Освоение методов решения и исследование вычислительных и логических задач с параметрами.

Теоретическая часть

Дано $F(x, a) = 0$ (*), где $F(x, a)$ - функция переменной x и числового параметра a.

Рассмотрим два частных случая:

1. Координата x - функция параметра a: $x = f(a)$

На координатно-параметрической плоскости xOa с горизонтальной параметрической осью Oa множество всех точек, значения координаты x и параметра a каждой из которых удовлетворяют уравнению (*), представляет собой график функции, где роль аргумента функции играет параметр.

2. Параметр a - функция координаты x: $a = f(x)$

В этом случае можно рассматривать координатно-параметрическую плоскость aOx с вертикальной параметрической осью Oa и интерпретировать множество всех точек, значения координаты и параметры каждой из которых удовлетворяют уравнению (*), как график функции где роль аргумента функции играет координата.

Теоретическая часть

Метод областей при решении неравенств с параметром – это аналог метода интервалов для решения неравенств с одной переменной.

Пусть дано неравенство вида $P(x, a) > 0$. Сформулируем для данного вида **алгоритм решения** на основе координатно-параметрического метода:

1) Найти на координатно-параметрической плоскости ОДЗ (область допустимых значений переменной и параметра).

2) Построить на координатно-параметрической плоскости линии, состоящие из всех точек, при значениях координаты x и параметра a, в каждой из которых выражение $P(x,a)$ обращается в нуль или не существует.

3) Разбить этими линиями найденную ОДЗ на «частичные области».

4)Исследовать знак выражения $P(x,a)$ в каждой из полученных "частичных областей". Для этого достаточно установить знак выражении $P(x,a)$ в какой-нибудь точке в каждой из «частичных областей».

5) В ответ записываются те из "частичных областей", в которых выражение $P(x,a)$ положительно. Неравенство $P(x,a) < 0$ решается аналогично.

Практическая часть

§1 Рациональные алгебраические уравнения с параметрами

№1. Решить уравнение $2|x| + |x-1| = a$.

Решение: применяем метод “частичных областей”. Получаем совокупность, состоящую из трех систем:

I) $\begin{cases} x < 0 \\ -2x + 1 - x = a \end{cases}$ $\begin{cases} x < 0, \\ x = \frac{1-a}{3}; \end{cases}$ $\begin{cases} a > 1, \\ x = \frac{1-a}{3}; \end{cases}$

II) $\begin{cases} 0 \le x \le 1, \\ 2x + 1 - x = a; \end{cases}$ $\begin{cases} 0 \le x \le 1, \\ x = a - 1; \end{cases}$ $\begin{cases} 1 \le a \le 2, \\ x = a - 1; \end{cases}$

III) $\begin{cases} x > 1 \\ 2x + x - 1 = a \end{cases}$ $\begin{cases} x > 1, \\ x = \frac{a+1}{3}; \end{cases}$ $\begin{cases} a > 2, \\ x = \frac{a+1}{3}; \end{cases}$

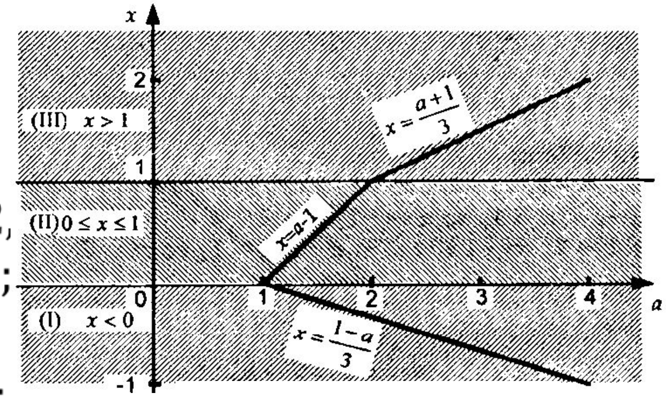

Рисунок 1[2, стр. 22]

На координатно-параметрической плоскости решением данного уравнения в I “частичной области”: x < 0 (полуплоскости) является луч $x = \frac{1-a}{3}$, во II области: $0 \le x \le 1$(полосе) - отрезок прямой $x = a-1$, в III области: x>1 (полуплоскости) - луч $x = \frac{a+1}{3}$.

Используя решение на координатно-параметрической плоскости, можно записать ответ, поставив в соответствие каждому значению параметра *a* значение *x* на полученной ломаной линии.

Ответ: a<1: $x \in \emptyset$; $1 \le a \le 2$: $\left\{x = \frac{1-a}{3}; x = a - 1\right\}$; a>2 : $\left\{x = \frac{1-a}{3}; x = \frac{a+1}{3}\right\}$.

Практическая часть

§2 Рациональные алгебраические неравенства с параметрами

№2. Найти все значения *a*, при которых система неравенств $\begin{cases} x^2+2x+a\le 0 \\ x^2-4x-6a\le 0 \end{cases}$ имеет единственное решение.

Решение: На координатно-параметрической плоскости *xOa* решением данной системы неравенств является пересечение множеств I и II. Множество I состоит из всех точек плоскости, расположенных на параболе $a = -x^2 - 2x$ (1) и левее ее, а множество II – из точек, расположенных на параболе $a = 1/6 \cdot (x^2-4x)$ (2) и правее ее.

Параболы (1) и (2) пересекаются в точках, для которых $x=0$, $a=0$ и $x=-8/7<-1$ и $a=48/49<1$.

В вершине *A* параболы (1) $x=-1$, $a=1$.

Точки *O* и *A* являются соответственно самой левой и самой правой точкой полученного множества решений системы неравенств.

Следовательно, при $a < 0$ и $a > 1$ данная система неравенств не имеет решений; при $a = 0$ и $a=1$ – имеет единственное решение; при $0 < a < 1$ – бесконечное множество решений.

Ответ: $a=0$, $a=1$.

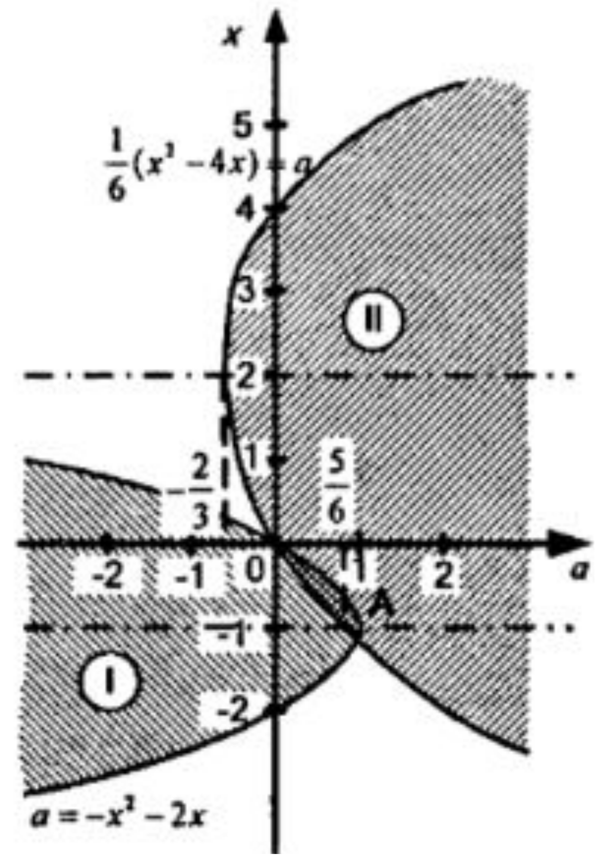

Рисунок 2 [2, стр. 81]

Практическая часть

§3 Иррациональные уравнения и неравенства с параметрами

№3. Решить неравенство $\sqrt{x^2 - a} < 1 - x$ для всех значений параметра a.

Решение: Составим систему:

$$\begin{cases} 1 - x \geq 0 \\ x^2 - a \geq 0 \\ x^2 - a < (1 - x)^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x \leq 1 \ (1) \\ a \ \leq \ x^2 \ (2) \\ x \ < \frac{1+a}{2} \ (3) \end{cases}$$

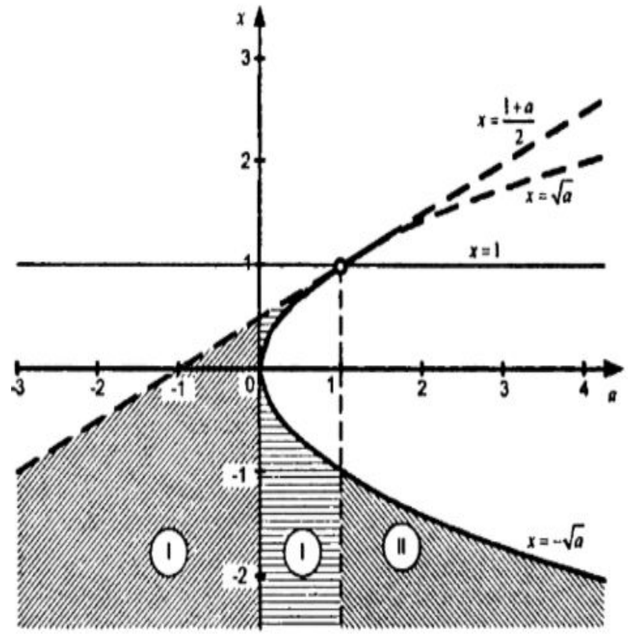

Рисунок 3 [2, стр. 126]

На координатно-параметрической плоскости xOa решением полученной системы является множество точек *(x, a)*, расположенных одновременно ниже прямой $x = 1$ и на ней, на параболе $a = x^2$ и левее ее, ниже прямой $x = \frac{1+a}{2}$.

Прямая $x = \frac{1+a}{2}$ касается параболы $a = x^2$ в точке с координатой и значением параметра, определяемого условием $\begin{cases} x = \frac{1+a}{2} \\ x^2 = a \end{cases}$

$$\begin{cases} x = \frac{1+a}{2} \\ (\frac{1+a}{2})^2 = a \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 1 \\ a = 1 \end{cases}$$

Уравнения верхней и нижней ветвей параболы $a = x^2$ имеет вид $x = \sqrt{a}$ и $x = -\sqrt{a}$.

На *Рисунке 3* множество решений заштриховано.

Ответ: Если $a \leq 0$, то $x < \frac{1+a}{2}$; если $0 < a < 1$, то $x \leq -\sqrt{a}$, $\sqrt{a} \leq x < \frac{1+a}{2}$; если $a \geq 1$, то $x \leq -\sqrt{a}$.

Практическая часть

§4 Показательные и логарифмические уравнения и неравенства с параметрами

№4. Решить неравенство $log_a(7 - x) > 2 \cdot \log_a(x - 1)$ для каждого допустимого значения a.

Решение: Составим систему, учитывая ОДЗ:

$$\begin{cases} 0 < a \neq 1 \\ 7 - x > 0 \\ x - 1 > 0 \\ \log_a(7 - x) > \log_a(x - 1)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 < a \neq 1 \\ 1 < x < 7 \\ (a - 1)\left((7 - x) - (x - 1)^2\right) > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 < a \neq 1 \\ 1 < x < 7 \\ (a - 1)(x - 3)(x + 2) < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 < a \neq 1 \\ 1 < x < 7 \\ (a - 1)(x - 3) < 0 \end{cases}$$

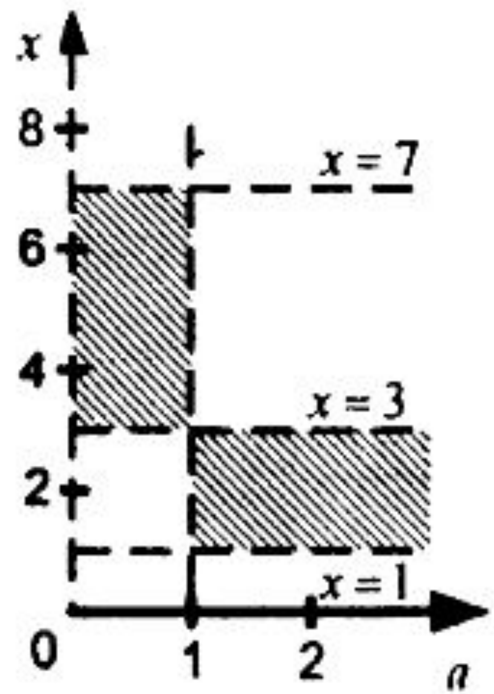

Рисунок 4 [2, стр. 171]

Построим на координатно-параметрической оси xOa множество всех точек, значения координаты x и параметра a каждой из которых удовлетворяют полученной системе (на *Рисунке 4* это множество заштриховано).

Ответ: Если $0 < a < 1$, то $3 < x < 7$; если $a > 1$, то $1 < x < 3$.

Практическая часть

§5 Тригонометрические уравнения и неравенства с параметрами

№5. При каких значениях параметра a уравнение $2\cos 2x - 4a\cos x + a^2 + 2 = 0$ не имеет действительных корней?

Решение: Вспомним, что $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$.

$4\cos^2 x - 2 - 4a \cdot \cos x + a^2 + 2 = 0;$

$4\cos^2 x - 4a \cdot \cos x + a^2 = 0;$

$$(2\cos x - a)^2 = 0;$$

$2\cos x = a.$

Полученное тригонометрическое уравнение не имеет действительных корней при всех значениях параметра $|a| > 2$.

На *Рисунке 5* изображено решение на координатно-параметрической плоскости aOx с вертикальной параметрической осью.

Ответ: $|a| > 2$.

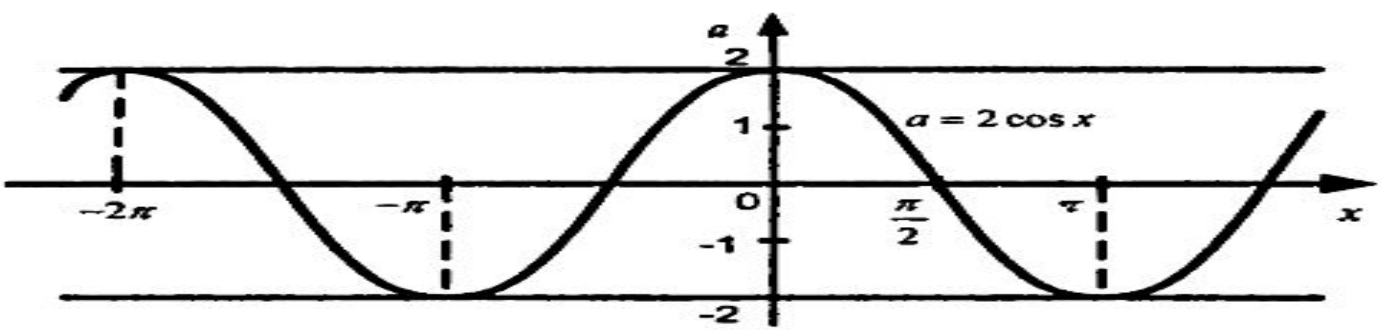

Рисунок 5 [2, стр. 213]

Заключение

В ходе проделанной работы был рассмотрен координатно-параметрический метод решения задач с параметрами. В результате были достигнуты цели и задачи: были проклассифицированы задачи, был определен алгоритм, при использовании которого можно решать подобные уравнения, было наглядно показано, что задачи с параметром можно решать несколькими методами.

Таким образом, можно сделать вывод, что данная тема требует внимания и дальнейшего развития, ведь является очень важной для разных областей науки и образования.

Список литературы

1. Шилкина О.В. Разноуровневый подход к обучению координатно-параметрическому методу решения задач с параметрами. - Вестник Таганрогского института имени А.П. Чехова, 2016. - с. 331-338.
2. Моденов В.П. Задачи с параметрами. Координатно-параметрический метод: учебное пособие. - М.: Экзамен, 2007. - 285 с.
3. Субханкулова С.А. Задачи с параметрами.— М.: Илекса, 2010.— 208 с.
4. Ляхова Н.Е., Яковенко И.В. Методы решения уравнений и неравенств в задачах с параметрами: учеб. пособие - ТГПИ им. Чехова, 2014. - 92 с.
5. Уравнения и неравенства, содержащие параметры: Пособие для учителей / Г.А. Ястребинецкий.- М.: Просвещение, 1977.- 128 с.
6. Мирошин В.В. Решение задач с параметрами. Теория и практика. - М.: Экзамен, 2009. - 286 с.
7. Просветов Г.И. Задачи с параметрами и методы их решения. - М.: Альфа-Пресс, 2010. - 48 с.
8. Шахмейстер А.Х. Задачи с параметрами на экзаменах. - 2012. - 248 с.
9. Садовничий Ю.В. ЕГЭ 2018. 100 баллов. Математика. Профильный уровень. Задачи с параметром. - М.: Учпедгиз, 2018. - 128 с.
10. Карасев В.А., Левшина Г.Д. Решение задач с параметрами с помощью графиков функций. - М.: Илекса. 2014. - 136 с.
11. Крамор В.С. Задачи с параметрами и методы их решения. - М.: Оникс, 2007. - 416 с.
12. Высоцкий В. С. Задачи с параметрами при подготовке к ЕГЭ. - М.: Научный мир, 2011. - 316 с.
13. Генденштейн Л.Э., Ершова А.П., Ершова А.С. Наглядный справочник по математике с примерами. Для абитуриентов, школьников, учителей.— М.: Илекса, 2009,— 192 с.
14. Локоть В.В. Задачи с параметрами. Применение свойств функций, преобразование неравенств. — М.: АРКТИ, 2010. — 64 с.
15. Прокофьев А.А. Задачи с параметрами. Учебное пособие. - М.: МИЭТ, 2004

Спасибо за внимание!