

## ЛЕКЦИЯ 2

### 2.1. Системы координат, применяемые в механике полета

- инерциальные СК,
- земные СК
- подвижные, т.е. движущимися вместе с ЛА.

Стандартизация различных СК - ГОСТ №20058-80

## ***Общий принцип построения СК:***

- выбирается основная координатная плоскость системы
- направление основной оси и расположение начала отсчета (начала СК).
- оговаривают, соответствует их положение некоторому фиксированному моменту времени или оно выбирается средним за некоторый промежуток времени.

## *Основные координатные плоскости:*

- плоскость эклиптики,
- плоскость экватора,
- плоскость движения (орбиты) ЛА,
- плоскость, касательная к поверхности Земли в точке старта (плоскость местного горизонта),
- плоскость геометрической симметрии ЛА и др.

## *СК могут быть:*

- прямоугольные,
- косоугольные,
- криволинейные

## **Начало СК может быть:**

- расположено в центре Земли
- или на поверхности Земли (планеты),
- в центре масс
- в характерной точке ЛА (например, в центре объема).

# Геоцентрическая экваториальная инерциальная СК (СК $O_{II} X_{II} Y_{II} Z_{II}$ )

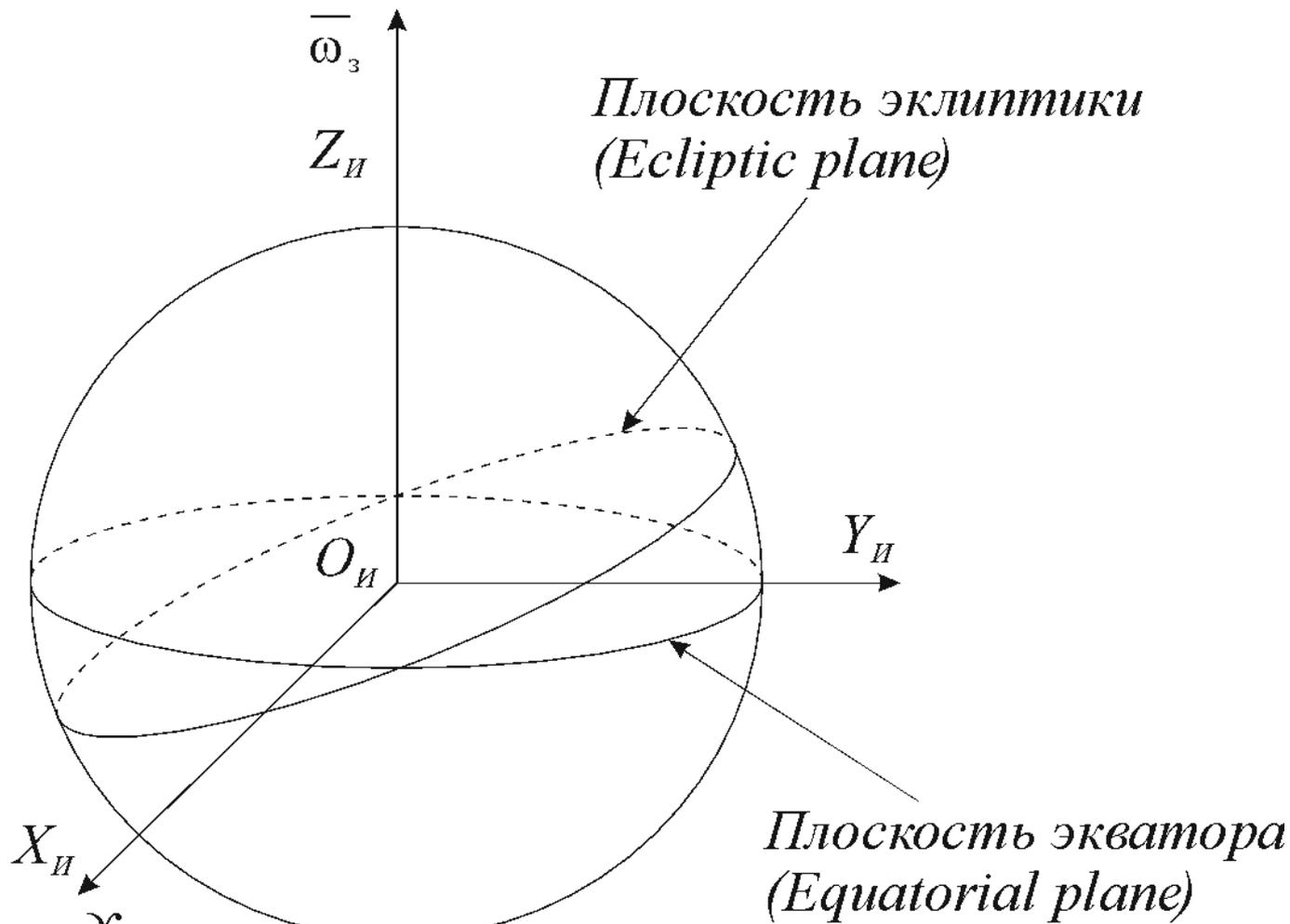


Рис.2.1

*Equinox point*

# Земная геоцентрическая СК ( $O X_{ГЦ} Y_{ГЦ} Z_{ГЦ}$ ) и земная географическая СК ( $O_0 X_g Y_g Z_g$ )

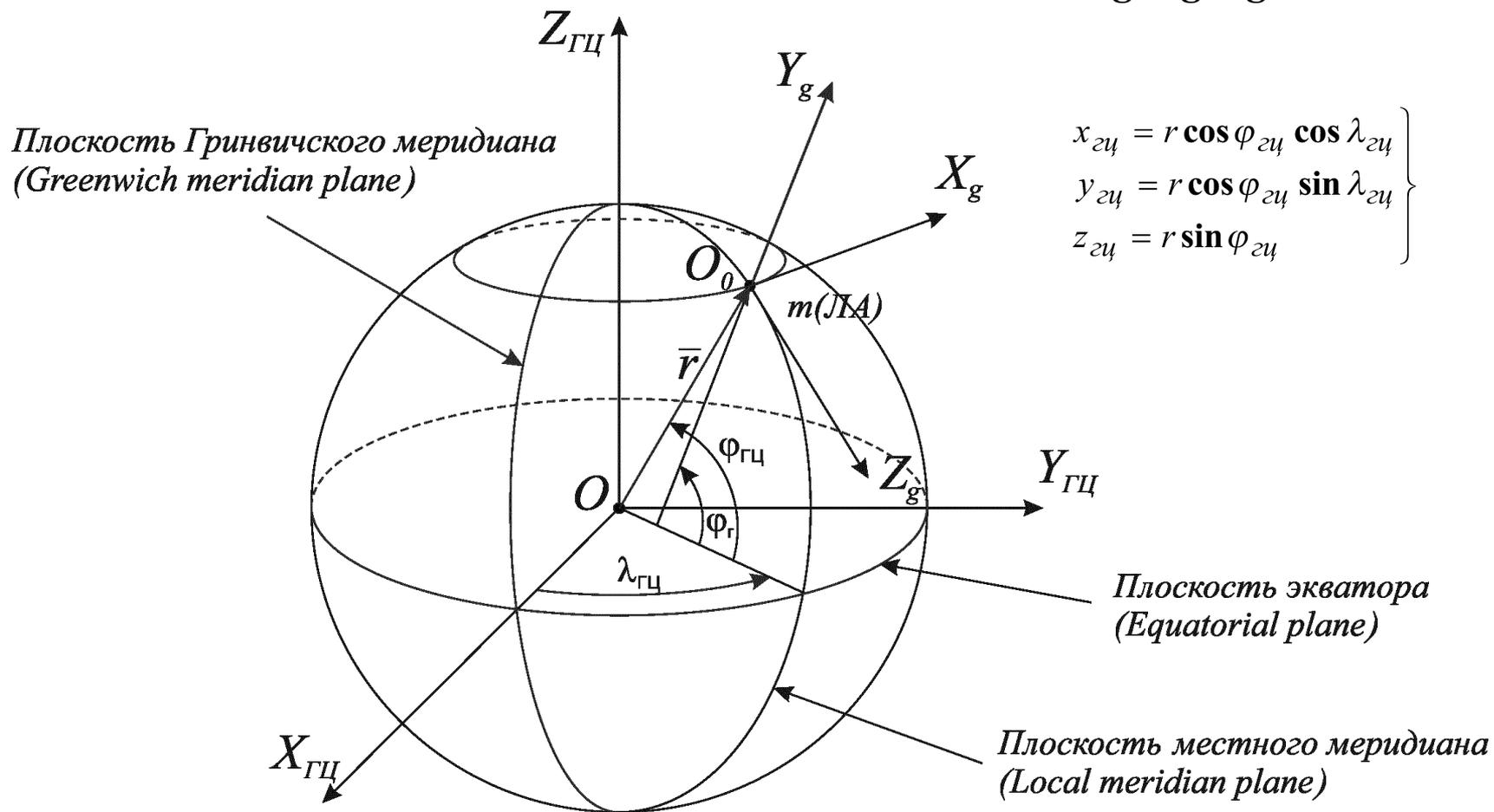
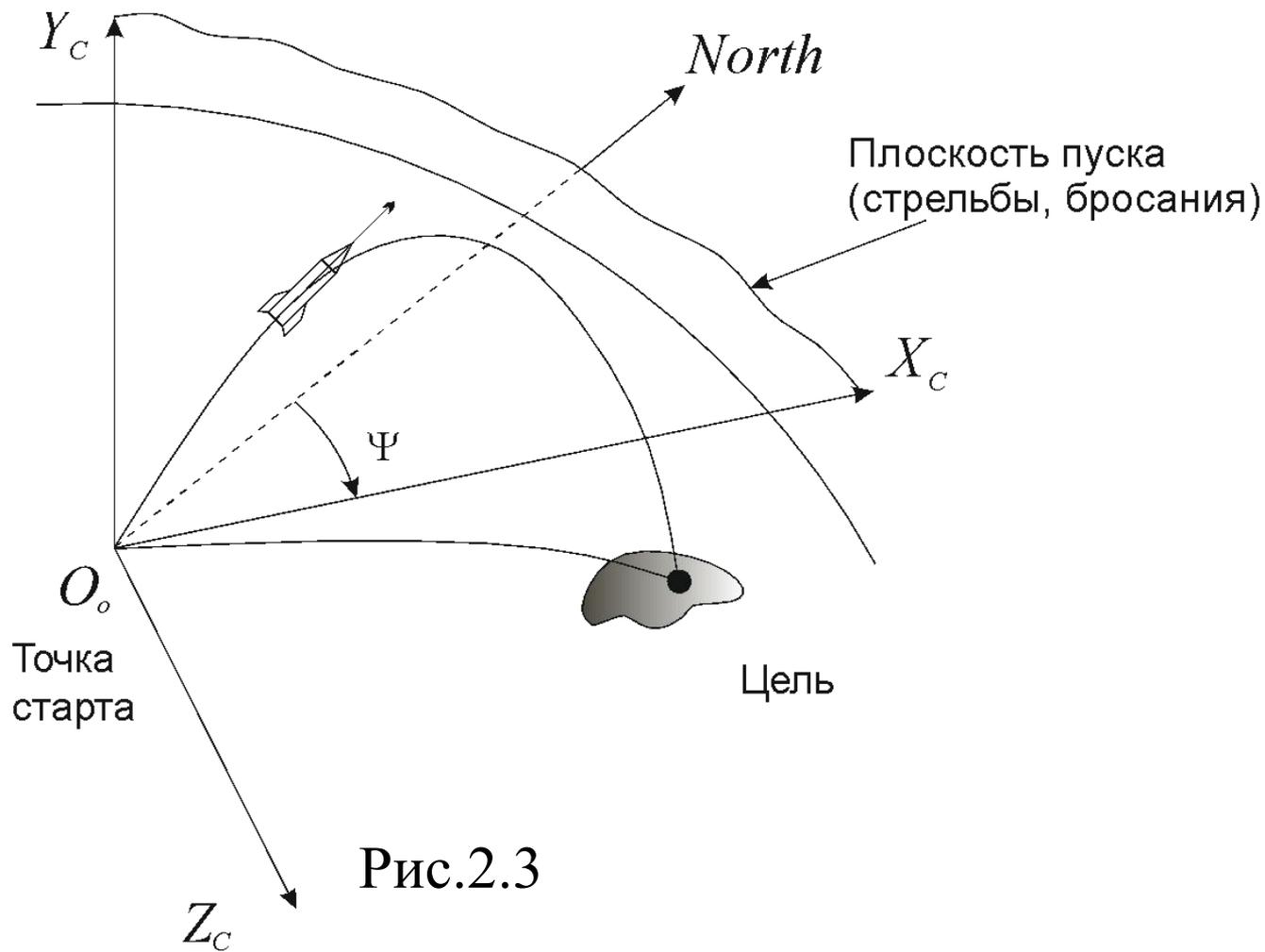
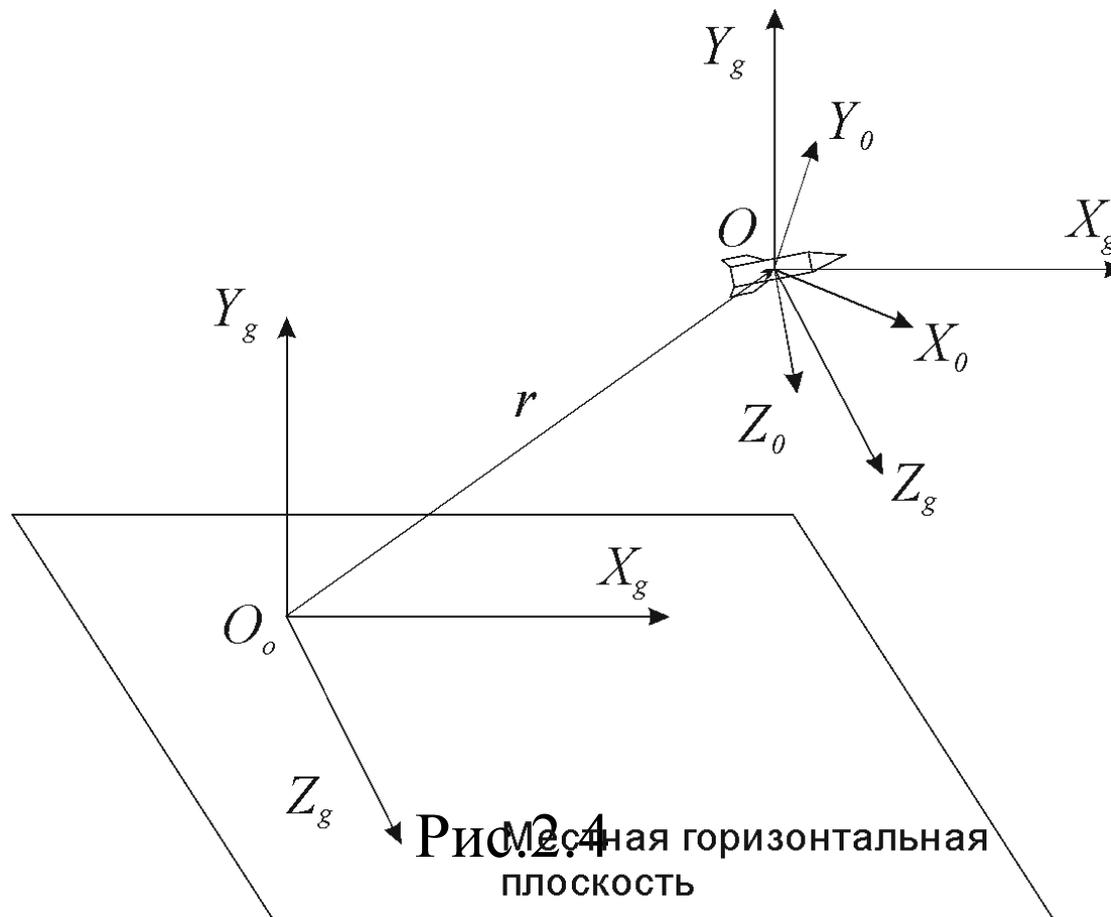


Рис.2.2

# Земная стартовая СК



# Земная нормальная СК , земная подвижная система координат и нормальная система координат



# Связанная система координат (ОХУZ)

- 1 - Вертикальная плоскость симметрии ЛА (ОХУ),
- 2- Горизонтальная плоскость симметрии ЛА (ОХZ)

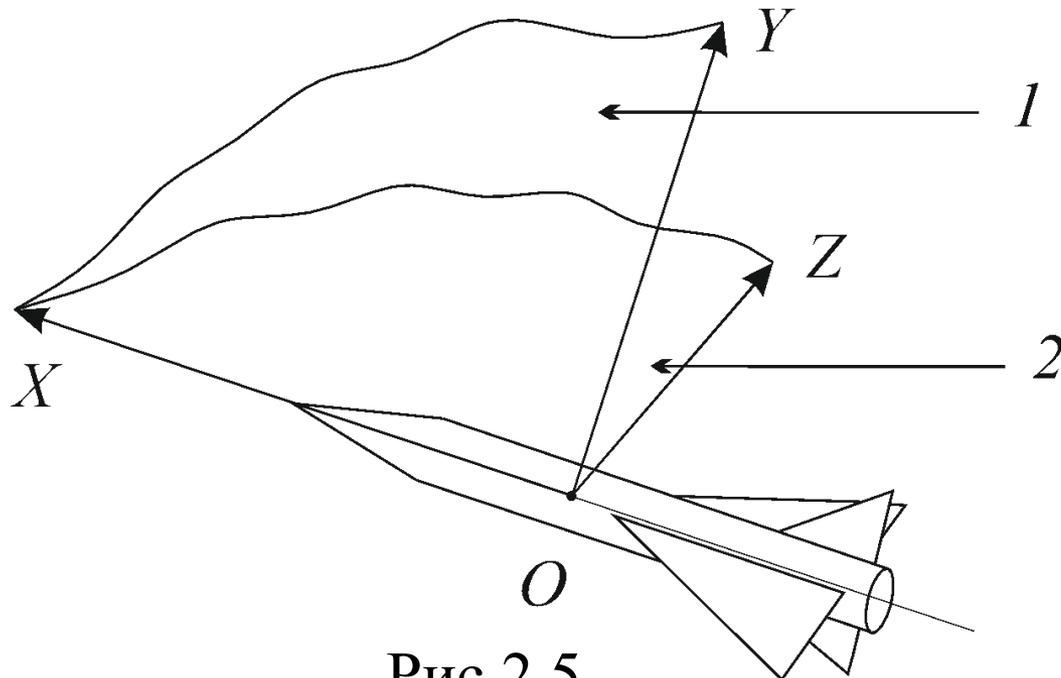


Рис.2.5

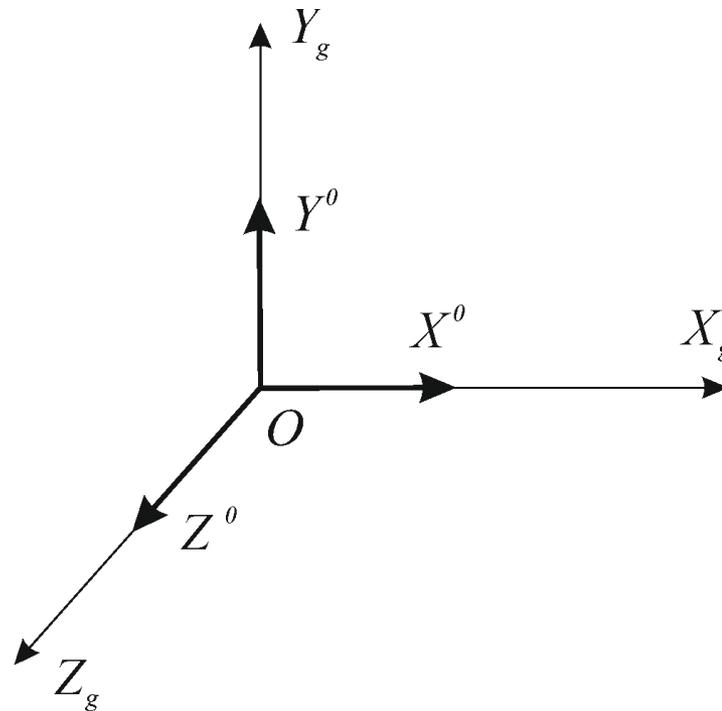


## 2.2. Углы, используемые для определения углового различия систем

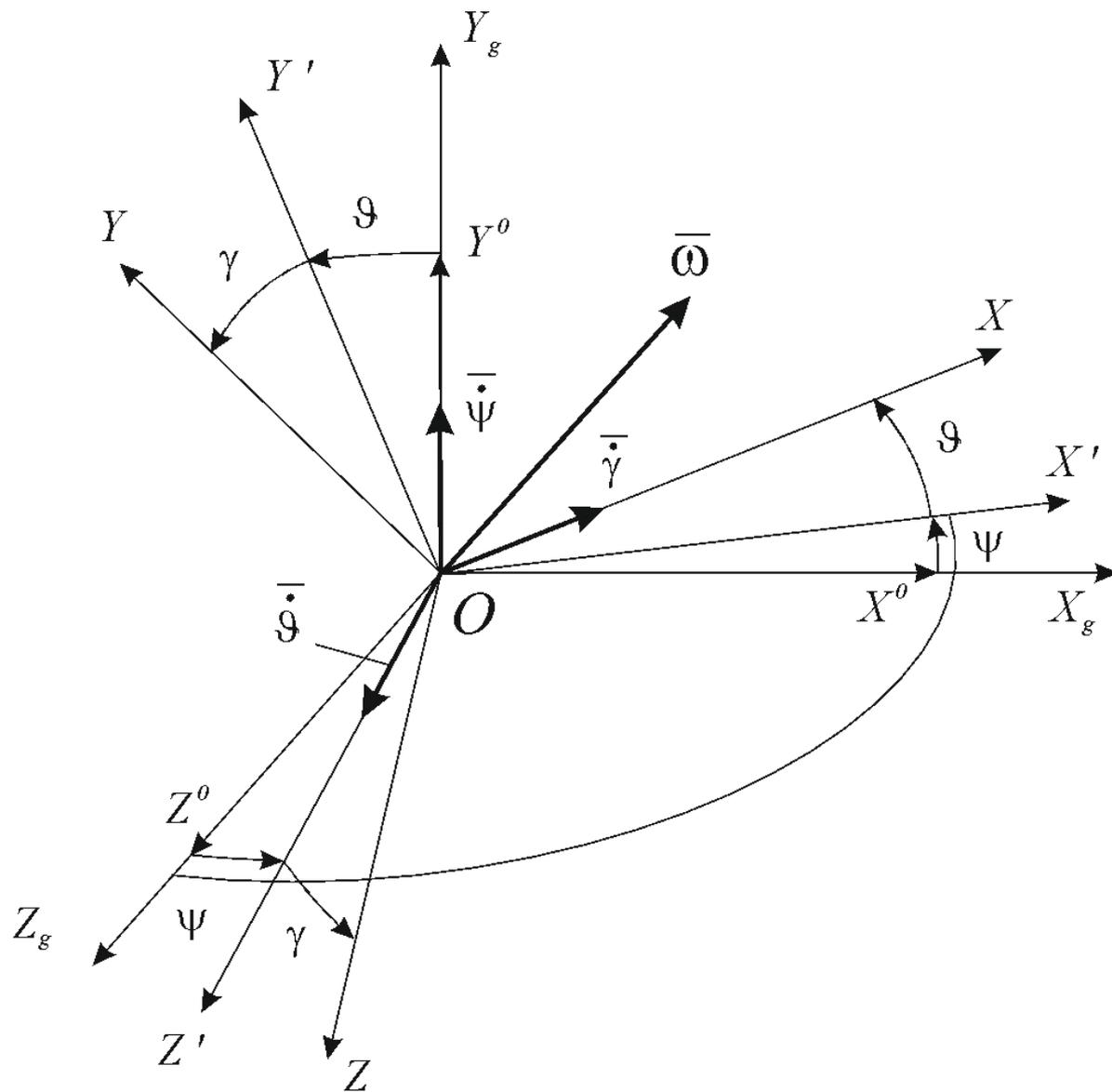
- **во-первых**, взаимным положением начал разных СК, т.е. расстоянием между точками  $O_1$  и  $O_2$ ,
  - **во-вторых**, взаимным угловым положением осей различных СК.
- 1) взаимным положением начал разных СК, т.е. расстоянием между точками  $O_1$  и  $O_2$ ,
  - 2) взаимным угловым положением осей различных СК.
- **три таких угла:**
  - угол прецессии  $\psi$  ,
  - угол собственного или чистого вращения  $\varphi$
  - и угол нутации  $\theta$  .

# Углы между осями связанной и нормальной СК (углы $\psi$ , $\vartheta$ и $\gamma$ )

Исходное положение земной и связанной СК



# Схема поворотов при построении углов Эйлера

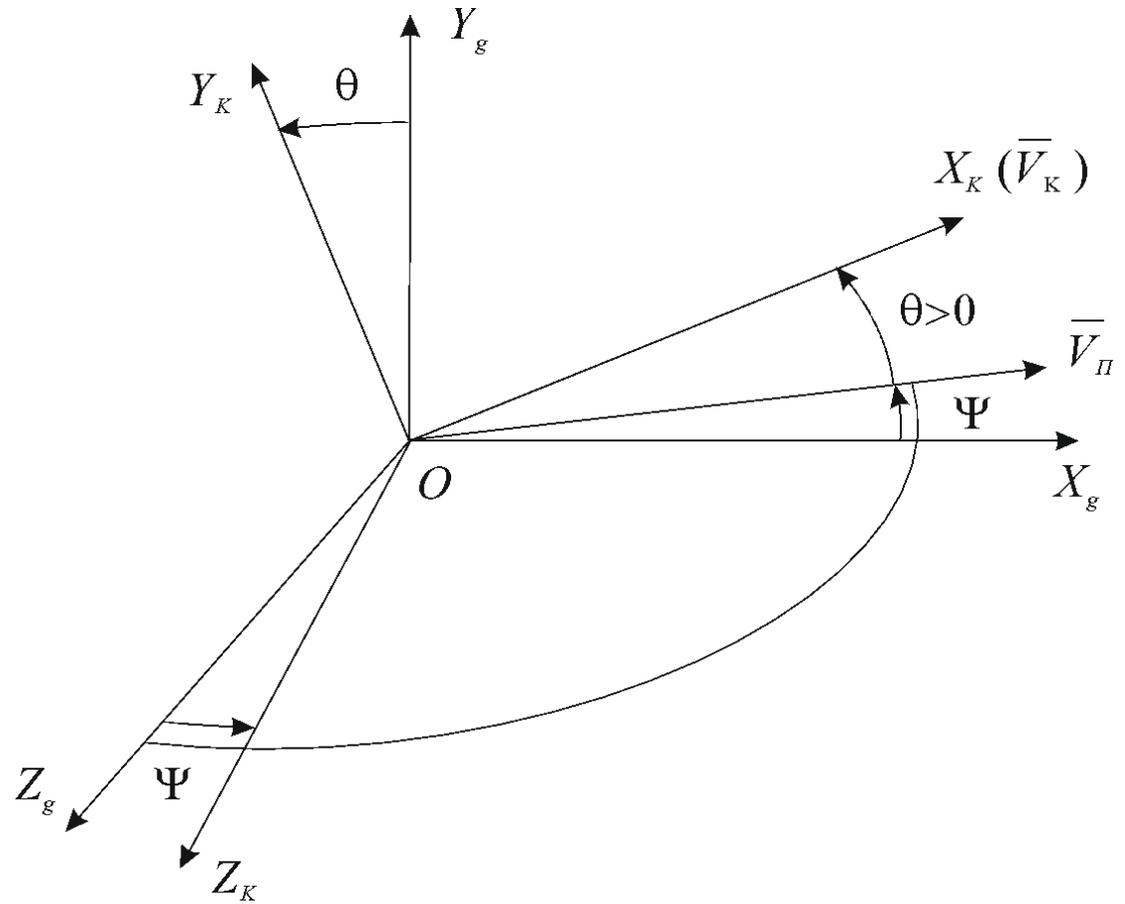


$$\begin{array}{ccccccc}
 OX^0 Y^0 Z^0 & \Rightarrow & OX' Y^0 Z' & \Rightarrow & OXY' Z' & \Rightarrow & OXYZ \\
 \text{исходное} & & \text{1-ый} & & \text{2-ой} & & \text{3-ий} & & \text{конечное} \\
 \text{положение} & & \text{поворот} & & \text{поворот} & & \text{поворот} & & \text{положение} \\
 & & \text{вокруг} & & \text{вокруг} & & \text{вокруг} & & \\
 & & \text{оси } OY & & \text{оси } OZ' & & \text{оси } OX & & 
 \end{array}$$

- **Угол рыскания (курса)  $\psi$**  - это угол между осью  $OX_g$  и проекцией продольной оси  $OX$  на местную горизонтальную плоскость  $OX_g Z_g$  ;
- **Угол тангажа  $\vartheta$**  - это угол между продольной осью  $OX$  и местной горизонтальной плоскостью  $OX_g Z_g$  ;
- **Угол крена  $\gamma$**  - это угол между поперечной осью  $OZ$  и осью  $OZ_g$  , смещенной в положение, соответствующее нулевому углу рыскания.



# Углы между осями траекторной и нормальной СК (углы $\theta$ и $\Psi$ )



# Углы между осями траекторной и скоростной СК

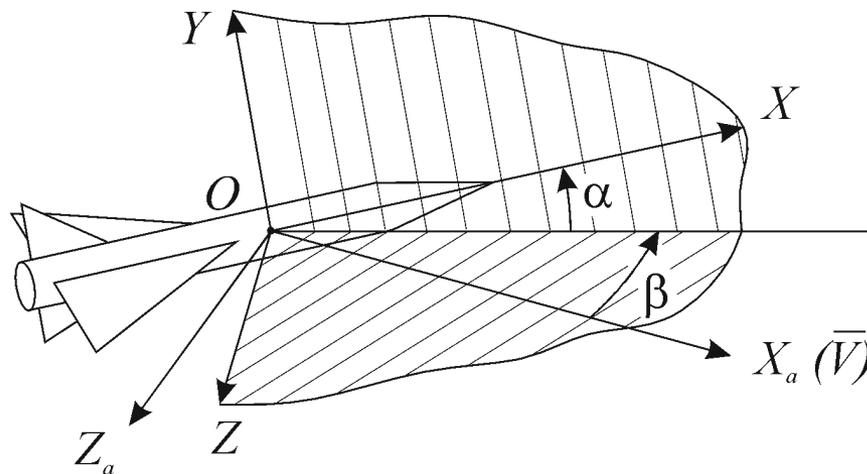
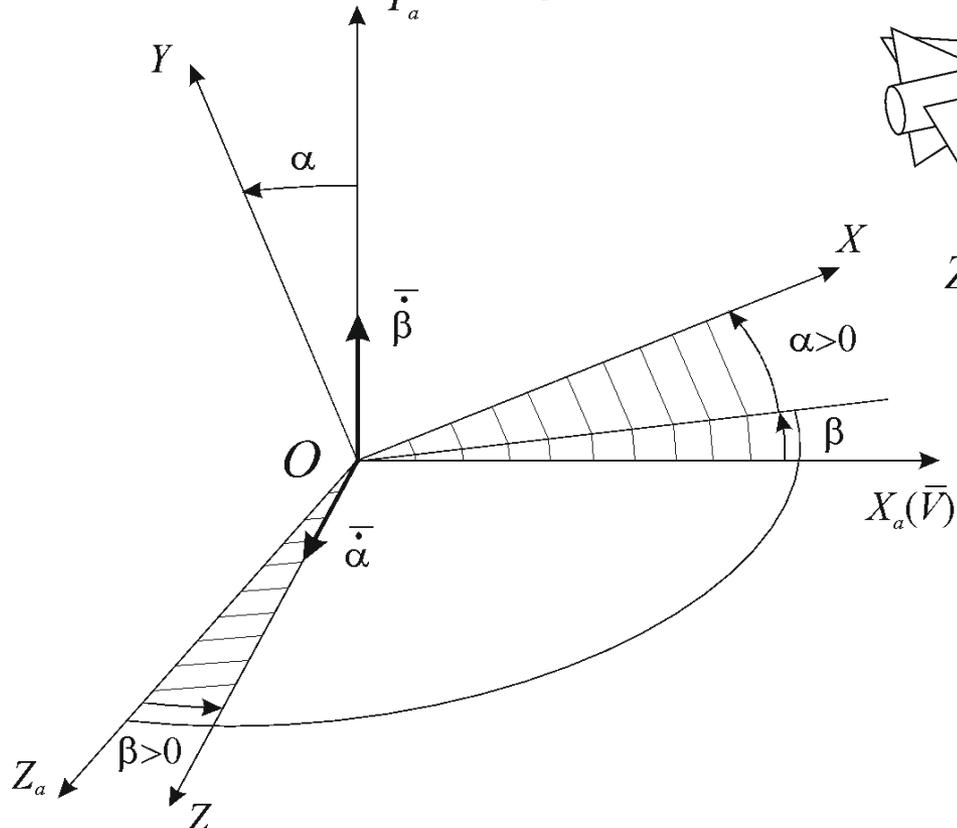
при  $W_v \equiv 0$

- *Траекторный угол  $\Psi$  совпадает со скоростным углом рыскания, т.е.  $\Psi = \psi_a$  ,*
- *а траекторный угол  $\theta$  совпадает со скоростным углом тангажа, т.е.  $\theta = \vartheta_a$  . Но в общем случае  $\gamma_a \neq 0$*
- *и, следовательно, скоростные оси всегда развернуты относительно траекторных на угол скоростного крена  $\gamma_a$*

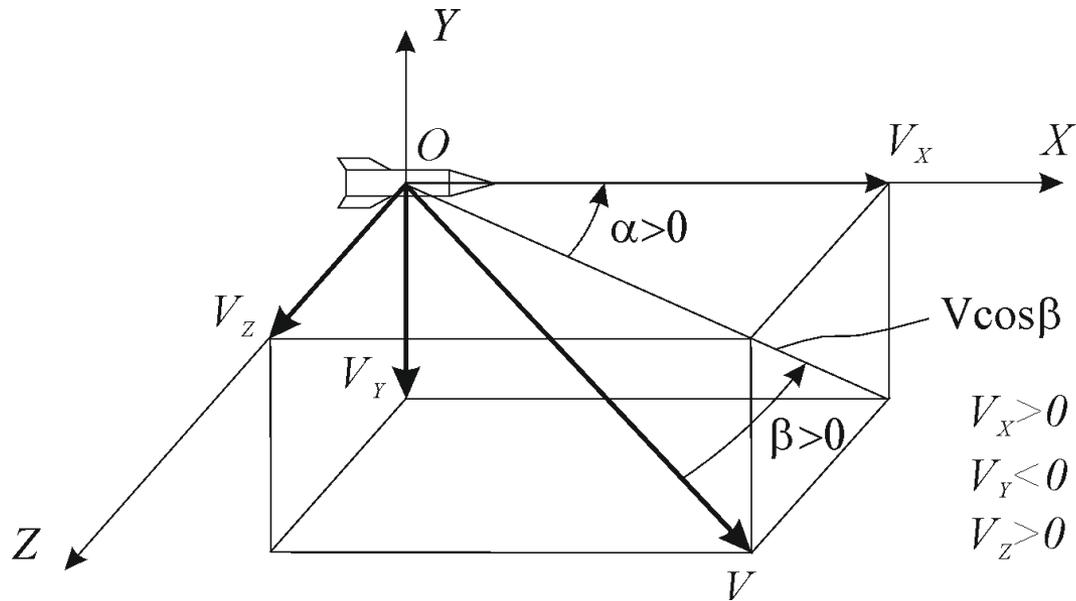
# Углы между осями связанной и скоростной СК (углы $\alpha$ и $\beta$ )

*Угол атаки  $\alpha$*

*Угол скольжения  $\beta$*



$$\bar{V} = \bar{V}_K - \bar{W}_e \quad (2.2)$$



$$\left. \begin{aligned} V_x &= V \cos \alpha \cos \beta \\ V_y &\stackrel{(2.3)}{=} -V \sin \alpha \cos \beta \\ V_z &= V \sin \beta \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}$$

$$\alpha = \arcsin \frac{-V_y}{\sqrt{V_x^2 + V_y^2}} \quad (2.5)$$

$$\beta = \arcsin \frac{V_z}{V} = \arcsin \frac{V_z}{\sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}} \quad (2.6)$$

## 2.3. Матрицы перехода (таблицы направляющих косинусов)

$$\left. \begin{aligned} r_{x_1} &= c_{11}r_{x_2} + c_{12}r_{y_2} + c_{13}r_{z_2} \\ r_{y_1} &= c_{21}r_{x_2} + c_{22}r_{y_2} + c_{23}r_{z_2} \\ r_{z_1} &= c_{31}r_{x_2} + c_{32}r_{y_2} + c_{33}r_{z_2} \end{aligned} \right\} (2.7)$$

$$\left. \begin{aligned} r_{x_2} &= c_{11}r_{x_1} + c_{21}r_{y_1} + c_{31}r_{z_1} \\ r_{y_2} &= c_{12}r_{x_1} + c_{22}r_{y_1} + c_{32}r_{z_1} \\ r_{z_2} &= c_{13}r_{x_1} + c_{23}r_{y_1} + c_{33}r_{z_1} \end{aligned} \right\} (2.8)$$

$$c_{11} = \cos(\widehat{X_1, X_2}) \quad c_{12} = \cos(\widehat{X_1, Y_2}) \quad c_{13} = \cos(\widehat{X_1, Z_2})$$

$$c_{21} = \cos(\widehat{Y_1, X_2}) \quad c_{22} = \cos(\widehat{Y_1, Y_2}) \quad c_{23} = \cos(\widehat{Y_1, Z_2})$$

$$c_{31} = \cos(\widehat{Z_1, X_2}) \quad c_{32} = \cos(\widehat{Z_1, Y_2}) \quad c_{33} = \cos(\widehat{Z_1, Z_2})$$

$$\begin{vmatrix} r_{x_1} \\ r_{y_1} \\ r_{z_1} \end{vmatrix} = A_{21} \begin{vmatrix} r_{x_2} \\ r_{y_2} \\ r_{z_2} \end{vmatrix}$$

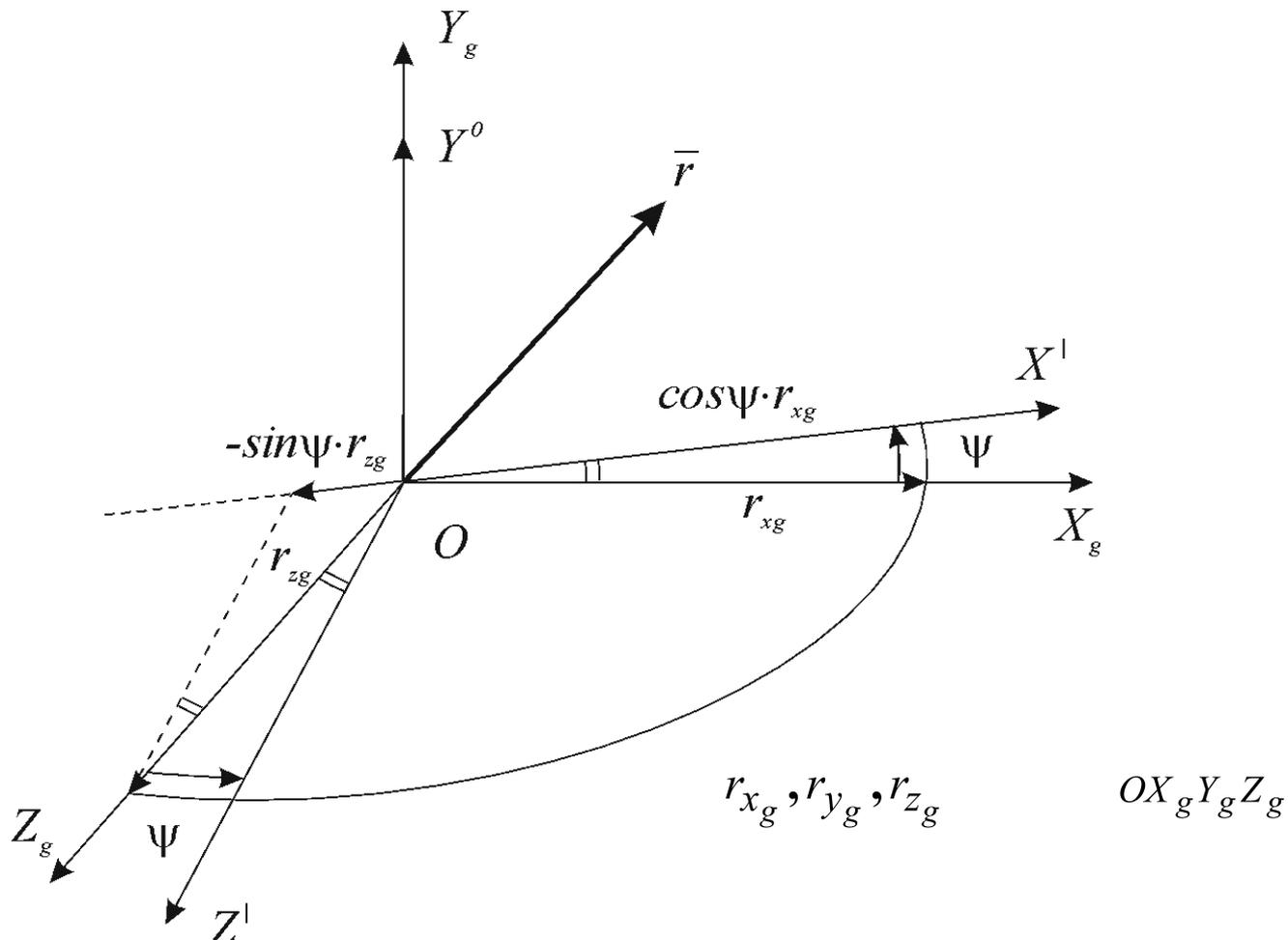
$$\begin{vmatrix} r_{x_2} \\ r_{y_2} \\ r_{z_2} \end{vmatrix} = A_{12} \begin{vmatrix} r_{x_1} \\ r_{y_1} \\ r_{z_1} \end{vmatrix}$$

$$A_{21} = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix}$$

$$A_{12} = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} \\ c_{12} & c_{22} & c_{32} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{vmatrix}$$

$$A_{12} = A_{21}^T$$

**Задача по вычислению направляющих синусов  
рассмотрим на примере следующей пары СК:  
нормальной и связанной**



$$A_\psi = \begin{vmatrix} \mathbf{cos}\psi & 0 & -\mathbf{sin}\psi \\ 0 & 1 & 0 \\ \mathbf{sin}\psi & 0 & \mathbf{cos}\psi \end{vmatrix}$$

$$A_\vartheta = \begin{vmatrix} \mathbf{cos}\vartheta & \mathbf{sin}\vartheta & 0 \\ -\mathbf{sin}\vartheta & \mathbf{cos}\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$A_\gamma = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{cos}\gamma & \mathbf{sin}\gamma \\ 0 & -\mathbf{sin}\gamma & \mathbf{cos}\gamma \end{vmatrix}$$

$$A_{\gamma\vartheta\psi} = A_\gamma A_\vartheta A_\psi = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix}$$

$$c_{11} = \mathbf{cos}\psi \mathbf{cos}\vartheta,$$

$$c_{12} = \mathbf{sin}\vartheta,$$

$$c_{13} = -\mathbf{sin}\psi \mathbf{cos}\vartheta,$$

$$c_{21} = -\mathbf{cos}\psi \mathbf{sin}\vartheta \mathbf{cos}\gamma + \mathbf{sin}\psi \mathbf{sin}\gamma,$$

$$c_{22} = \mathbf{cos}\vartheta \mathbf{cos}\gamma,$$

$$c_{23} = \mathbf{cos}\psi \mathbf{sin}\gamma + \mathbf{sin}\vartheta \mathbf{sin}\psi \mathbf{cos}\gamma,$$

$$c_{31} = \mathbf{cos}\psi \mathbf{sin}\vartheta \mathbf{sin}\gamma + \mathbf{sin}\psi \mathbf{cos}\gamma,$$

$$c_{32} = -\mathbf{cos}\vartheta \mathbf{sin}\gamma,$$

$$c_{33} = \mathbf{cos}\psi \mathbf{cos}\gamma - \mathbf{sin}\psi \mathbf{sin}\vartheta \mathbf{sin}\gamma.$$

$$\begin{vmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{vmatrix} = A_{\gamma\vartheta\psi} \begin{vmatrix} r_{x_g} \\ r_{y_g} \\ r_{z_g} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} r_{x_g} \\ r_{y_g} \\ r_{z_g} \end{vmatrix} = A_{\gamma\vartheta\psi}^T \begin{vmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{vmatrix}$$

**Таблица 2.1.** Направляющие косинусы между осями нормальной и связанной СК

Связанные оси	Нормальные оси		
	$OX_g$	$OY_g$	$OZ_g$
OX	$c_{11}$	$c_{12}$	$c_{13}$
OY	$c_{21}$	$c_{22}$	$c_{23}$
OZ	$c_{31}$	$c_{32}$	$c_{33}$