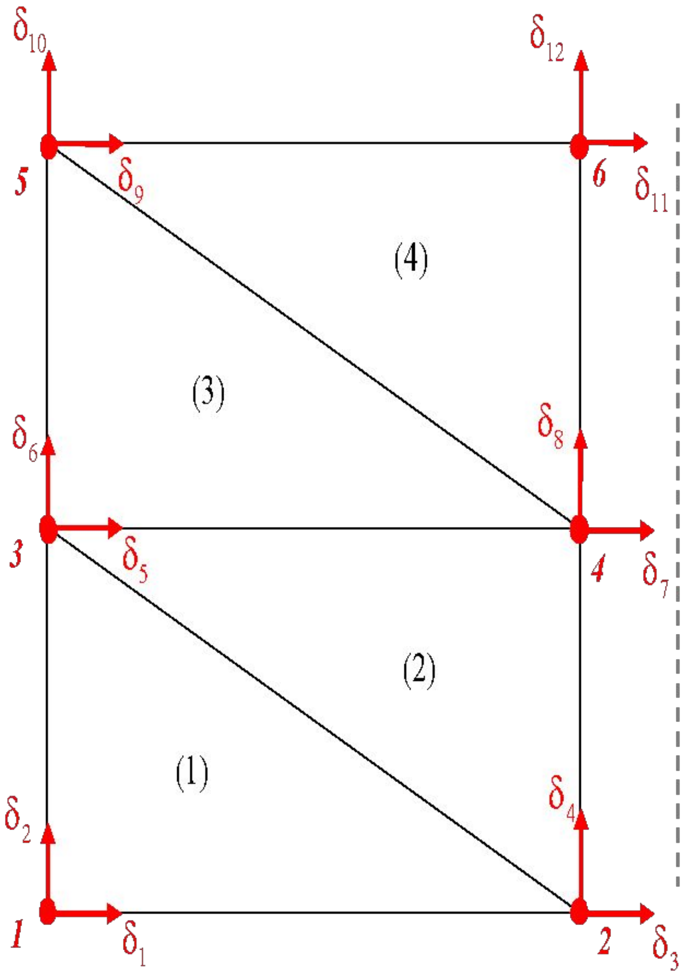
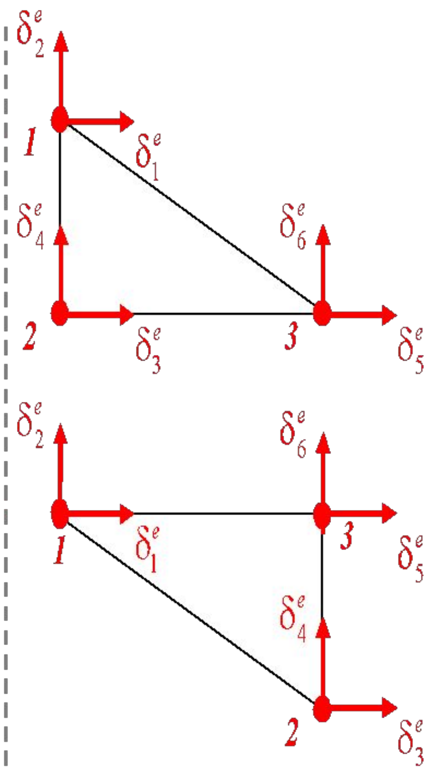
Лекция Вычислительная механика **Формирование глобальных векторов и матриц МКЭ**

К.т.н., доцент каф. ВМиМ
Каменских Анна Александровна
239-15-64





$$\underset{12\times1}{\{\delta\}} = \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \vdots \\ \delta_{12} \end{Bmatrix}$$

$$\underset{6\times1}{\{n^1\}} = \begin{Bmatrix} 5 \\ 6 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{Bmatrix} \qquad \underset{6\times1}{\{n^2\}} = \begin{Bmatrix} 5 \\ 6 \\ 3 \\ 4 \\ 7 \\ 8 \end{Bmatrix}$$

$$\underset{6\times1}{\{n^e\}} = \begin{Bmatrix} n_1^e \\ n_2^e \\ n_3^e \\ n_4^e \\ n_5^e \\ n_6^e \end{Bmatrix}$$

$$\underset{6\times1}{\{n^3\}} = \begin{Bmatrix} 9 \\ 10 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{Bmatrix} \qquad \underset{6\times1}{\{n^4\}} = \begin{Bmatrix} 9 \\ 10 \\ 7 \\ 8 \\ 11 \\ 12 \end{Bmatrix}$$

$$\underset{6\times6}{\left[K^e\right]} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & K_{15} & K_{16} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{25} & K_{26} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} & K_{35} & K_{36} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} & K_{45} & K_{46} \\ K_{51} & K_{52} & K_{53} & K_{54} & K_{55} & K_{56} \\ K_{61} & K_{62} & K_{63} & K_{64} & K_{65} & K_{66} \end{bmatrix}$$

$$\underset{6\times1}{\{\delta^e\}} = \begin{Bmatrix} \delta_1^e \\ \delta_2^e \\ \delta_3^e \\ \delta_4^e \\ \delta_5^e \\ \delta_6^e \end{Bmatrix} \qquad \underset{6\times1}{\{F^e\}} = \begin{Bmatrix} F_1^e \\ F_2^e \\ F_3^e \\ F_4^e \\ F_5^e \\ F_6^e \end{Bmatrix}$$

$$\underset{12\times 1}{\left\{F\right\}} = \sum_{e} \underset{6\times 1}{\left\{F^{e}\right\}} \Rightarrow$$

для каждого элемента введем расширенный вектор узловых сил

$$\Rightarrow \underset{12\times 1}{\left\{F\right\}} = \sum_{e} \underset{12\times 1}{\left\{F^{(e)}\right\}}$$

Если $\underset{6\times 1}{\left\{F^{1}\right\}} = \left\{\begin{matrix} F_1^1 \\ F_2^1 \\ F_3^1 \\ F_4^1 \\ F_5^1 \\ F_6^1 \end{matrix}\right\}$ при $\underset{6\times 1}{\left\{n^{1}\right\}} = \left\{\begin{matrix} 5 \\ 6 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix}\right\}$, тогда $\underset{12\times 1}{\left\{F^{(1)}\right\}} = \left\{\begin{matrix} F_3^1 \\ F_4^1 \\ F_5^1 \\ F_6^1 \\ F_1^1 \\ F_2^1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}\right\}$.

Если $\underset{6\times 1}{\left\{F^{2}\right\}} = \left\{\begin{matrix} F_1^2 \\ F_2^2 \\ F_3^2 \\ F_4^2 \\ F_5^2 \\ F_6^2 \end{matrix}\right\}$ при $\underset{6\times 1}{\left\{n^{2}\right\}} = \left\{\begin{matrix} 5 \\ 6 \\ 3 \\ 4 \\ 7 \\ 8 \end{matrix}\right\}$, тогда $\underset{12\times 1}{\left\{F^{(2)}\right\}} = \left\{\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ F_3^2 \\ F_4^2 \\ F_1^2 \\ F_2^2 \\ F_5^1 \\ F_6^1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}\right\}$ и т.д. для других элементов

$$\underset{12\times12}{[K]}\underset{12\times1}{\{\delta\}}=\sum_e \underset{6\times6}{\left[K^e\right]}\underset{6\times1}{\left\{\delta^e\right\}}=\left(\sum_e \underset{12\times12}{\left[K^{(e)}\right]}\right)\underset{12\times1}{\{\delta\}} \Rightarrow \underset{12\times12}{[K]}=\left(\sum_e \underset{12\times12}{\left[K^{(e)}\right]}\right) \Rightarrow \underset{i,j=\overline{1,6}}{K^{(e)}_{n_i,n_j}=K^e_{i,j}}$$

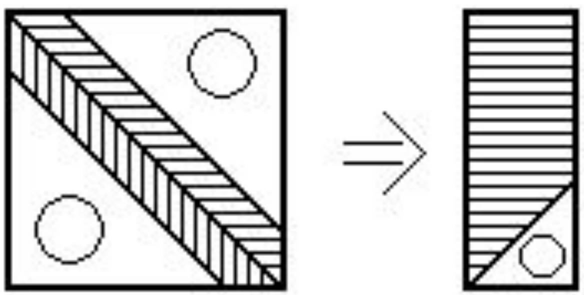
$$\underset{6\times6}{\left[K^1\right]}\left\{\delta^1\right\}=\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & K_{15} & K_{16} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{25} & K_{26} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} & K_{35} & K_{36} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} & K_{45} & K_{46} \\ K_{51} & K_{52} & K_{53} & K_{54} & K_{55} & K_{56} \\ K_{61} & K_{62} & K_{63} & K_{64} & K_{65} & K_{66} \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} \delta_5 \\ \delta_6 \\ \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \end{Bmatrix}$$

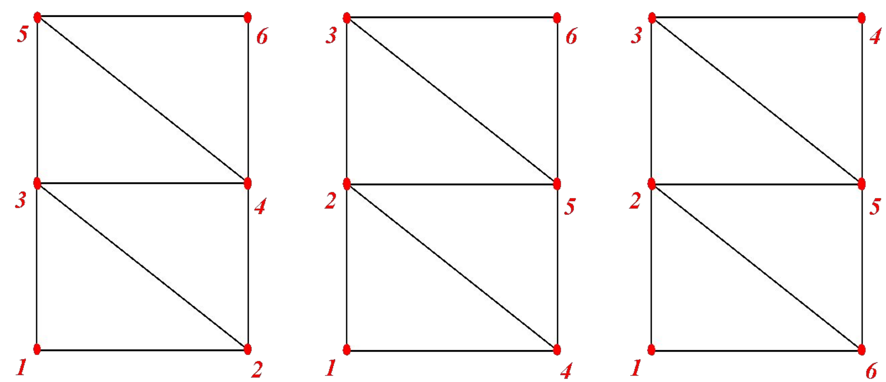
$$\underset{12\times12}{\left[K^{(1)}\right]}=\begin{bmatrix} K_{33} & K_{34} & K_{35} & K_{36} & K_{31} & K_{32} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_{43} & K_{44} & K_{45} & K_{46} & K_{41} & K_{42} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_{53} & K_{54} & K_{55} & K_{56} & K_{51} & K_{52} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_{63} & K_{64} & K_{65} & K_{66} & K_{61} & K_{62} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_{13} & K_{14} & K_{15} & K_{16} & K_{11} & K_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_{23} & K_{24} & K_{25} & K_{26} & K_{21} & K_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ \delta_5 \\ \delta_6 \\ \delta_7 \\ \delta_8 \\ \delta_9 \\ \delta_{10} \\ \delta_{11} \\ \delta_{12} \end{Bmatrix}$$

$$\underset{6\times6}{\left[K^4\right]}\left\{\delta^4\right\}=\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & K_{15} & K_{16} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{25} & K_{26} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} & K_{35} & K_{36} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} & K_{45} & K_{46} \\ K_{51} & K_{52} & K_{53} & K_{54} & K_{55} & K_{56} \\ K_{61} & K_{62} & K_{63} & K_{64} & K_{65} & K_{66} \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} \delta_9 \\ \delta_{10} \\ \delta_7 \\ \delta_8 \\ \delta_{11} \\ \delta_{12} \end{Bmatrix}$$

$$\underset{12\times12}{\left[K^{(4)}\right]}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{33} & K_{34} & K_{31} & K_{32} & K_{35} & K_{36} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{43} & K_{44} & K_{41} & K_{42} & K_{45} & K_{46} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{13} & K_{14} & K_{11} & K_{12} & K_{15} & K_{16} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{23} & K_{24} & K_{21} & K_{22} & K_{25} & K_{26} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{53} & K_{54} & K_{51} & K_{52} & K_{55} & K_{56} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{63} & K_{64} & K_{61} & K_{62} & K_{65} & K_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ \delta_5 \\ \delta_6 \\ \delta_7 \\ \delta_8 \\ \delta_9 \\ \delta_{10} \\ \delta_{11} \\ \delta_{12} \end{Bmatrix}$$

$$
\underset{12\times 12}{[K]}=\begin{bmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
1 & 1 & 1+2 & 1+2 & 1+2 & 1+2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0\\
1 & 1 & 1+2 & 1+2 & 1+2 & 1+2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0\\
1 & 1 & 1+2 & 1+2 & 1+2+3 & 1+2+3 & 2+3 & 2+3 & 3 & 3 & 0 & 0\\
1 & 1 & 1+2 & 1+2 & 1+2+3 & 1+2+3 & 2+3 & 2+3 & 3 & 3 & 0 & 0\\
0 & 0 & 2 & 2 & 2+3 & 2+3 & 4+2+3 & 4+2+3 & 4+3 & 4+3 & 4 & 4\\
0 & 0 & 2 & 2 & 2+3 & 2+3 & 4+2+3 & 4+2+3 & 4+3 & 4+3 & 4 & 4\\
0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 4+3 & 4+3 & 4+3 & 4+3 & 4 & 4\\
0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 4+3 & 4+3 & 4+3 & 4+3 & 4 & 4\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4
\end{bmatrix}
$$





Учет граничных условий в перемещениях

известно

$$\delta_i=\overline{\delta}_i$$

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} & i & & & \end{array}\\
\begin{bmatrix} & \vdots & & \\ \ldots & K_{ii}\cdot 10^{10} & \ldots & \ldots \\ & \vdots & & \\ & \vdots & & \end{bmatrix}
\end{array}
\begin{Bmatrix} \\ \overline{\delta}_i \\ \\ \\ \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} \\ \overline{\delta}_i\cdot K_{ii}\cdot 10^{10} \\ \\ \\ \end{Bmatrix} i
$$