Теорема о параллельных осях

Существуют две простые теоремы, которые помогают при вычислении моментов инерции. Первая из них называется *теоремой о параллельном переносе оси вращения* (теоремой о параллельных осях). Она утверждает, что если I – момент инерции тела массой M относительно некоторой оси вращения, а $I_{\text{цм}}$ – момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс и параллельной первой оси, отстоящей от нее на расстояние h, то[1)]

$$I = I_{\text{цм}} + Mh^2\,. \qquad (9.15)$$

Теорема о перпендикулярных осях

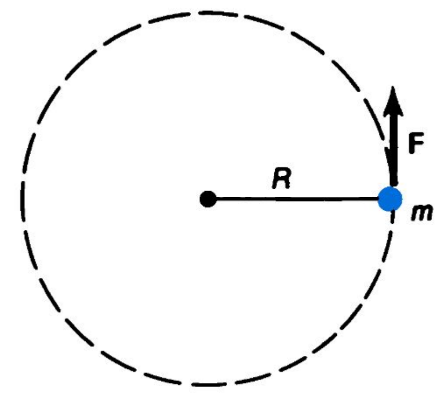
Теорема о параллельном переносе осей может быть применена к любому телу. Другая теорема – *теорема о перпендикулярных осях* – может быть применена лишь к плоским фигурам, т.е. к двумерным телам, или телам постоянной толщины, которой можно пренебречь по сравнению с другими размерами. Согласно этой теореме, сумма моментов инерции плоского тела относительно любой пары взаимно перпендикулярных осей в плоскости этого тела равна моменту инерции относительно оси, проходящей через точку пересечения перпендикулярно плоскости тела. Точнее говоря, если тело расположено в плоскости xy, то

$$I_z = I_x + I_y \qquad [\text{тело в плоскости } xy]. \qquad (9.16)$$

Момент инерции

Частица с массой **m** вращается по окружности **R**

$$F = ma = mR\alpha.$$



Умножим обе части уравнения на **R**

$$RF = \boxed{mR^2}\,\alpha$$

момент инерции – мера инертности частицы во вращательном

Рассмотрим вращающееся твердое тело как совокупность множества частиц, расположенных на разных расстояниях от оси вращения.

Так как угловое ускорение одинаково, то

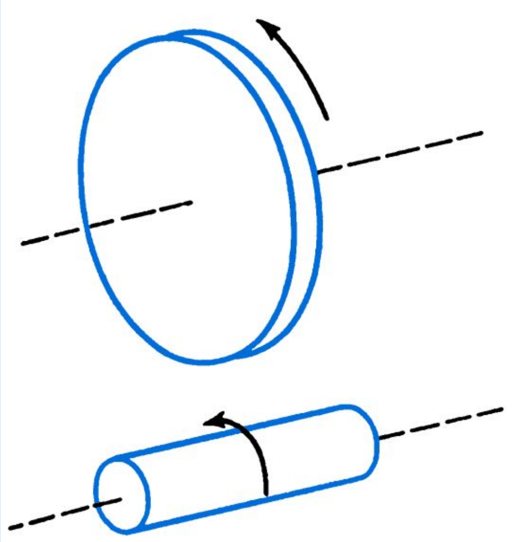
$$\left(\sum m_i R_i^2\right)\alpha$$

Полный момент сил = сумме моментов внешних сил.

Сумма

$$\sum m_i R_i^2 = m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2 + \ldots + m_n R_n^2 = I$$

называется **моментом инерции** тела.



момент инерции зависит не только от массы тела, но и от того, как эта масса распределена.

Вращательный эквивалент второго закона Ньютона

$$\boxed{T = I\frac{d\omega}{dt} = I\alpha.}$$

[неподвижная ось].

Вращение абсолютно твердого тела относительно неподвижной оси

$$\boxed{\tau_{ЦМ} = I_{ЦМ}\,\alpha_{ЦМ}}$$

Пример вычисления момента инерции

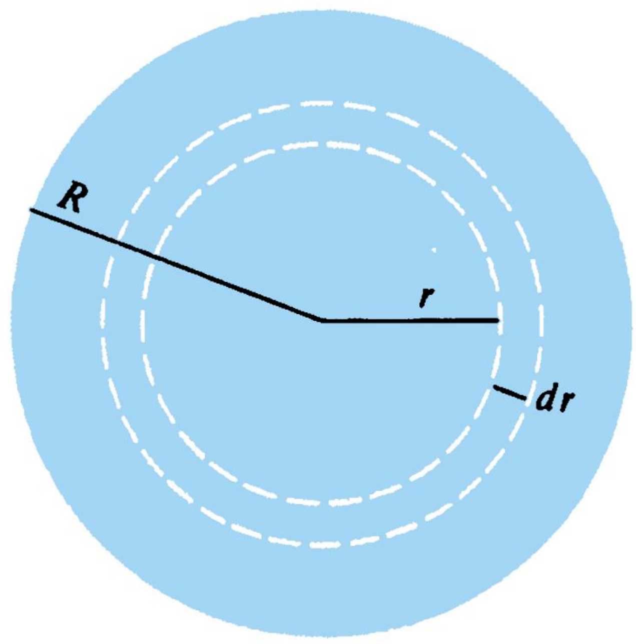
В случае непрерывного распределения масс

$$I \equiv \sum r_j^2 \Delta m_j \quad \rightarrow \quad I \equiv \int r^2\, dm \quad (\textit{момент инерции}).$$

Вычислим момент инерции диска радиуса **R** и массой **M**

Площадь кольца, заключенного между ***r*** и ***r+dr***

$$dA = 2\pi r\, dr.$$



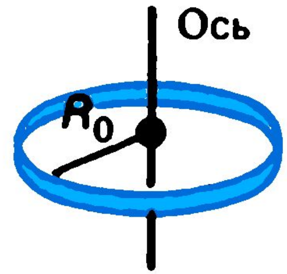
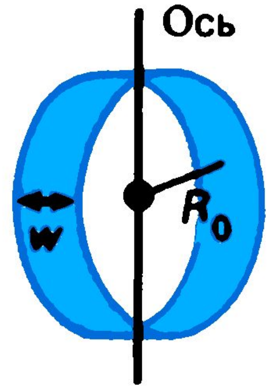
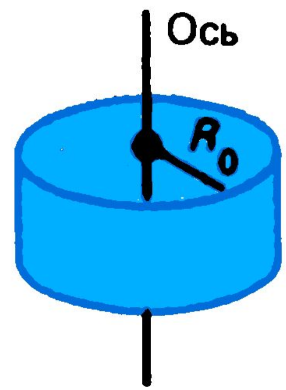
Следовательно:

$$\frac{dm}{M} = \frac{dA}{A} = \frac{2\pi r\, dr}{\pi R^2}, \qquad dm = M\frac{2r\, dr}{R^2}$$

Вычислим теперь момент инерции диска:

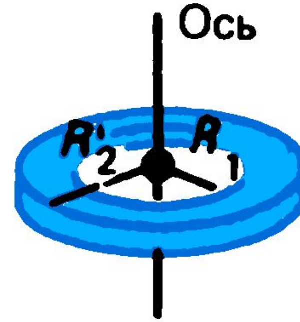
$$I_{\text{дис}} = \int_0^R r^2 dm = \int_0^R r^2 \left(\frac{2Mrdr}{R^2}\right) = \frac{2M}{R^2}\int_0^R r^3 dr =$$

$$= \frac{2M}{R^2}\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^R = (1/2)\, MR^2.$$

Тело	Положение оси вращения		Момент инерции	Радиус инерции
а) Тонкое кольцо радиусом R_0	Через центр		MR_0^2	R_0
б) Тонкое кольцо радиусом R_0 и шириной w	По диаметру		$\frac{1}{2}MR_0^2 + \frac{1}{12}Mw^2$	$\sqrt{\frac{R_0^2}{2} + \frac{w^2}{12}}$
в) Твердый цилиндр радиусом R_0	Через центр		$\frac{1}{2}MR_0^2$	$\frac{R_0}{\sqrt{2}}$

г) Полый цилиндр с внутренним радиусом R_1 и внешним радиусом R_2

Через центр

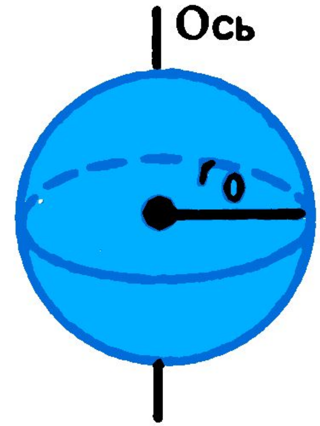


$\frac{1}{2}M(R_1^2+R_2^2)$

$\sqrt{\frac{R_1^2+R_2^2}{2}}$

д) Твердая сфера радиусом r_0

Через центр

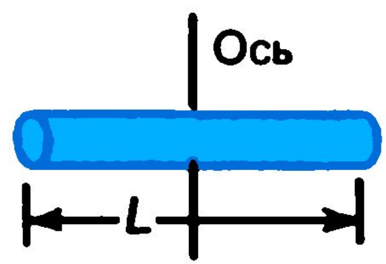


$\frac{2}{5}Mr_0^2$

$\sqrt{\frac{2}{5}}\,r_0$

е) Тонкий стержень длиной L

Через центр

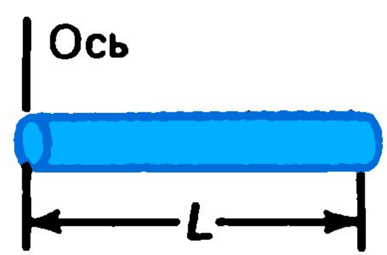


$\frac{1}{12}ML^2$

$\frac{L}{\sqrt{12}}$

ж) Тонкий стержень длиной L

Через конец

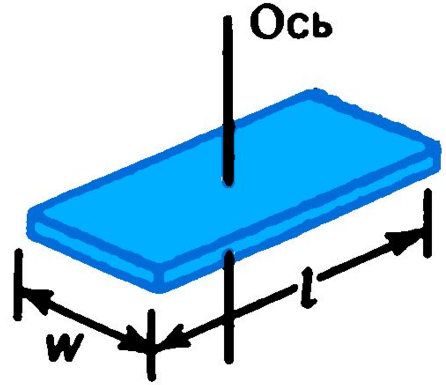


$\frac{1}{3}ML^2$

$\frac{L}{\sqrt{3}}$

з) Тонкая прямоугольная пластинка длиной l и шириной w

Через центр



$$\frac{1}{12}M(l^2 + w^2)$$

$$\sqrt{\frac{l^2 + w^2}{12}}$$

Поступательное движение $x(t) = x_0 + v_0 t + a t^2/2$	**Вращательное движение** $\varphi(t) = \varphi_0 + \omega_0 t + \alpha t^2/2$
Скорость v	Угловая скорость ω
Масса **m**	Момент инерции **I**
Импульс $p = mv$	Момент импульса $L = I\omega$
Сила **F**	Момент силы τ
Ускорение a $a = dv/dt$	Угловое ускорение α $\alpha = d\omega/dt$
2-й закон Ньютона $F = ma$ $F = dp/dt$	$\tau = I\alpha$ $F = dL/dt$
Работа $A = Fl$	$A = \tau\varphi$
Кинетическая энергия $mv^2/2$	$I\omega^2/2$

радиусов перпендикулярн

1.135. Т Определить момент инерции J тонкого однородного стержня длиной $l=50$ см и массой $m=360$ г относительно оси, перпендикулярной стержню и проходящей через: 1) конец стержня; 2) точку, отстоящую от конца стержня на $^1/_6$ его длины. [1) $3\cdot 10^{-2}$ кг$\cdot$м^2; 2) $1{,}75\cdot 10^{-2}$ кг$\cdot$м^2]

1.143 Т Сплошной однородный диск скатывается без скольжения по наклонной плоскости, образующей угол α с горизонтом. Определить линейное ускорение a центра диска. [$a={}^2/_3 g\sin\alpha$]

Ч

3.17. Найти момент инерции J плоской однородной прямоугольной пластины массой m=800 г относительно оси, совпадающей с одной из ее сторон, если длина a другой стороны равна 40 см.

Ч

3.22. На горизонтальную ось насажены маховик и легкий шкив радиусом R=5 см. На шкив намотан шнур, к которому привязан груз массой m=0,4 кг. Опускаясь равноускоренно, груз прошел путь s=1,8 м за время t=3 с. Определить момент инерции J маховика. Массу шкива считать пренебрежимо малой.

Ч

3.24. На цилиндр намотана тонкая гибкая нерастяжимая лента, массой которой по сравнению с массой цилиндра можно пренебречь. Свободный конец ленты прикрепили к кронштейну и предоставили цилиндру опускаться под действием силы тяжести. Определить линейное ускорение a оси цилиндра, если цилиндр: 1) сплошной; 2) полый тонкостенный.

Ч

3.28. Шар массой $m=10$ кг и радиусом $R=20$ см вращается вокруг оси, проходящей через его центр. Уравнение вращения шара имеет вид $\varphi=A+Bt^2+Ct^3$, где $B=4$ рад/с², $C=-1$ рад/с³. Найти закон изменения момента сил, действующих на шар. Определить момент сил M в момент времени $t=2$ с.

И

1.270. Однородный диск радиуса R раскрутили до угловой скорости ω и осторожно положили на горизонтальную поверхность. Сколько времени диск будет вращаться на поверхности, если коэффициент трения равен k?

Ч

3.13. Найти момент инерции J тонкого однородного кольца радиусом $R=20$ см и массой $m=100$ г относительно оси, лежащей в плоскости кольца и проходящей через его центр.

Домашнее задание

2.71. При выстреле из орудия снаряд массой $m_1=10$ кг получает кинетическую энергию $T_1=1{,}8$ МДж. Определить кинетическую энергию T_2 ствола орудия вследствие отдачи, если масса m_2 ствола орудия равна 600 кг.

2.19. На горизонтальной поверхности находится брусок массой $m_1=2$ кг. Коэффициент трения f_1 бруска о поверхность равен 0,2. На бруске находится другой брусок массой $m_2=8$ кг. Коэффициент трения f_2 верхнего бруска о нижний равен 0,3. К верхнему бруску приложена сила F. Определить: 1) значение силы F_1, при котором начнется совместное скольжение брусков по поверхности; 2) значение силы F_2, при котором верхний брусок начнет проскальзывать относительно нижнего.

Т **1.140, 1.144**

Ч **3.7, 3.13, 3.23, 3.25, 3.27**