Коррелатный способ уравнивания

$r = n - k$ строгих математических условий вида

$$f_1(X_1, X_2, \ldots, X_n) = 0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$f_r(X_1, X_2, \ldots, X_n) = 0$$

Уравнения математической связи.

Замена X_i на x_i дает

$$f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = w_1$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$f_r(x_1, x_2, \ldots, x_n) = w_r$$

Коррелатный способ уравнивания

Устранение невязки (неопределенности) введением в измерения поправок v_i.

Тогда уравнения связи будут

$$f_1(x_1+v_1, x_2+v_2, \ldots, x_n+v_n)=0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$f_r(x_1+v_1, x_2+v_2, \ldots, x_n+v_n)=0$$

$$f(x)+f(v) \ = Bv+(Bx+c)=Bv+w=0$$

При нелинейных уравнениях связи – ряд *Тейлора*

$$f_i(x_1+v_1, x_2+v_2, \ldots, x_n+v_n)=f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)+$$

$$+\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_1}\right)_0 \cdot v_1+\ldots+\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_n}\right)_0 \cdot v_n$$

Коррелатный способ уравнивания

$$\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\right)_0 = b_{ij}$$

Развернутая запись

$$\begin{cases} b_{11}\cdot v_1 + \ldots + b_{n1}\cdot v_n + w_1 = 0 \\ b_{12}\cdot v_1 + \ldots + b_{n2}\cdot v_n + w_2 = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_{1r}\cdot v_1 + \ldots + b_{nr}\cdot v_n + w_r = 0 \end{cases}$$

Матричная запись

$$B\cdot v + w = 0$$

r условных уравнений поправок с n неизвестными

Коррелатный способ уравнивания

Матрица *B* – строк по количеству условий *r*, столбцов по количеству измерений n

v – вектор-столбец из *n* поправок в измерения

w – вектор-столбец из *r* невязок по условию

$$\underset{r\times n}{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{r1} & b_{r2} & \dots & b_{rn} \end{pmatrix} \qquad v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_n \end{pmatrix} \qquad w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \dots \\ w_r \end{pmatrix}$$

$$\underset{r\times n}{B} \cdot \underset{n\times 1}{v} + \underset{r\times 1}{w} = 0$$

Коррелатный способ уравнивания

Формулировка задачи в матричном виде:

найти минимум ЦФ $\Phi = [pv^2] = v^{\mathrm{T}}Pv = min$

когда поправки v связаны УУП $B \cdot v + w = 0$.

Обозначения $\lambda_i = -2k_i$, k - коррелата

Функция *Лагранжа* $\Phi(v_1, v_2, \ldots, v_n) = [pv^2] +$

$+ \lambda_1 \cdot f_1 + \ldots + \lambda_k \cdot f_r =$

$= v^{\mathrm{T}}Pv - 2k^{\mathrm{T}} \cdot (B \cdot v + w)$

Коррелатный способ уравнивания

Минимизация ФЛ – производные по v с приравниванием к 0 – система уравнений

$$\frac{\partial \Phi}{\partial v_i} = 2p_i v_i - 2k_1 b_{i1} - 2k_2 b_{i2} - \ldots - 2k_r b_{ir} = 0$$

или современная матричная запись

$$\frac{\partial \hat{O}}{\partial v} = 2v^T P - 2k^T B = 0$$

$$v^T P = k^T B \Rightarrow B^T \cdot k = P \cdot v \Rightarrow P^{-1} \cdot B^T \cdot k = v$$

k – вектор-столбец коррелат по количеству условий ($r \times 1$)

Коррелатный способ уравнивания

Зная коррелаты можно найти поправки.

Для коррелат: в УУП $Bv + w = 0$

подставляем КУП $P^{-1}B^{т}к = v$ - имеем СНУК

$$BP^{-1}B^{т}к + w = 0$$

$$R \cdot k + w = 0$$

-СНУК (система нормальных уравнений коррелат) - развернутый вид

$$\begin{cases} R_{11} \cdot k_1 + R_{12} \cdot k_2 + \ldots + R_{1r} \cdot k_r + w_1 = 0 \\ R_{21} \cdot k_1 + R_{22} \cdot k_2 + \ldots + R_{2r} \cdot k_r + w_2 = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ R_{r1} \cdot k_1 + R_{r2} \cdot k_2 + \ldots + R_{rr} \cdot k_r + w_r = 0 \end{cases}$$

$$R_{ij} = [q_{ii} b_i b_j]$$

Коррелатный способ уравнивания

Размерности системы нормальных уравнений коррелат (по числу условий)

$$\underset{r\times r}{R}\cdot \underset{r\times 1}{k} + \underset{r\times 1}{w} = 0$$

Из решения СНУК - коррелаты

$$k = - R^{-1} \cdot w \text{ или } k = -Q \cdot w,$$

из них поправки в измерения $v = -P^{-1}B^{\mathrm{T}}Qw$

и уравненные измерения $\hat{y} = y + v$

По уравненным измерениям и схеме сети вычисляем уравненные элементы положения (можно все через матрицу F). Пример.

Коррелатный способ уравнивания

Контроли вычисления поправок:

$$\Phi = v^T P v$$

$$\Phi = (P^{-1}B^{т}\kappa)^{T} P (P^{-1}B^{т}\kappa) = \kappa^{т} B P^{-1} P P^{-1} B^{т} \kappa =$$

$$= \kappa^{т} B P^{-1} B^{т} \kappa = \kappa^{т} R \kappa =$$

$$= w^{T} Q R Q w = w^{T} Q w =$$

$$= -\kappa^{T} w =$$

$$= \kappa^{T} B v \ \ldots$$

Коррелатный способ уравнивания

-контроль вычислений:

1.по целевой функции уравнивания

2. сумма поправок ***<u>по условию</u>*** уничтожает невязку:

$$B \cdot v + w = 0 \Rightarrow B \cdot v = - w$$

-контроль уравнивания:

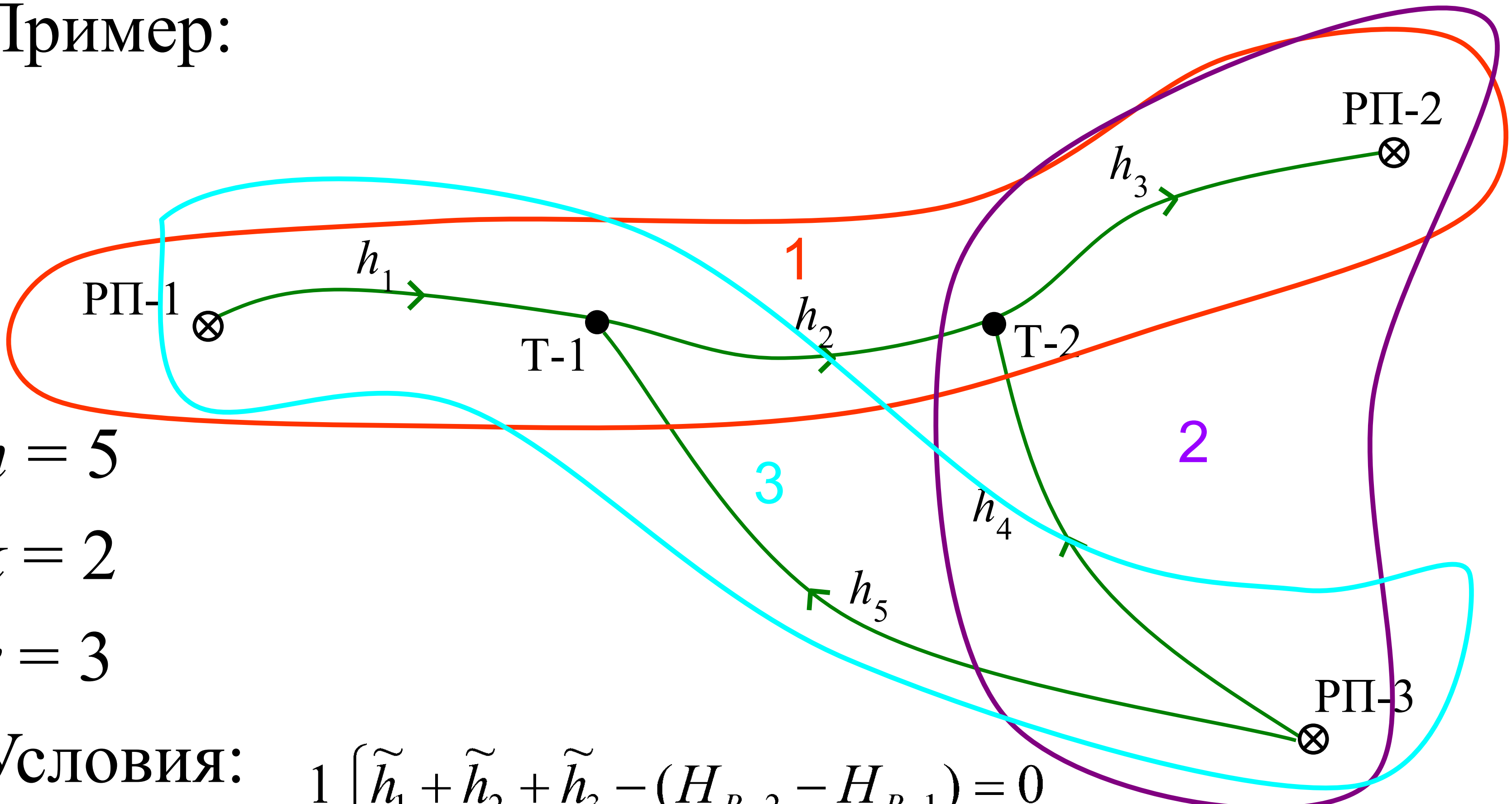
1. математические условия по уравненным измерениям не дают невязки: $f(y_{ур}) = 0$ или $By_{ур} + c = 0$;

$$B(y + v) + c = 0 \Rightarrow By + c + Bv = w + (- w) = 0$$

2. Из комбинаций уравненных измерений получаем уравненные элементы положения.

Коррелатный способ уравнивания

Пример:



$n = 5$

$k = 2$

$r = 3$

Условия:

(неоднозначны)

$$\begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{cases} \tilde{h}_1 + \tilde{h}_2 + \tilde{h}_3 - (H_{P-2} - H_{P-1}) = 0 \\ \tilde{h}_4 + \tilde{h}_3 - (H_{P-2} - H_{P-3}) = 0 \\ \tilde{h}_1 - \tilde{h}_5 - (H_{P-3} - H_{P-1}) = 0 \end{cases}$$

Коррелатный способ уравнивания

Подозрение на зависимость – их сумма и найти такое же условие.

Из условий- матрица условных уравнений поправок:

$$\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\begin{cases} \tilde{h}_1 + \tilde{h}_2 + \tilde{h}_3 - (H_{P-2} - H_{P-1}) = 0 \\ \tilde{h}_4 + \tilde{h}_3 - (H_{P-2} - H_{P-3}) = 0 \\ \tilde{h}_1 - \tilde{h}_5 - (H_{P-3} - H_{P-1}) = 0 \end{cases} \Rightarrow \underset{3\times 5}{B} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Подстановка в уравнения связи измеренных величин дает вектор невязок *w* размера (3x1).

Обычно задается ОЕВ и ПКМ хода и далее-

Коррелатный способ уравнивания

Обратные веса $q_{ii} = \dfrac{L_i}{c}$, матрица обратных весов

$$\underset{n\times n}{P^{-1}} = \begin{pmatrix} q_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & q_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & q_{nn} \end{pmatrix}$$

$$c = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_{\text{êì}}^2}$$

варианты с c

Матрица нормальных уравнений коррелат (разверн)

$$\underset{3\times 3}{R} = BP^{-1}B^T = \frac{1}{c}\begin{pmatrix} (L_1 + L_2 + L_3) & L_3 & L_1 \\ L_3 & (L_3 + L_4) & 0 \\ L_1 & 0 & (L_1 + L_5) \end{pmatrix}$$

Коррелатный способ уравнивания

Тогда правило составление матрицы по схеме.

Коррелаты:

$$\underset{3\times1}{k} = -Q\cdot w = c\cdot\begin{pmatrix}(L_1+L_2+L_3) & L_3 & L_1 \\ L_3 & (L_3+L_4) & 0 \\ L_1 & 0 & (L_1+L_5)\end{pmatrix}^{-1}\cdot\begin{pmatrix}w_1\\ w_2\\ w_3\end{pmatrix}$$

Поправки в измерения:

$$\underset{5\times1}{v} = P^{-1}\cdot B^T\cdot k = \begin{pmatrix}q_{11} & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & q_{22} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & q_{33} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & q_{44} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & q_{55}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}k_1\\ k_2\\ k_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}q_{11} & 0 & q_{11}\\ q_{22} & 0 & 0\\ q_{33} & q_{33} & 0\\ 0 & q_{44} & 0\\ 0 & 0 & -q_{55}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}k_1\\ k_2\\ k_3\end{pmatrix}$$

Коррелатный способ уравнивания

Предпочтительность способов уравнивания:

n – общее число измерений

κ – число необходимых измерений

r – число избыточных измерений.

Счет ручной, счет машинный.

Параметрический: решают систему из $k \times k$ уравнений;

Коррелатный: решают систему из $r \times r$ уравнений;

Когда r меньше k? – любые хода.

Когда k меньше r? – любые мн. засечки.

Коррелатный способ уравнивания

Основные условия в геодезических построениях:

1. Высотные построения, в ходах всегда 1

$$\sum_{i=1}^{n'}(\widetilde{h}_i) - (H_K - H_H) = 0$$

условие высотных полигонов. В сетях r условий полигонов r нормальных уравнений коррелат.

Линейная независимость полигонов.

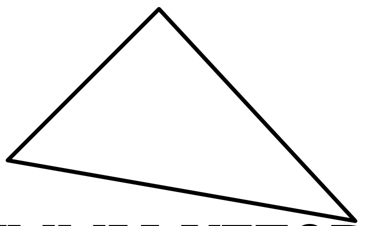
Коррелатный способ уравнивания

Угловые условия.

Линейные:

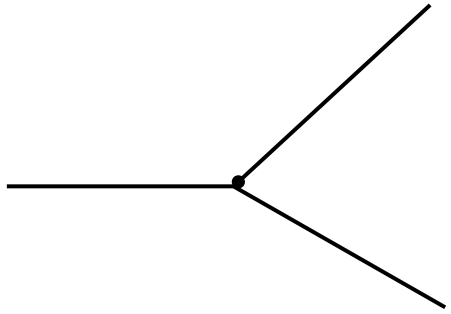
1. Условия фигур по сумме углов

$$\sum_{i=1}^{n'}(\tilde{\beta}_i) - \sum_{i=1}^{n'}(\beta_i)_T = 0$$



2. Условие горизонта по замыканию суммы углов в 360°

$$\sum_{i=1}^{n'}(\tilde{\beta}_i) - 360^\circ = 0$$



Коррелатный способ уравнивания

3.Триангуляция – дирекционных углов, базисное, полюсное, координатное.

4. Полигонометрические сети:

1 ход – всегда 3 условия (2 координатных, 1 ориентирования)

Для дирекционных углов $$\alpha_H + \sum_{i=1}^{n} (\tilde{\beta}_i) - 180^\circ \cdot n = \alpha_K$$

Для координат

$$\begin{cases} x_H + \sum_{i=1}^{n} \Delta\tilde{x}_i = x_K \\ y_H + \sum_{i=1}^{n} \Delta\tilde{y}_i = y_K \end{cases}$$

Коррелатный способ уравнивания

Дополнительные возможности:

1. Вывести формулы уравнивания если работают с уравненными измерениями
2. Функция условной оптимизации в Excel (поиск решения)
3. Функция условной оптимизации в Matlab
4. Изменение оценки точности определения высот точек при разных комбинациях измерений до уравнивания и после.