

Лекция Вычислительная механика

Аппроксимация

дифференциальных операторов

К.т.н., доцент каф. ВМиМ
Каменских Анна Александровна
239-15-64

Обыкновенные дифференциальные уравнения

- задачи химической кинетики,
- электрических цепей,
- движение систем взаимодействующих материальных точек
- и другие задачи физики, химии, техники

Дифференциальные уравнения в частных производных

- задачи математической физики,
- гидродинамики,
- акустики
- и других областей знаний.

Решение дифференциальных уравнений

аналитические

- точные – методы позволяют выразить решение дифференциальных уравнений через элементарные функции (в аналитическом виде);
- приближенные – методы, в которых решение получается как предел некоторой последовательности, члены которой выражаются через элементарные функции.

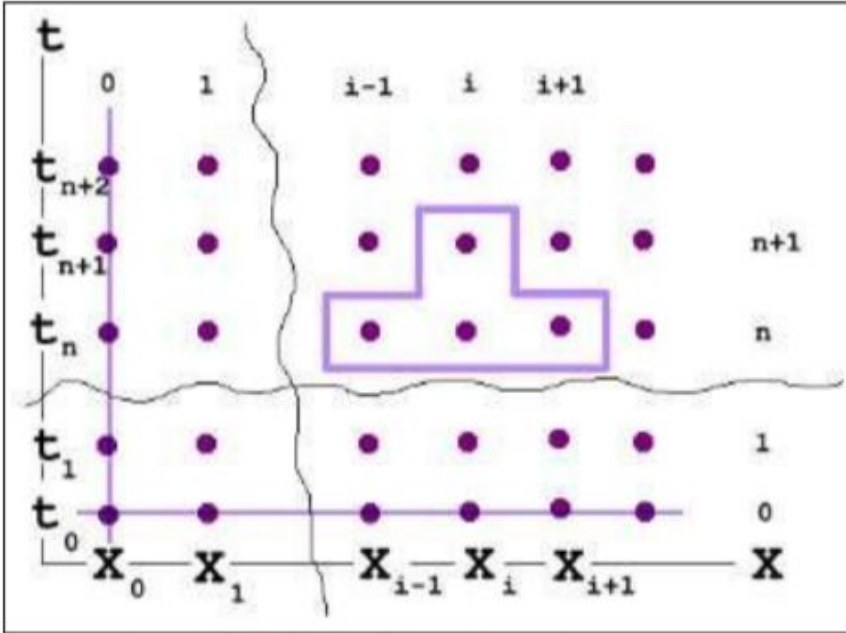
численные

-численные методы не позволяют найти точное решение дифференциальных уравнений в аналитической форме. С их помощью получается таблица приближенных (иногда точных) значений искомого решения в некоторых точках рассматриваемой области решения, именуемых сеткой. В силу этого численные методы называют иначе разностными методами или **методами сеток**.

Суть метода сеток заключается в покрытии расчетной области (x,t) сеткой из $I \times N$ точек (см. рис), что определит шаги по времени и пространству.

Сеткой определяются узлы, в которых будет осуществляться поиск решения.

Далее необходимо заменить дифференциальные уравнения в частных производных (уравнение диффузии, уравнение теплопроводности и др.) аппроксимирующими их уравнениями в конечных разностях, выписав соответствующие разностные уравнения для каждого (i,n) -го узла сетки.



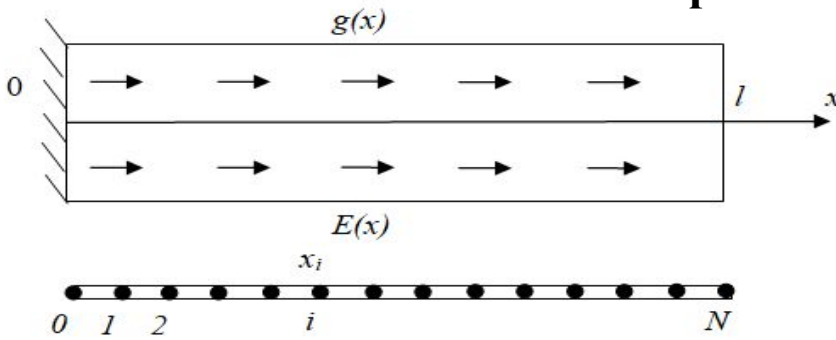
Понятие разностной схемы

$$\begin{cases} Lu(x) = f(x), & x \in V, \\ lu(x) = \varphi(x), & x \in \Gamma. \end{cases}$$
 Совокупность разностных уравнений, построенных на сетке и аппроксимирующих основное дифференциальное уравнение на V и краевые условия на Γ , называется **разностной схемой**.

$$\begin{cases} L_h u_h = f_h, \\ l_h u_h = \varphi_h. \end{cases} \quad \boxed{L_h \sim L \quad l_h \sim l \quad u_h \sim u \quad f_h \quad \varphi_h} \quad \text{конечные разности на сетке}$$

Таким образом, вместо поиска непрерывных зависимостей $u(x)$ реализация разностной схемы позволяет отыскивать значения функции в узлах сетки. Ее поведение в промежутках между узлами может быть получено при помощи построения какой-либо интерполяции.

Построение разностной схемы



$\bar{\omega} = \{x_i = ih, \quad i = \overline{1, N}, \quad h = l/N\}$
 Конечно-разностная схема называется устойчивой, если малым изменениям входных данных соответствует малое изменение решения.

Если р.с. устойчива и аппроксимирует исходную краевую задачу с порядком n , то она сходится, причем скорость сходимости равна порядку аппроксимации.

$$\|u - u_h\| \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

$$E \frac{d^2 u_x}{dx^2} + \rho g(x) = 0$$

$$\begin{cases} u_x|_{x=0} = 0, \\ E \frac{du_x}{dx} \Big|_{x=l} = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{h^2} u_{i-1} - \frac{2}{h^2} u_i + \frac{1}{h^2} u_{i+1} = -\frac{\rho}{E} g_i, & i = \overline{1, N-1}, \\ u_1 = 0, \\ -u_{N-1} + u_N = 0. \end{cases}$$

конечно-разностная схема

$$u = \begin{Bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_{N-2} \\ u_{N-1} \\ u_N \end{Bmatrix}$$

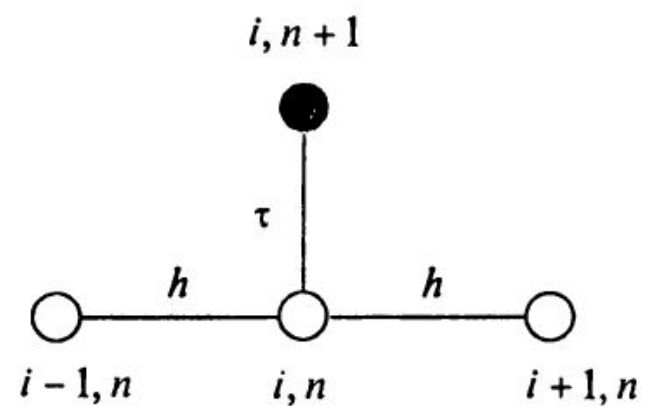
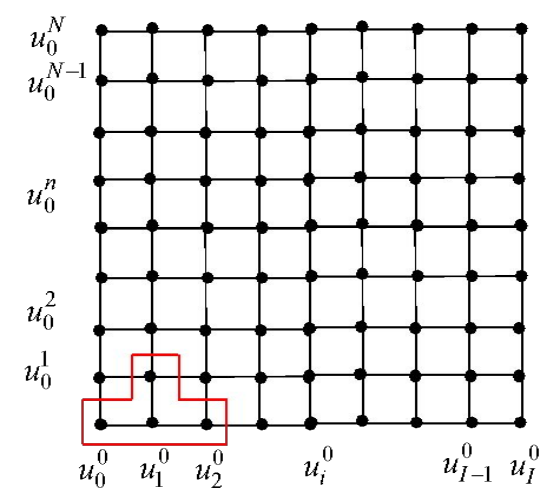
$$F = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{\rho h^2}{E} g_1 \\ -\frac{\rho h^2}{E} g_2 \\ -\frac{\rho h^2}{E} g_3 \\ \vdots \\ -\frac{\rho h^2}{E} g_{N-2} \\ -\frac{\rho h^2}{E} g_{N-1} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$[A] \cdot \{u\} = \{F\}$$

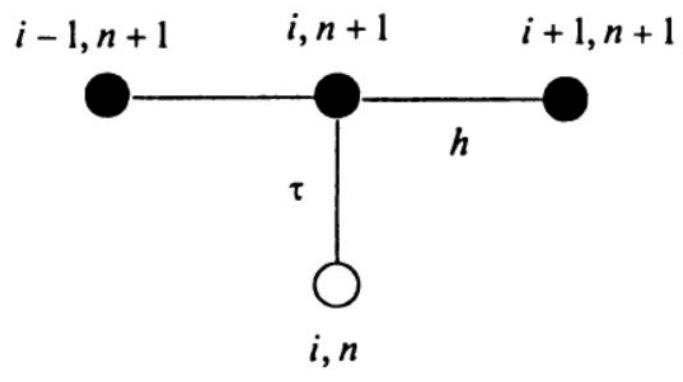
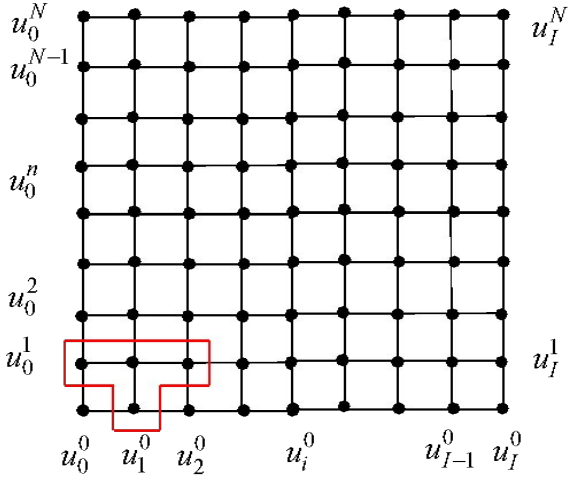
$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_0 - 2u_1 + u_2 = -\frac{\rho h^2}{E} g_1 \\ u_1 - 2u_2 + u_3 = -\frac{\rho h^2}{E} g_2 \\ u_2 - 2u_3 + u_4 = -\frac{\rho h^2}{E} g_3 \\ \vdots \\ u_{N-3} - 2u_{N-2} + u_{N-1} = -\frac{\rho h^2}{E} g_{N-2} \\ u_{N-2} - 2u_{N-1} + u_N = -\frac{\rho h^2}{E} g_{N-1} \\ -u_{N-1} + u_N = 0 \end{cases}$$

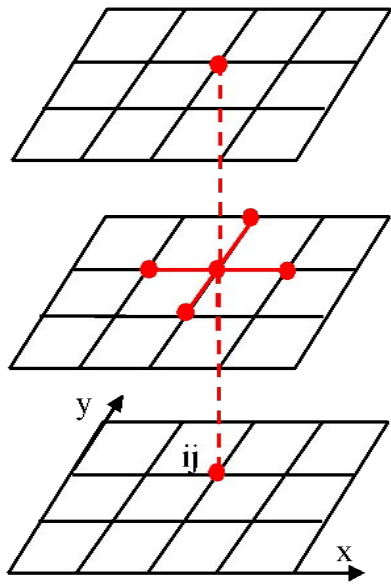
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Явная разностная схема



Неявная разностная схема





МКР для многомерных задач

$$\begin{cases}
 \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \frac{1}{\rho c} q(x, y, t) & x \in [0; l_x] \quad y \in [0; l_y] \quad t \in [0; T] \\
 u(x; y; 0) = u_0(x; y), \\
 u(0; y; t) = \varphi_1(y, t); \quad u(l_x; y; t) = \varphi_2(y, t); \quad u(x; 0; t) = \varphi_3(x, t); \quad u(x; l_y; t) = \varphi_4(x, t).
 \end{cases}$$

Вводим сетку

$$\omega = \left\{ \begin{array}{ll} x_i = (i-1)h_x, \quad i = \overline{1, N_x}, & h_x = l_x / (N_x - 1), \\ y_j = (j-1)h_y, \quad j = \overline{1, N_y}, & h_y = l_y / (N_y - 1), \\ t_m = (m-1)\tau, \quad m = \overline{1, N_t}, & \tau = T / (N_t - 1). \end{array} \right.$$

$$u_{t,ij}^m = \sigma a^2 \Lambda u_{ij}^{m+1} + (1-\sigma) a^2 \Lambda u_{ij}^m + \frac{1}{\rho c} q_{ij}^m$$

$$u_{t,ij}^m = \frac{u_{ij}^{m+1} - u_{ij}^m}{\tau}$$

$$\Lambda u_{ij}^{m+1} = u_{xx,ij}^{m+1} + u_{yy,ij}^{m+1} = \frac{u_{i+1,j}^{m+1} - 2u_{ij}^{m+1} + u_{i-1,j}^{m+1}}{h_x^2} + \frac{u_{ij+1}^{m+1} - 2u_{ij}^{m+1} + u_{ij-1}^{m+1}}{h_y^2}$$

+ граничные и начальные условия

$$\begin{cases}
 u_{ij}^1 = u_{0,ij}; \\
 u_{1j}^m = \varphi_{1j}^m; \quad u_{N_x j}^m = \varphi_{2j}^m; \quad u_{i1}^m = \varphi_{3,i}^m; \quad u_{iN_y}^m = \varphi_{4,i}^m.
 \end{cases}$$

Условие устойчивости

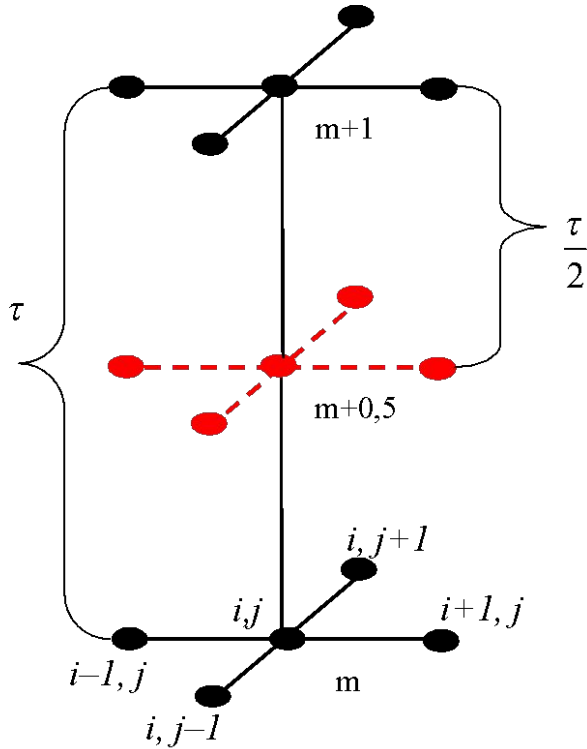
$$\tau \leq \frac{1}{(2-4\sigma)(1/h_x^2 + 1/h_y^2)} \quad 0 \leq \sigma < 0,5$$

Сходимость

$$O(\tau^2 + h_x^2 + h_y^2) \quad \sigma = 0,5$$

$$O(\tau + h_x^2 + h_y^2) \quad \text{иначе}$$

Метод переменных направлений



$$\begin{cases} \frac{u_{i,j}^{m+0,5} - u_{i,j}^m}{0,5\tau} = u_{\bar{x}x,i,j}^{m+0,5} + u_{\bar{y}y,i,j}^m + f_{i,j}^m \\ \frac{u_{i,j}^{m+1} - u_{i,j}^{m+0,5}}{0,5\tau} = u_{\bar{x}x,i,j}^{m+0,5} + u_{\bar{y}y,i,j}^{m+1} + f_{i,j}^m \end{cases}$$

$$\left\{ \frac{u_{i,j}^{m+0,5} - u_{i,j}^m}{0,5\tau} = \frac{u_{i+1,j}^{m+0,5} - 2u_{i,j}^{m+0,5} + u_{i-1,j}^{m+0,5}}{h_1^2} + \frac{u_{i,j+1}^m - 2u_{i,j}^m + u_{i,j-1}^m}{h_2^2} + f_{i,j}^m \right. \quad (*)$$

$$\left. \frac{u_{i,j}^{m+1} - u_{i,j}^{m+0,5}}{0,5\tau} = \frac{u_{i+1,j}^{m+0,5} - 2u_{i,j}^{m+0,5} + u_{i-1,j}^{m+0,5}}{h_1^2} + \frac{u_{i,j+1}^{m+1} - 2u_{i,j}^{m+1} + u_{i,j-1}^{m+1}}{h_2^2} + f_{i,j}^m \right. \quad (**)$$