Лекция Вычислительная механика

Основы вычислительной механики

К.т.н., доцент каф. ВМиМ
Каменских Анна Александровна
239-15-64

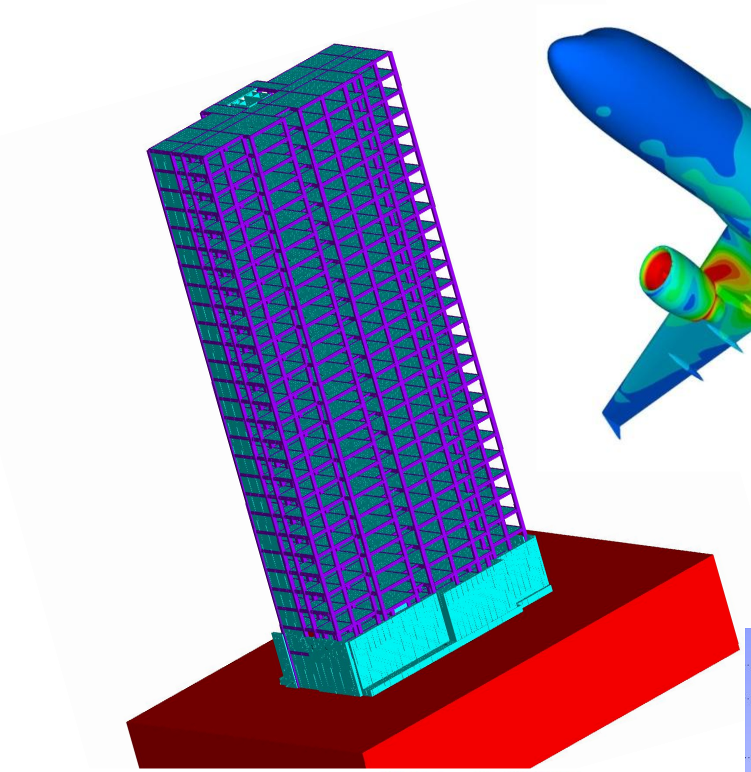
Основная литература

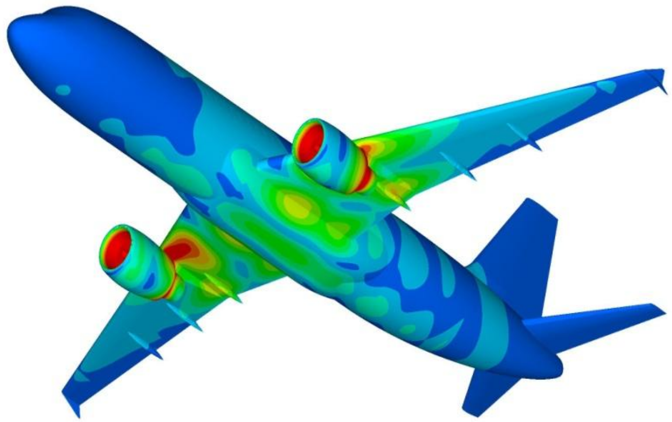
- Методы конечных элементов: пер. с англ. / К.-Ю. Бате. – Москва: Физматлит, 2010. – 1022 с.
- Самарский А.А. Теория разностных схем: учебное пособие для вузов / А.А. Самарский .– 1, 2, 3-е изд. – Москва: Наука, 1983. – 616 с.
- Сегерлинд Л.Дж. Применение метода конечных элементов: пер. с англ. / Л. Д. Сегерлинд; Под ред. Б. Е. Победри. – Москва: Мир, 1979 .— 392 с.
- Методы вычислительной математики: учебное пособие / М.Г. Бояршинов; Пермский государственный технический университет. – Пермь: Изд-во ПГТУ, 2008. – 420 с.
- Зенкевич О. Конечные элементы и аппроксимация: пер. с англ. / О. Зенкевич, К. Морган; Под ред. Н.С. Бахвалова. – Москва: Мир, 1986. – 318 с.
- Образцов И.Ф. Метод конечных элементов в задачах строительной механики летательных аппаратов: учебное пособие для вузов / И.Ф. Образцов, Л. М. Савельев, Х. С. Хазанов. – Москва: Высш. шк., 1985. – 392 с.

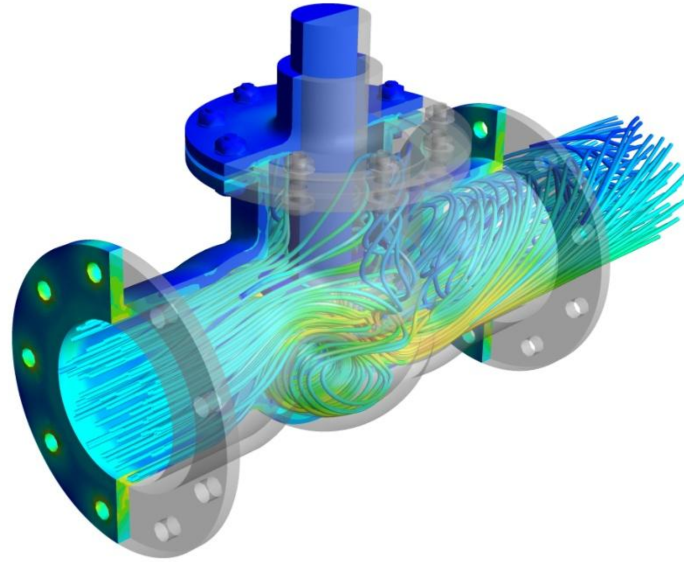
Дополнительная литература

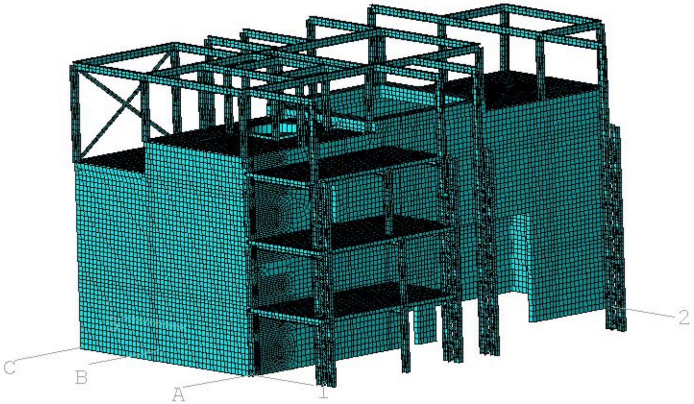
- Численные методы: учебное пособие для вузов / М.Г. Бояршинов; Пермский национальный исследовательский политехнический университет. – Пермь: Изд-во ПГТУ, 1998. Ч.5. – 2014. – 204 с.
- Голованов А.И. Метод конечных элементов в статике и динамике тонкостенных конструкций / А. И. Голованов, О. Н. Тюленева, А. Ф. Шигабутдинов. – М.: Физматлит, 2006. – 392 с.
- Победря Б.Е. Численные методы в теории упругости и пластичности: учебное пособие для вузов / Б. Е. Победря; Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова. – 2-е изд. – Москва: Изд-во МГУ, 1995. – 366 с.

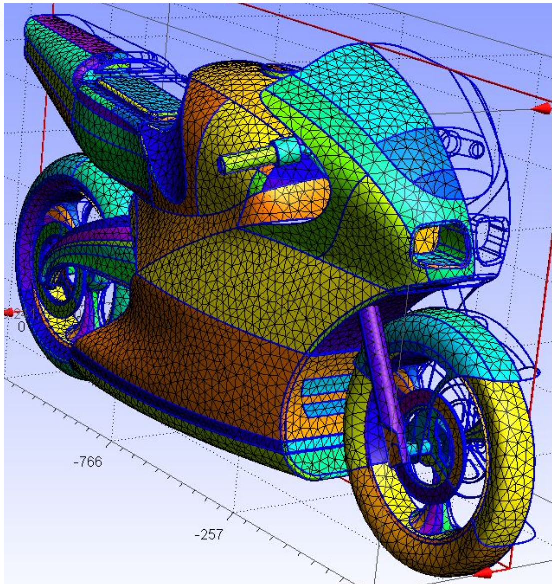
Вычислительная механика – раздел механики сплошных сред, в котором строятся **конечномерные модели** сплошных сред, используется **компьютерное моделирование и численные методы** для решения задач механики деформируемого твердого тела и механики жидкости и газа.

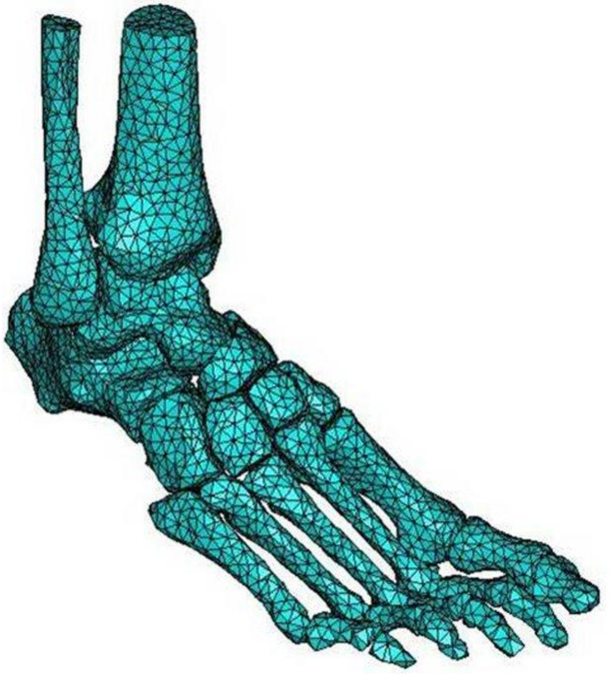












Вычислительный эксперимент – технология исследования сложных проблем, основанная на построении и анализе с помощью ЭВМ математических моделей изучаемого объекта.

Формулировка основных законов, управляющих данным объектами, процессами, явлением

↓

Построение математической модели

↓

Постановка численной реализации математической модели

↓

Составление программы на ЭВМ для реализации численных методов, отладка работы программы

↓

Проведение вычислительного эксперимента (серии экспериментов), анализ результатов

Три основных численных метода вычислительной механики

Метод конечных разностей (МКР) – метод численного решения краевых задач для дифференциальных уравнений называют также методом сеток. На рассчитываемую область наносится сетка с узлами. Все производные, входящие в дифференциальные уравнения и граничные условия, приближенно заменяются соответствующими разностными отношениями (по формулам численного дифференцирования) и, таким образом, выражаются через неизвестные узловые значения искомой функции. В результате приходим к системе линейных алгебраических уравнений относительно значений функций в узлах сетки.

Метод конечных элементов (МКЭ) – это метод приближённого численного решения физических задач. В его основе лежат две главные идеи: дискретизация исследуемого объекта на конечное множество элементов и кусочно-элементная аппроксимация исследуемых функций.

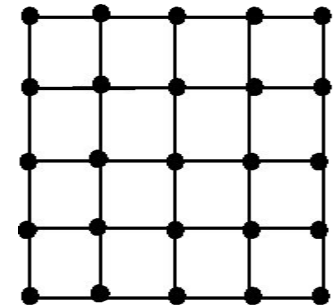
Метод граничных элементов (МГЭ) – метод предусматривает предельных переход от исходной постановки задачи для дифференциальных уравнений к соотношениям, связывающим неизвестные функции на границе области или на ее части. Эти соотношения представляют собой граничные интегральные уравнения, дискретный аналог которых дает САУ относительно узловых неизвестных относящихся к узлам на поверхности тела.

Схематически любой численный метод можно представить в виде

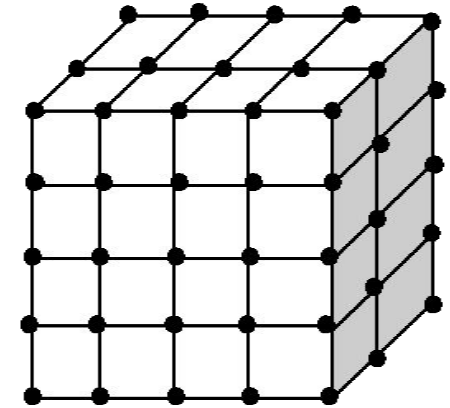
Построение дискретного аналога области изменения аргумента

Дискретизация математической модели, в результате которой получается алгебраический аналог математической модели (система алгебраических уравнений)

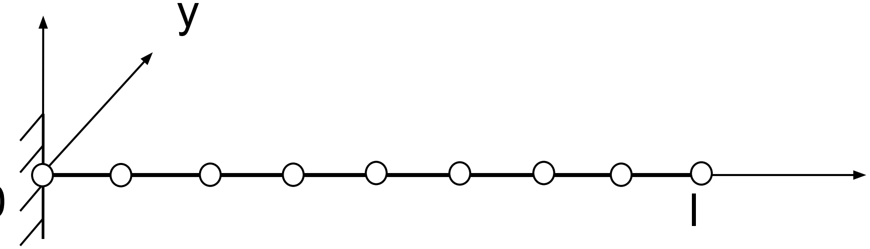
Решение СЛАУ любым методом: метод Гаусса, метод прогонки, метод LU-разложения, итерационные методы решения СЛАУ (Зейделя, простых итераций)



N



N



Численный метод сходится, если при неограниченном росте числа алгебраических уравнений (узловых неизвестных) решение дискретной задачи стремится к решению исходной задачи.

Численный метод называют устойчивым, если в процессе счета погрешность округления не накапливается и не искажает значительно конечный результат.

Метод конечных разностей (МКР)

Область непрерывного изменения аргумента (отрезок, прямоугольник и т.д.) заменяется конечным (дискретным) множеством точек (узлов), называемым *сеткой*.

Вместо функции непрерывного изменения аргумента рассматриваются функции дискретного аргумента, определенные в узлах сетки и называемые *сеточными функциями*.

Производные, входящие в дифференциальные уравнения и краевые условия, заменяются (аппроксимируются) разностными соотношениями, т.е. линейными комбинациями значений сеточных функций в некоторых узлах сетки.

В результате краевая задача для дифференциального уравнения заменяется системой линейных, если исходная задача была линейной, алгебраических уравнений (системе разностных уравнений) – *разностной схемой*.

Как выбрать сетку?

Как написать разностную схему?

Насколько хорошо разностная схема аппроксимирует исходную задачу?

Устойчива ли разностная схема и в каком смысле?

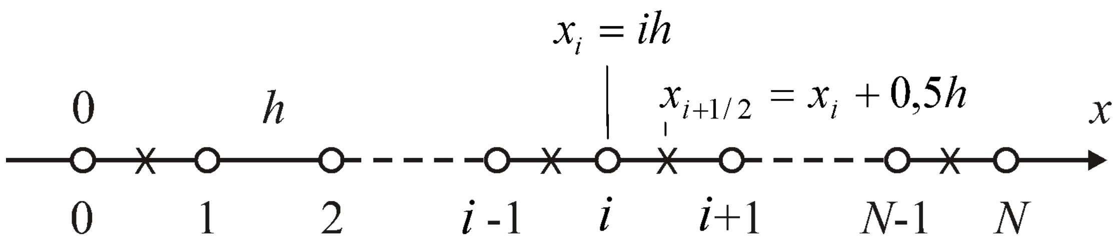
Какова скорость сходимости решения разностной задачи к решению исходной задачи?

Сетки и сеточные функции

Разностная сетка - конечное множество точек заменяющее область непрерывного изменения аргумента.

Сами точки – *узлы сетки*, а функции, определенные на этой сетке, - *сеточными функциями*.

<u>Равномерная сетка на отрезке</u>



Множество точек $x_i = ih$, $i = 0,1,2,\ldots,N$ называется равномерной сеткой на отрезке $[0,l]$ и

обозначается $\overline{\omega} = \left\{ x_i = ih \middle| i = \overline{0, N} \right\}$, где h – шаг сетки.

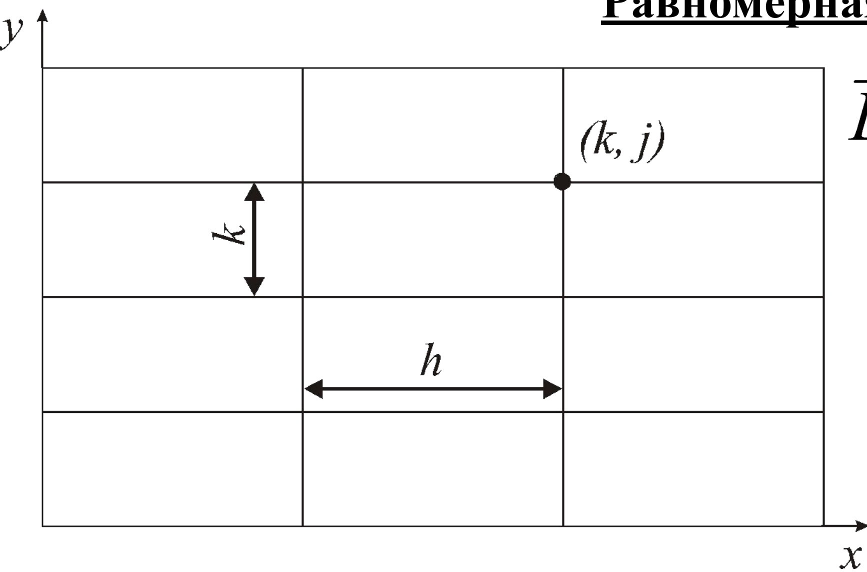
В качестве области определения сеточных функций кроме узлов, называемых еще *целыми точками*, часто используют *полуцелые точки* $x_{i+1/2} = x_i + 0{,}5h$, отмеченные на рисунке крестиками.

<u>Неравномерная сетка на отрезке</u>

Рассмотрим тот же отрезок $[0,l]$. Введя произвольные точки $0<x_1<x_2<\ldots<x_{N-1}<l$, разобьем его на N частей. Тогда получим сетку с шагом $h_i = x_i - x_{i-1}$, который зависит от номера i узла x_i. Если $h_i \neq h_{i+1}$ хотя бы для одного номера i , то сетку называют неравномерной.

$$\sum_{i=1}^{N} h_i = l$$

Равномерная сетка на плоскости



$$\overline{D} = \{x = (x_1, x_2) | 0 \le x_\alpha \le l_\alpha, \alpha = 1,2\}$$

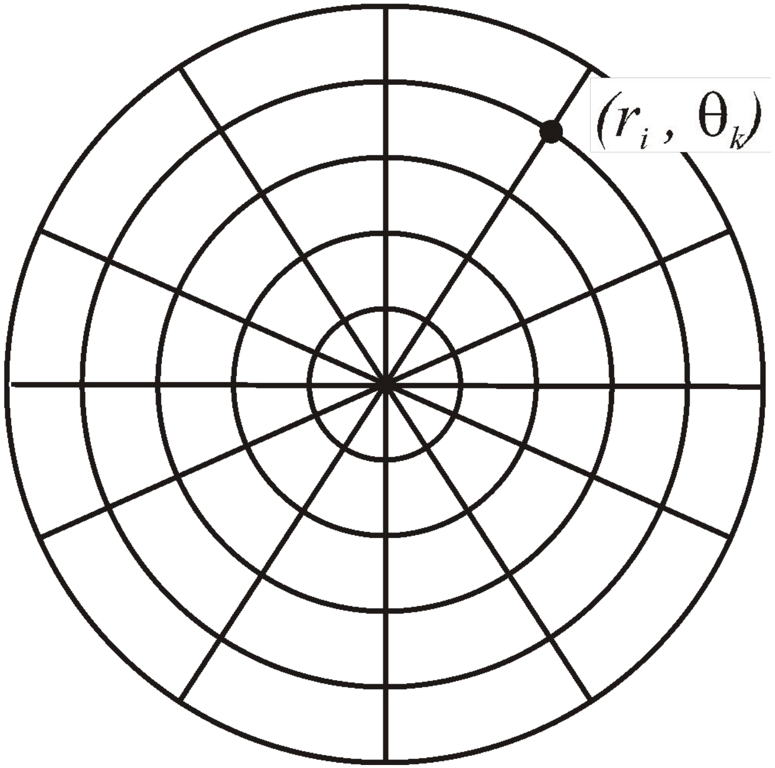
$$D = \{0 \le x \le d, 0 \le x \le b\}$$

Построим на каждом отрезке $0 \le x \le d$, $0 \le y \le b$ сетку с шагом $h = d/N_1$ и $k = b/N_2$. Множество узлов $(x_i;y_j)$ с координатами $x_i = ih$, $y_j = jk$ назовём сеткой в прямоугольнике D.

Построим на каждом отрезке $0 \le x_\alpha \le l_\alpha$ сетку $\overline{\omega}_\alpha = \{x_{\alpha i_\alpha} = i_\alpha h_\alpha | i_\alpha = \overline{0, N_\alpha}\}$ с шагом $h_\alpha = l_\alpha / N_\alpha$. Множество узлов $(x_{1_{i_1}}, x_{2_{i_2}})$ с координатами $x_{1i_1} = i_1 h_1$, $x_{2i_2} = i_2 h_2$ $(x_k = kh, k = 0,\ldots N, h = d/N; y_j = jp, j = 0,1\ldots,M, p = b/M)$ назовем сеткой в прямоугольнике $\overline{D}$.

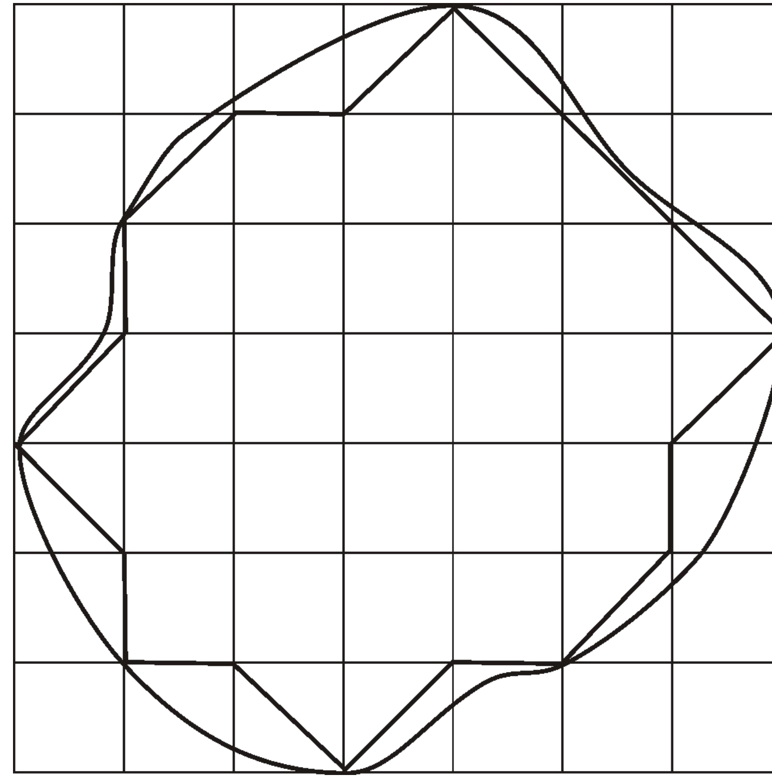
$$\overline{\omega} = \{x = (x_{1i_1}, x_{2i_2}) | x_{\alpha i_\alpha} = i_\alpha h_\alpha, i_\alpha = \overline{0, N_\alpha}; \alpha - 1,2\}$$

Эта сетка равномерна по каждому из переменных x и y. Если хотя бы одна из сеток $\overline{\omega}_\alpha$ неравномерна, то сетка $\overline{\omega}$ называется неравномерной. Если $h_1 = h_2$, то сетка называется квадратной, $h_1 \ne h_2$ - прямоугольной.



Разностная сетка на плоскости кольца

Область G представляет собой кольцо, покроем его окружностями $r_i = R_1 \exp(ih)$, где $h = (1/N)\ln(R_2/R_1)$, $i = 0,1,\dots,N$ и лучами $\theta_k = kp$, $p = 2\pi/M$, $k = 0,1,\dots,M-1$.



Разностная сетка на области сложной формы

Проведем прямые

$$x_{1i_1} = i_1 h_1,\ \ \mathrm{i}_1 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \mathrm{h}_1 > 0,$$

$$x_{2i_2} = i_2 h_2\ \ \mathrm{i}_2 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \mathrm{h}_2 > 0.$$

Тогда на плоскости получим сетку с узлами $(i_1 h_1, i_2 h_2)$,, $i_1, i_2 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Эта сетка равномерна по каждому направлению. Нас интересуют только те узлы, которые принадлежат области G с границей Γ $G = G \cup \Gamma$.

Аппроксимация дифференциальных операторов первой и второй производных на равномерной сетке

Рассмотрим возможные способы аппроксимации дифференциального оператора вида:

$$A[T] = dT / dx \qquad (1)$$

определенного на множестве непрерывных функций в области $G=\{d<x<b\}$, имеющих ограниченные производные третьего порядка включительно.

$$dT / dx = \lim_{h \to 0} [T(x+h) - t(x)] / h$$

$$dT / dx \approx [T(x+h) - t(x)] / h$$

Правое разностное отношение

$$(2) \qquad T_{x,k} = (T_{k+1} - T_k) / h$$

Левое разностное соотношение

$$T_{\bar{x},k} = (T_k - T_{k-1}) / h \qquad (3)$$

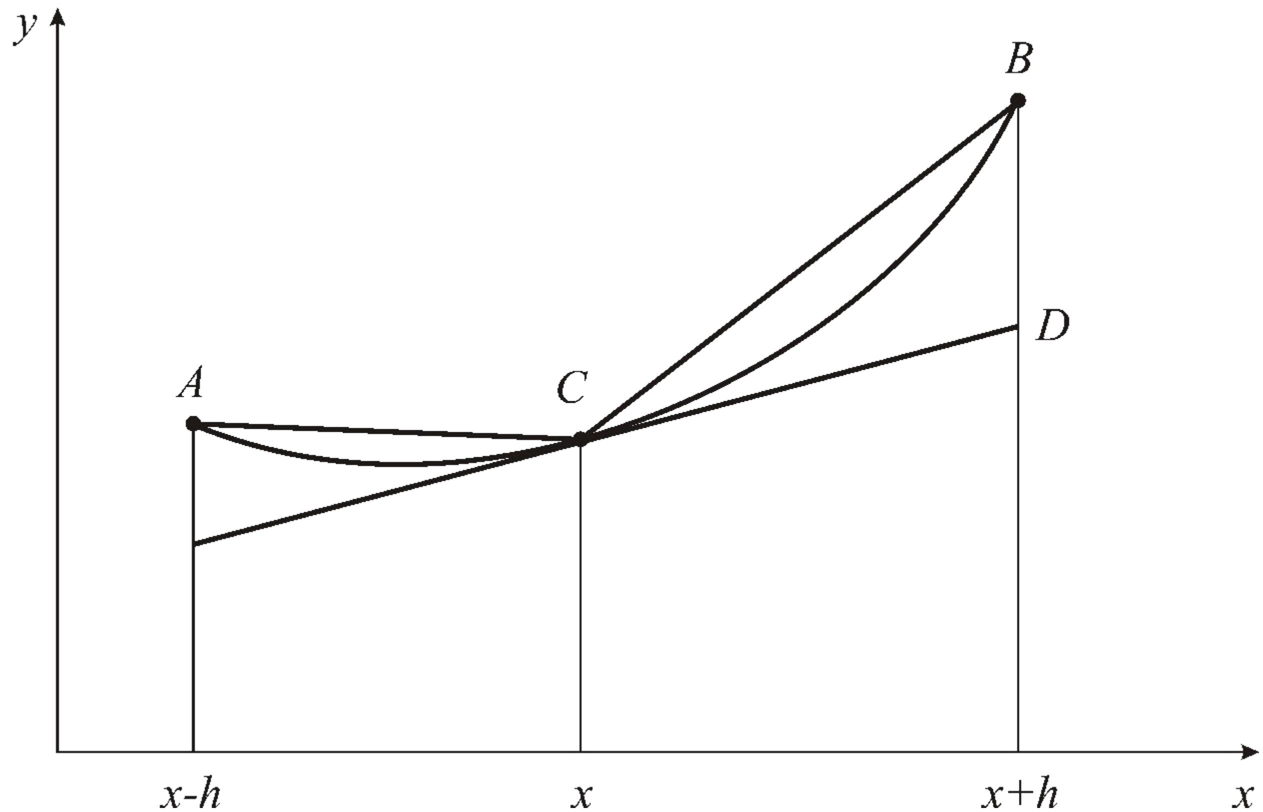
Линейная комбинация (2) и (3)

$$\sigma T_{x,k} + (1-\sigma) T_{\bar{x},k} \qquad (4)$$

При σ = 1/2 получим центральное разностное соотношение

$$T_{x,k} = (T_{k+1} - T_{k-1}) / (2h) \qquad (5)$$

Геометрическая интерпретация разностей



Линия D отражает истинное значение производной в точке C, правую разность – линия CB, левую – AC, центральную – AB. Значение тангенса угла наклона прямой AB ближе к значению тангенса прямой D.

При замене оператора $A[T]$ разностным выражением (2)-(4) допускается погрешность $\psi_h(x) = A_h[T_h] - (A[T])_h$ называемая *погрешностью аппроксимации* оператора A разностным оператором A_h в точке x.

Рассмотрим **аппроксимацию второй производной** $A[T] = d^2T/dx^2$. В отличие от первой производной, для которой достаточно двухточечного шаблона, для второй производной выберем **трехточечный шаблон** (x_{k-1}, x_k, x_{k+1}).

$$T_k'' = (T_k')' = \frac{T_{k+1}' - T_k'}{h} =$$

$$= \frac{(T_{k+1} - T_k)/h - (T_k - T_{k-1})/h}{h} = \frac{T_{k+1} - 2T_k + T_{k-1}}{h^2}$$