Научная работа

На тему:

РЕШЕНИЕ СТЕРЕОМЕТРИЧЕСКИХ
ЗАДАЧ МЕТОДОМ КООРДИНАТ

Куижев Евгений Олегович и Донских Валерий Валерьевич

МБОУ «Средняя образовательная школа №16 имени героя России гвардии майора Сергея Геннадьевича Таранца», 11 класс

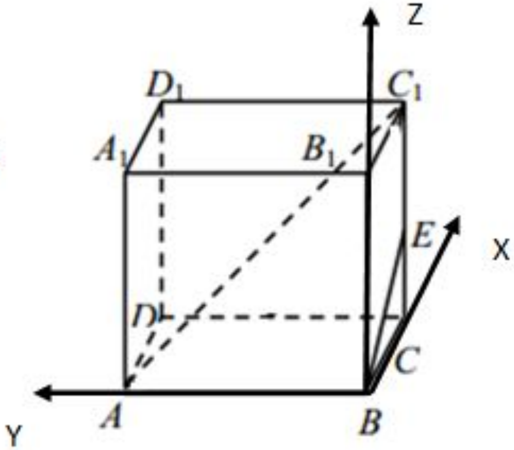
Научный руководитель: Куижева Людмила Евгеньевна, учитель математики, МБОУ «СОШ №16»

Практика.

1.на нахождение угла между скрещивающими прямыми (задача взята из ЕГЭ по математике 2012 года, вторая волна (июль))

На ребре CC_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ отмечена точка E так, что $CE : EC_1 = 1:2$.

Найдите угол между прямыми BE и AC_1



[2] Введем систему координат с началом в точке B (0;0:0).

Примем стороны куба за одну единицу. По стороне BB_1 пустим ость OZ, по стороне BA ось OY и по стороне BC ось OX.

Координаты точек:

B (0;0:0) – начало координат

E $(1;0;\frac{1}{3})$ т.к. CE: EC_1=1:2

A (0;1;0)

C_1 (1;0;1)

$\overline{BA}$(x2-x1;y2-y1;z2-z1), $\overline{BA}$(0;1;0) ,$\overline{EB}$ $(1;0;\frac{1}{3})$, $\overline{AC_1}$ (1;-1;1)

$$\cos\varphi = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

$|\bar{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$, $|\overline{BE}| = \frac{\sqrt{10}}{3}$, $|\overline{AC_1}| = \sqrt{3}$

$$\cos\phi = \frac{\left(1+0+\frac{1}{3}\right)*3}{\sqrt{10}*\sqrt{3}} = \frac{4*3}{3*\sqrt{30}} = \frac{4}{\sqrt{30}} = \frac{2*\sqrt{30}}{15}$$

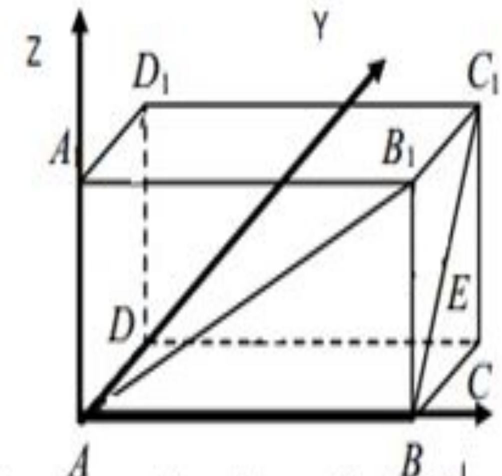
Ответ: $\frac{2*\sqrt{30}}{15}$ Приложение 1

Практика.

В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $AB = 2$, $AD = AA_1 = 1$. Найдите угол между прямой AB_1 и плоскостью ABC_1.

Нахождение угла между прямой и плоскостью (задача взята из ЕГЭ по математике 2012 года, досрочный ЕГЭ (Апрель)

Введем систему координат с началом в т. A, ось X по AB, осьY по AD, ось Z по AA_1, A(0;0;0), B1(2;0;1), B(2;0;0),C1(2;1;1), $\overline{AB1}$(2;0;1), $|\overline{AB1}| = \sqrt{5}$,



Уравнение плоскости, проходящей через три различные точки: $M_1(x_1;y_1;z_1)$, $M_2(x_2;y_2;z_2)$, $M_3(x_3;y_3;z_3)$, которые не лежат на одной прямой, **можно составить по формуле:**

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Составим уравнение плоскости ABC1:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = x\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0X - 2Y + 2Z = 0,\ \overline{n}\,(0;-2;\,2),\ \overline{|n|} = 2\sqrt{2}$$

синус угла β между прямой, направляющий вектор которой имеет координаты $\vec{m}\left(a_1;b_1;c_1\right)$ $(\overline{AB}1(2;0;1))$и плоскостью, заданной уравнением $ax+by+cz+d=0$ $(0X - 2Y + 2Z = 0)$вычисляется по формуле:

$$\sin\beta = \cos\gamma = \left|\frac{a_1a+b_1b+c_1c}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right|,$$

$$\sin\Phi = \frac{0+0+2}{\sqrt{5}*2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$$

Ответ: $\frac{\sqrt{10}}{10}$

Приложение 2

3.Угол между плоскостями.

Угол между плоскостями равен углу между прямыми, содержащими нормали к этим плоскостям, то есть нам надо найти 2 нормальных вектора и посчитать их по формуле:

$$\cos\beta = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

Практика.

На нахождение угла между двумя плоскостями (задача взята из ЕГЭ по математике 2012 года, **основная волна (июнь - Восток)**);

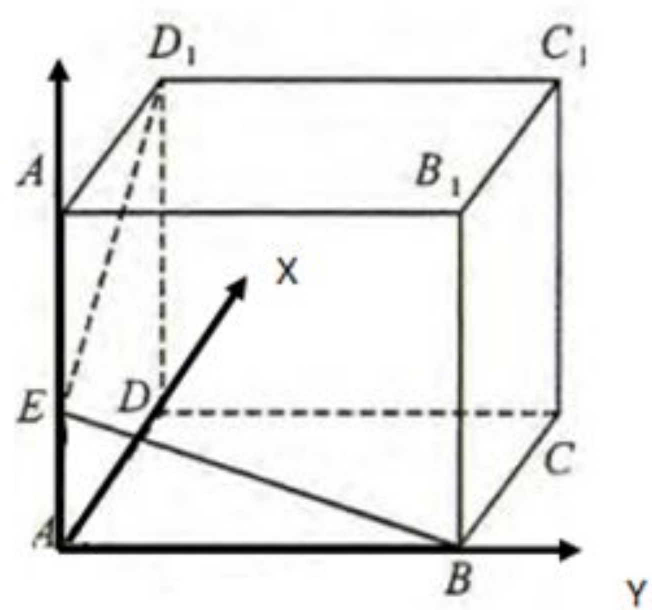
В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ стороны основания равны 2, а боковые рёбра равны 5. На ребре AA_1 отмечена точка E так, что $AE:EA_1 = 3:2$. Найдите угол между плоскостями ABC и BED_1.

Введем систему координат:

A(0;0;0) B(0;2;0)C(2;2;0) - координаты точек плоскости ABC

B(0;2;0) E(0;0;3)D1(2;0;5) - координаты точек плоскости BED$_1$

Уравнение плоскости, проходящей через три различные точки $M_0(x_0;y_0;z_0), M_1(x_1;y_1;z_1), M_2(x_2;y_2;z_2)$, которые не лежат на одной прямой, **можно составить по**



матричной формуле:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & x_1-x_0 & x_2-x_0 \\ y-y_0 & y_1-y_0 & y_2-y_0 \\ z-z_0 & z_1-z_0 & z_2-z_0 \end{vmatrix} = 0$$

Составим уравнение плоскости ABC:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = x*\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} - y*\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + z*\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$$

Из него мы получим уравнение плоскости ABC

0X – 0Y – 4Z=0

Коэффициенты (0;0;- 4) и есть координаты нормального вектора:

$\overline{n}$ (0;0;-4), $|\overline{n}|=4$

Составим уравнение плоскости EBD_1:

$$\begin{vmatrix} x & y & z-3 \\ 0 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = x*\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} - y*\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + (z-3)*\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 4X + 6Y - 4Z + 12 = 0$$

$\overline{n}_2$ (4;6;-4), $|\overline{n}|_2 = \sqrt{68}$

Находим угол по формуле:

$$\cos\varphi = \frac{|x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

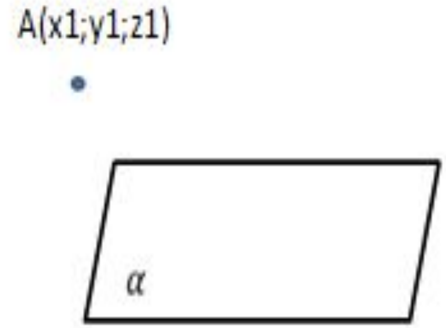
$$\cos\varphi = \frac{16}{\sqrt{16*\sqrt{68}}} = \frac{4}{\sqrt{68}} = \frac{2\sqrt{17}}{17},$$

Ответ: $\frac{2\sqrt{17}}{17}$

4. Расстояние от точки до плоскости

Основная формула[7] $\longrightarrow$ $$d = \frac{|A * x1 + B * y1 + C * z1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Необходимо найти:



1. Координаты точки A $(X_1;Y_1;Z_1)$. 2. Уравнение плоскости

AX+BY+CZ+D=0. 3. Подставить в формулу и решить

Практика:

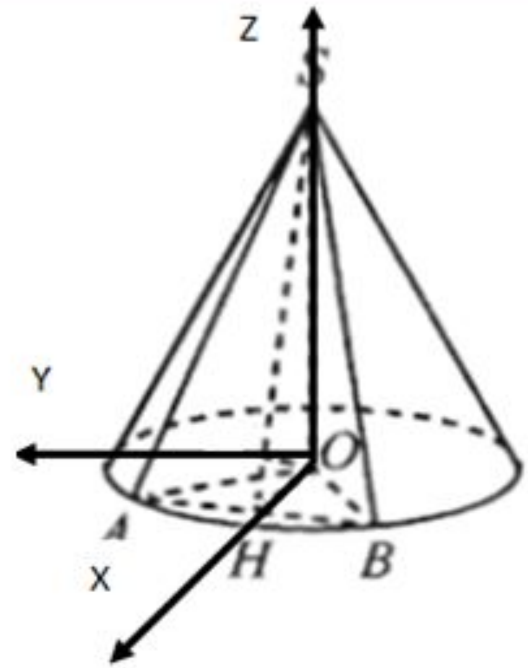
Задача (2013 года, основная волна, резервный день)

Радиус основания конуса равен 8, а его высота равна 15. плоскость сечения содержит вершину конуса и хорду основания, длина которой равна 14. найдите расстояние от центра основания конуса до плоскости сечения?

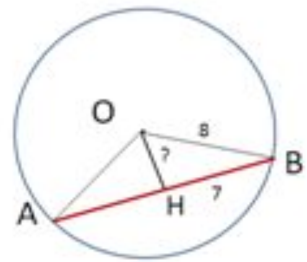
Решение: Зная формулу: [4]

$$d = \frac{|A * x1 + B * y1 + C * z1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

1) Введем систему координат с началом в точке о, по стороне ОН пустим ось X, по стороне OS пустим ось Z, перпендикулярно ОН пустим ось Y.



2) Найдем координаты необходимых точек:



O (0; 0; 0)

A ($\sqrt{15}$; 0; 0) S (0; 0; 15) H ($\sqrt{15}$; 7; 0)

координаты точек плоскости ASH

3) Найдем уравнение плоскости:

$$\begin{vmatrix} x-\sqrt{15} & y & z \\ -\sqrt{15} & 0 & 15 \\ 0 & 7 & 0 \end{vmatrix} = (x-\sqrt{15}) * \begin{vmatrix} 0 & 15 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} - y * \begin{vmatrix} \sqrt{15} & 15 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + z \begin{vmatrix} -\sqrt{15} & 0 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} =$$

$$= -105x - 0y - 7\sqrt{15}z + 105\sqrt{15} = 0, \qquad \overline{n}\ (-105; 0; -7\sqrt{15})$$

Подставим в формулу нахождения расстояния:

$$d = \frac{0+0+0+105\sqrt{15}}{\sqrt{105*105+0+49*15}} = \frac{105\sqrt{15}}{28\sqrt{15}} = \frac{15}{4}$$

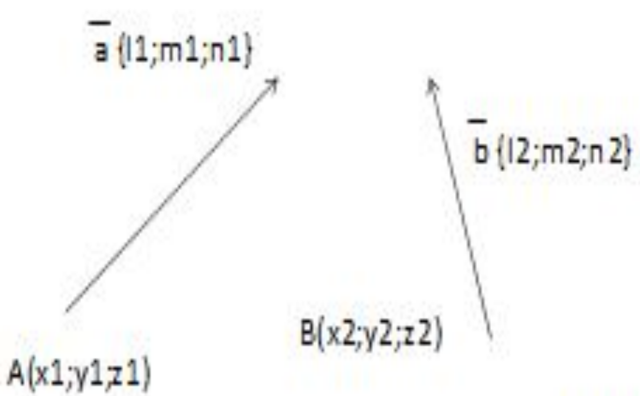
Ответ: $\frac{15}{4}$

Приложение 4

5.Расстояние между двумя прямыми

Основная формула[7]

$$d = \frac{mod\begin{vmatrix} x2 - x1 & y2 - y1 & z2 - z1 \\ l1 & m1 & n1 \\ l2 & m2 & n2 \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} l1 & m1 \\ l2 & m2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} m1 & n1 \\ m2 & n2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} l1 & n1 \\ l2 & n2 \end{vmatrix}^2}}$$



Необходимо найти:

1.Координаты точки B и A. 2.Координаты вектора a и b. 3.Подставить в формулу

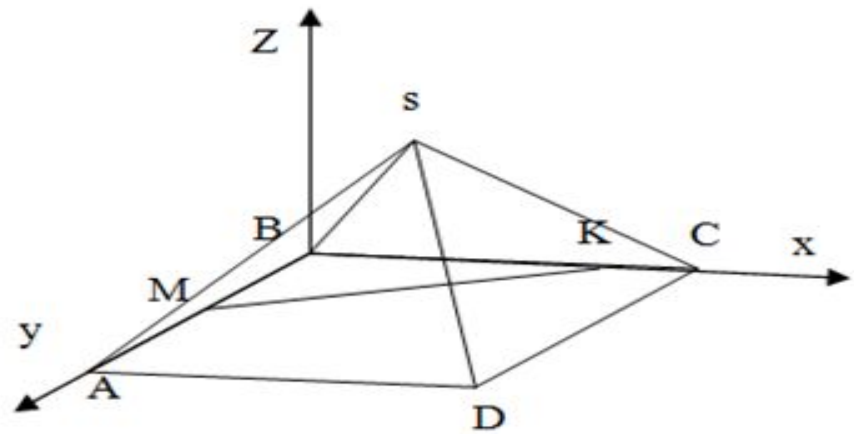
Практика:

В правильной четырехугольной пирамиде SABC с основанием ABCD все ребра равны 1, точка M делит сторону AB пополам, а точка K принадлежит стороне BC и делит её на сторону в отношении 2:1 от вершины B. Найти расстояние между прямыми MK и SD.

Решение:

Зная формулу[7]

$$d = \frac{mod \begin{vmatrix} x2-x1 & y2-y1 & z2-z1 \\ l1 & m1 & n1 \\ l2 & m2 & n2 \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} l1 & m1 \\ l2 & m2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} m1 & n1 \\ m2 & n2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} l1 & n1 \\ l2 & n2 \end{vmatrix}^2}}$$



1) введем систему координат с началом в точке B:

M (0; 0.5; 0), K ($\frac{2}{3}$; O; 0)

D (1; 1; 0), S (0.5; 0.5; $\frac{\sqrt{2}}{2}$)

2) найдем координаты векторов MK и SD

Вектор MK {$\frac{2}{3}$; -0.5; 0}

Вектор SD {0.5; 0.5; - $\frac{\sqrt{2}}{2}$}

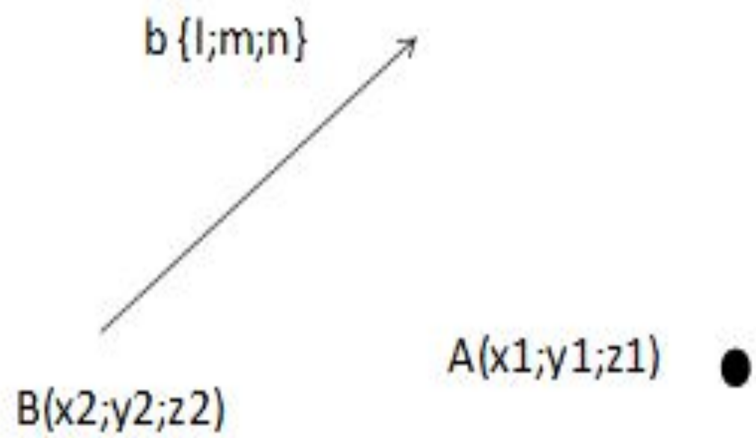
3) Подставляем в формулу нахождения расстояния:

$$\frac{mod \begin{vmatrix} 1 & 0,5 & 0 \\ \frac{2}{3} & -0,5 & 0 \\ 0,5 & 0,5 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} \frac{2}{3} & -0,5 \\ 0,5 & 0 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} -0,5 & 0 \\ 0,5 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \frac{2}{3} & 0 \\ 0,5 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{vmatrix}^2}} = \frac{5\sqrt{22}}{33}$$

Ответ: $\frac{5\sqrt{22}}{33}$

6. Расстояние от точки до прямой

Основная формула:



$$d=\frac{\sqrt{\begin{vmatrix} x2-x1 & y2-y1 \\ l & m \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} y2-y1 & z2-z1 \\ m & n \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x2-x1 & z2-z1 \\ l & n \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$$

Необходимо найти:

1. Координаты точки A (x1;y1;z1) 2. Координаты вектора b {l;m;т}

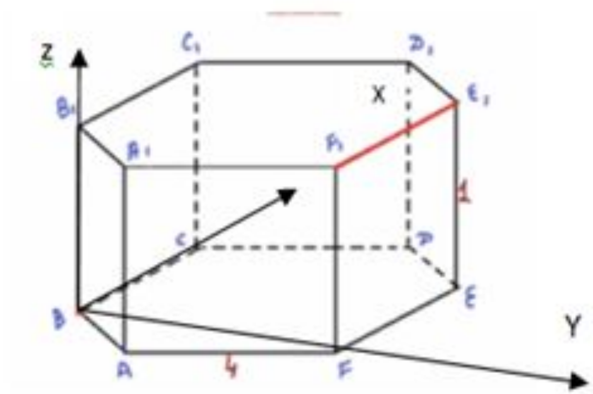
3. Координаты точки B (начальная точка вектора b) (x2;y2;z2)

Практика.

в правильной шестиугольной призме со стороной основания 4 и боковым ребром 1. Найти расстояние от точки В до прямой F1E1

Основная формула

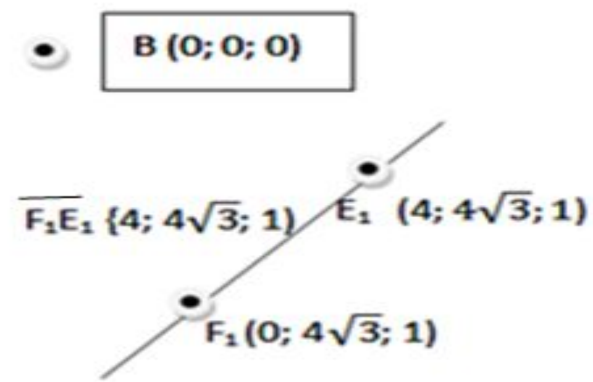
$$d = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} x2-x1 & y2-y1 \\ l & m \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} y2-y1 & z2-z1 \\ m & n \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x2-x1 & z2-z1 \\ l & n \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$$



Решение:

1) введем систему координат в пространстве с началом в точке В.
2) найдем координаты точек В; F1; E1
   В (0; 0; 0), $F1\ (0; 4\sqrt{3}; 1)$, $E1\ (4; 4\sqrt{3}; 1)$
3) Найдем координаты вектора F1E1
   $\overline{F1E1}\ \{4; 0; 0\}$
4) Подставляем в формулу нахождения расстояния

$$d = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} 0 & 4\sqrt{3} \\ 4 & 0 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 4\sqrt{3} & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}^2}}{4} = \frac{\sqrt{784}}{4} = 7$$



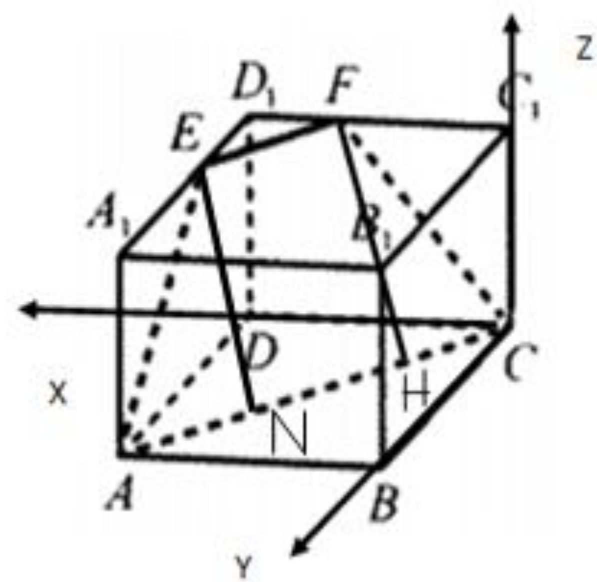
Ответ: 7

7. Площадь сечения.

К сожалению, не все задачи можно решить на площадь сечения и объемов, но все же некоторые можно.

Основная волна (Июнь-Сибирь 2013 год)

В правильной четырехугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ сторона основания равна 6, а боковое ребро $AA_1=1$. Точка F принадлежит ребру C_1D_1 и делит его в отношении 2:1, считая от вершины C_1. Найдите площадь сечения этой призмы плоскостью, проходящей через точки A,C и F.

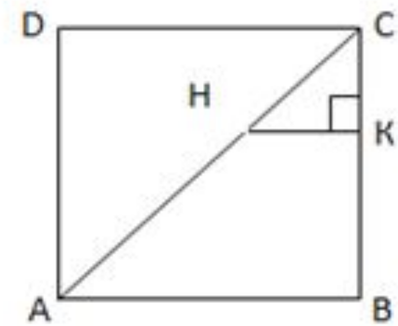


На стороне A_1D_1 поставит точку E так, чтобы сторона EF была параллельна AD, тогда $A_1E=FC_1$, а $ED_1=D_1F$ по теореме Фалеса, следовательно эта трапеция равнобедренная. Проведем высоты EN и FH, которые = $=2\sqrt{2}$ по теореме Пифагора из треугольника ED_1F, где стороны $ED_1=D_1F=2$ т.к. точка F принадлежит ребру C_1D_1 и делит его в отношении

2:1. $AC=6\sqrt{2}$, по теореме Пифагора из треугольника ABC. AN=FH, т.к. трапеция равнобедренная, EN=FH, т.к. это перпендикуляры опущенные на параллельную прямую, отсюда

$X+X+2\sqrt{2}=6\sqrt{2}$, $2X=4\sqrt{2}$, $X=2\sqrt{2}$

Рассмотрим квадрат ABCD. Опустим перпендикуляр к стороне CB, диагональ делит угол C пополам равным по 45°, угол CKH=90°, следовательно угол KHC=45°, следовательно треугольник KCH равнобедренный, по теореме Пифагора можем найти два катета, которые равны 2. Теперь мы смело можем водить систему координат.



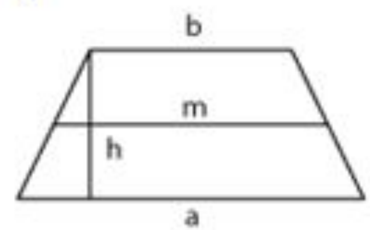
Введем систему координат с началом в точке C:

F(4;0:1), E(6;2;1), H(2;2;0), A(6;6;0), C(0;0;0)

$\overline{HF}(2;-2;1)$, $\overline{EF}(-2;-2;0)$, $\overline{AC}(-6;-6;0)$

$|\overline{HF}|=3$, $|\overline{EF}|=2\sqrt{2}$, $|\overline{AC}|=6\sqrt{2}$

Теперь подставляем в формулу площади трапеции: [5]



трапеция

$$S=\frac{a+b}{2}\cdot h$$

a, b - основания
h - высота

1) $S=\frac{(2\sqrt{2}+6\sqrt{2})}{2}*3=12\sqrt{2}$

2) Ответ: $12\sqrt{2}$

ЛИТЕРАТУРА:

1.Л.С. Атанасян и др., Геометрия 10-11/-Москва: Просвещение, 2009г.
2.Ф.Ф. Лысенко и др., Математика, подготовка к еге 2013/-Ростов-на-Дону: Легион, 2012г.

3.Вектора, определитель матрицы 2-3 порядка/-http://ru.wikipedia.org
4. Ларин А.А, задачи С2 2012-2013 года/- http://alexlarin.net
5. Малкова А. Г., формулы скалярного произведения, и площадей/- http://dvd.ege-study.ru
6. Фельдман И.В., формула угла между плоскостями/-http://ege-ok.ru
7. Спивак Ю.Е. формулы расстояния/-http://youtube.com