Лекция: «Тройной интеграл»

Определение и свойства тройного интеграла. Переход от тройного интеграла к трёхкратному в декартовой системе координат. Замена переменных в тройном интеграле. Тройной интеграл в цилиндрических и сферических координатах.

Вычисление объёма, массы, статических моментов, координат центра тяжести, моментов инерции тел.

Понятие тройного интеграла

1. Разобьем область V на n элементарных непересекающихся объёмов ΔV_i: $\sum\limits_{i=1}^{n} \Delta V_i = V$.

2. Диаметр разбиения λ есть наибольший из размеров λ_i элементарных объёмов ΔV_i, которые равны наибольшей длине отрезка, чьи концы принадлежат элементарному объёму ΔV_i: $\lambda = \max\limits_{i=1,2,\cdots,n} \lambda_i$.

3. В каждом элементарном объёме ΔV_i выберем произвольную точку $P_i(\xi_i; \eta_i; \zeta_i)$. Вычислим значение функции $U = f(x, y, z)$ в этой точке $f(P_i) = f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$.

4. Составим произведение $f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ на ΔV_i для всех ΔV_i и образуем сумму всех таких произведений $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta V_i$.

Определение 55.1. *Сумма* $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta V_i$ *называется n-ой интегральной суммой, образованной для функции* $U = f(x, y, z)$ *по области* V.

Определение 55.2. *Тройным интегралом от функции* $f(x,y,z)$ *по области* V *называется предел, к которому стремится n-я интегральная сумма* $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta V_i$ *при неограниченном увеличении числа элементов разбиения* ΔV_i *и условии стремления диаметра разбиения* λ *к нулю.*

$$\lim_{\substack{n\to+\infty\\ \lambda\to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta V_i = \iiint\limits_V f(x,y,z)\,dV. \qquad (55.1)$$

Очевидно, что в силу условия разбиения $\sum_{i=1}^{n} \Delta V_i = V$, а следовательно, и

$$\lim_{\substack{n\to+\infty\\ \lambda\to 0}} \sum_{i=1}^{n} \Delta V_i = \iiint\limits_V dV = V, \qquad (55.2)$$

т.е. объёму области V.

Теорема 55.1. *Для всякой непрерывной в замкнутой области* V *функции* $U = f(x,y,z)$ *тройной интеграл* $\iiint f(x,y,z)dV$ *существует.*

55.2. Свойства тройного интеграла

• Постоянный множитель k ($k \neq 0$) можно выносить за знак тройного интеграла:

$$\iiint\limits_V kf(x,y,z)dV = k\iiint\limits_V f(x,y,z)dV.$$

• Тройной интеграл от суммы функций равен сумме тройных интегралов от этих функций

$$\iiint\limits_V (f(x,y,z)+\varphi(x,y,z))dV = \iiint\limits_V f(x,y,z)dV + \iiint\limits_V \varphi(x,y,z)dV.$$

• Если в области интегрирования $f(x,y,z) \geqslant 0$, то и $\displaystyle\iiint\limits_V f(x,y,z)dV \geqslant 0.$

• Если в области интегрирования $f(x,y,z) \geqslant \varphi(x,y,z)$, то и

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dV \geqslant \iiint\limits_V \varphi(x,y,z)dV.$$

• Если в области интегрирования m и M являются соответственно наименьшим и наибольшим значением функции $f(x,y,z)$, т.е.

$$m \leqslant f(x,y,z) \leqslant M, \quad \text{то} \quad mV \leqslant \iiint\limits_V f(x,y,z)dV \leqslant MV.$$

- Если область интегрирования $V = \sum_{j=1}^{m} V_j$, то

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dV = \sum_{j=1}^{m} \iiint\limits_{V_j} f(x,y,z)dV.$$

- *Теорема о среднем.* Если функция $f(x,y,z)$ непрерывна в замкнутой области V, то в области V существует, по крайней мере, одна точка $P(\xi;\eta;\zeta)$, в которой значение функции

$$f(\xi,\eta,\zeta) = \frac{1}{V} \iiint\limits_V f(x,y,z)dV.$$

Это значение называется средним интегральным значением функции $f(x,y,z)$ по области V.

55.3. Переход от тройного интеграла к трёхкратному (повторному) в декартовой системе координат

Определение 55.3. *Трёхмерная область V называется правильной в направлении оси OZ, если любая прямая $x = const$, $y = const$, параллельная этой оси и проходящая через её внутреннюю точку, пересекает ограничивающую её поверхность σ в двух точках.*

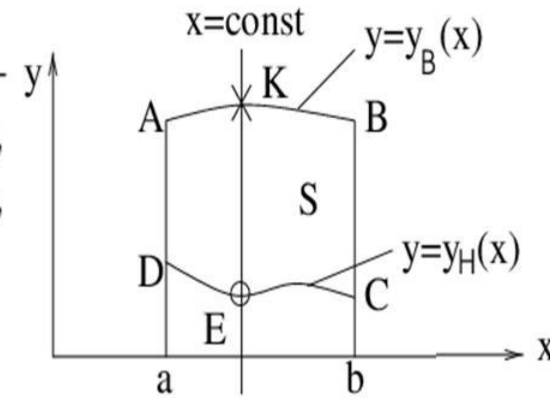
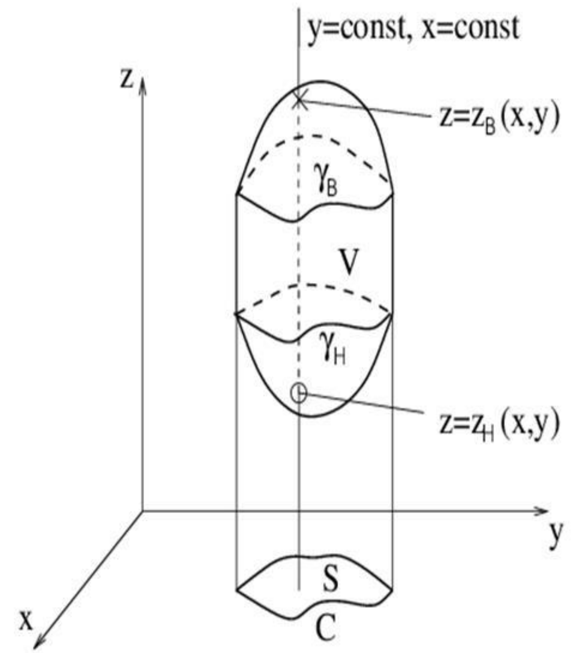


Рис. 61. *Область, правильная в направлении оси Oy*

$$z = z_{\text{н}}(x, y) \qquad z = z_{\text{в}}(x, y)$$

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_S dx\,dy \int\limits_{z_{\text{н}}(x,y)}^{z_{\text{в}}(x,y)} f(x, y, z)\,dz \quad (55.3)$$



Правильная область в направлении оси Oz

Очевидно, что внутренний интеграл $\int\limits_{z_{\text{н}}(x,y)}^{z_{\text{в}}(x,y)} f(x, y, z)\,dz = \Phi(x; y)$

Таким образом, если проекция области V, правильной в направлении оси OZ, на плоскость XOY является областью S, правильной в направлении оси OY (определение 51.4, рис. 61), тройной интеграл преобразуется в трёхкратный по следующей формуле:

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_{\text{н}}(x)}^{y_{\text{в}}(x)} dy \int\limits_{z_{\text{н}}(x,y)}^{z_{\text{в}}(x,y)} f(x, y, z)\,dz. \quad (55.4)$$

Определение 55.4. *Элементом объёма в декартовой системе координат, также как и элементом площади (см. определение 51.5), называется произведение дифференциалов переменных* $dV = dxdydz$.

Если же область S является правильной в направлении оси OX, рис. 71, то

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_c^d dy \int\limits_{x_{\text{л}}(y)}^{x_{\text{пр}}(y)} dx \int\limits_{z_{\text{н}}(x,y)}^{z_{\text{в}}(x,y)} f(x,y,z)dz. \qquad (55.5)$$

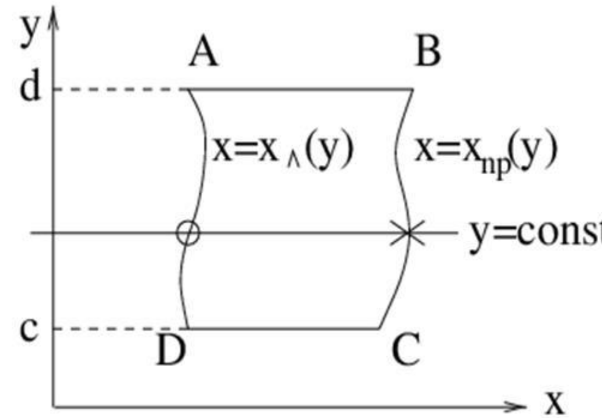


Рис. 71. *Область, правильная в направлении оси Ox*

Прямоугольный параллелипипед: $a \leqslant x \leqslant b,\ c \leqslant y \leqslant d, k \leqslant z \leqslant l$

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d dy \int\limits_k^l f(x,y,z)dz. \qquad (55.6)$$

При постоянных пределах порядок интегрирования в формуле (55.6) не имеет значения. Если к тому же $f(x,y,z) = \varphi(x)\psi(y)\chi(z)$, то тройной интеграл равен произведению трёх определённых интегралов

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_a^b \varphi(x)dx \int\limits_c^d \psi(y)dy \int\limits_k^l \chi(z)dz. \qquad (55.7)$$

Пример 55.1. *Вычислить* $\iiint\limits_V z\,dx\,dy\,dz$, *где* V: $1 \leqslant x \leqslant 2$, $-1 \leqslant y \leqslant 1$, $2 \leqslant z \leqslant 3$.

Р е ш е н и е: Для решения данного примера воспользуемся формулой (55.7), в которой положим $f(x, y, z) = z$, $a = 1$, $b = 2$, $c = -1$, $d = 1$, $k = 2$, $l = 3$. Тогда

$$\iiint\limits_V z\,dx\,dy\,dz = \int\limits_1^2 dx \int\limits_{-1}^1 dy \int\limits_2^3 z\,dz = x\Big|_1^2\, y\Big|_{-1}^1\, \frac{z^2}{2}\Big|_2^3 = (2-1)(1+1)\frac{9-4}{2} = 5.$$

Пример 55.2. *Вычислить интеграл из примера 55.1 для области V, ограниченной координатными плоскостями и плоскостью $x+y+z=1$ (рис. 100)*

Р е ш е н и е: Для вычисления заданного интеграла воспользуемся формулой (55.3), в которой положим $f(x,y,z)=z$, $z_{\text{н}}(x,y)=0$, $z_{\text{в}}(x,y)=1-x-y$, $y_{\text{н}}(x)=0$, $y_{\text{в}}(x)=1-x$, $a=0$, $b=1$. Тогда

$$\iiint\limits_V z\,dx\,dy\,dz=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{1-x}dy\int\limits_0^{1-x-y}z\,dz=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{1-x}\left.\frac{z^2}{2}\right|_0^{1-x-y}dy=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{1-x}(1+x^2+y^2-2x-2y+2xy)dy=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^1\left.\left(y+x^2y+\frac{y^3}{3}-2xy-y^2+xy^2\right)\right|_0^{1-x}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^1(1-x+x^2-x^3+(1-3x+3x^2-x^3)/3-$$

$$-2x+2x^2-1+2x-x^2+x-2x^2+x^3)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^1\left(\frac{1}{3}-x+x^2-\frac{x^3}{3}\right)dx=\frac{1}{2}\left.\left(\frac{x}{3}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{12}\right)\right|_0^1=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{12}\right)=\frac{1}{24}.$$

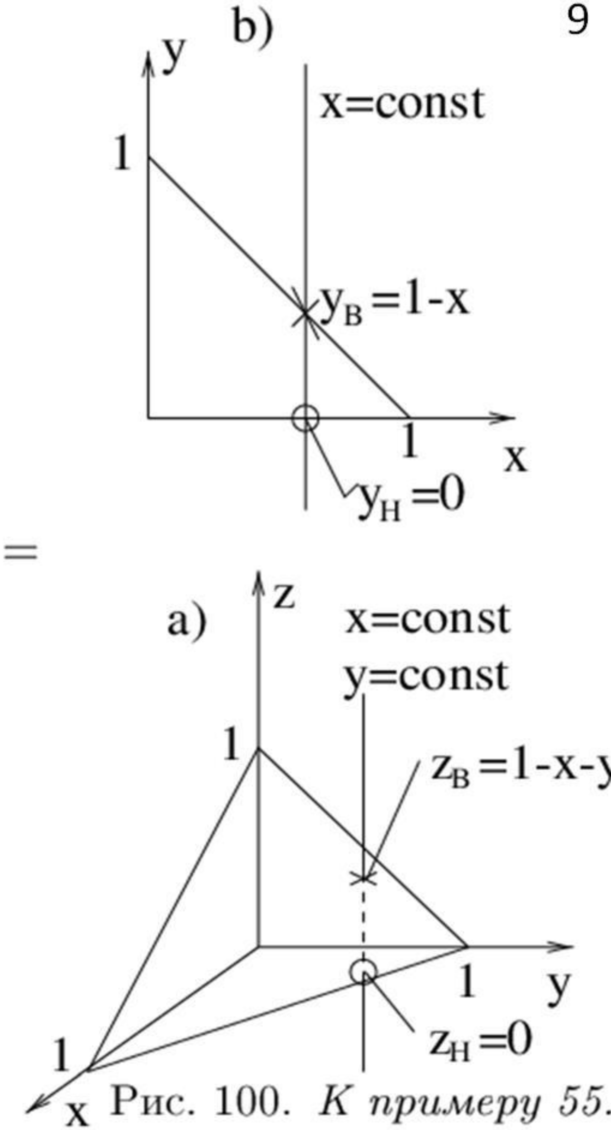


Рис. 100. *К примеру 55.2*

Пример 55.3. *Вычислить интеграл из примера 55.1 для области V, ограниченной конусом $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ и плоскостью $z = 4$ (рис. 101а).*

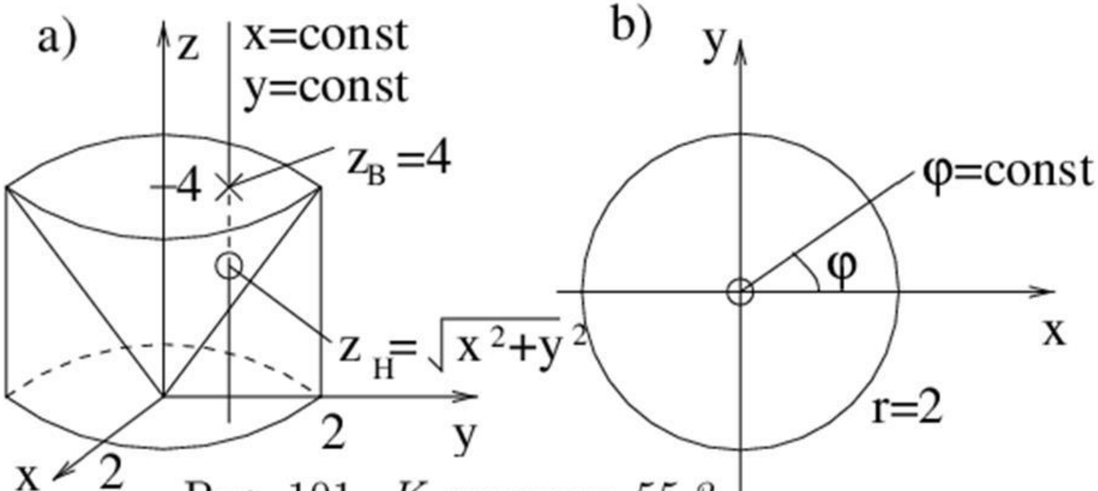


Рис. 101. *К примеру 55.3*

Р е ш е н и е: Воспользуемся формулой (55.3), положив в которой $f(x, y, z) = z$, $z_н(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, $z_в(x, y) = 4$, получим

$$\iiint\limits_V z\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_S \frac{z^2}{2}\Big|_{\sqrt{x^2+y^2}}^{4} dx\,dy = \frac{1}{2}\iint\limits_S (16 - x^2 - y^2)\,dx\,dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 (16 - r^2)r\,dr = \frac{1}{2}\varphi\Big|_0^{2\pi} \cdot \left(8r^2 - \frac{r^4}{4}\right)\Big|_0^2 = \pi(32 - 4) = 28\pi.$$

Замена переменных в тройном интеграле

$$x = x(u,v,w),\ y = y(u,v,w),\ z = z(u,v,w)$$

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint\limits_V f(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w))\,|J|\,dudvdw. \quad (55.8)$$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \qquad (55.9)$$

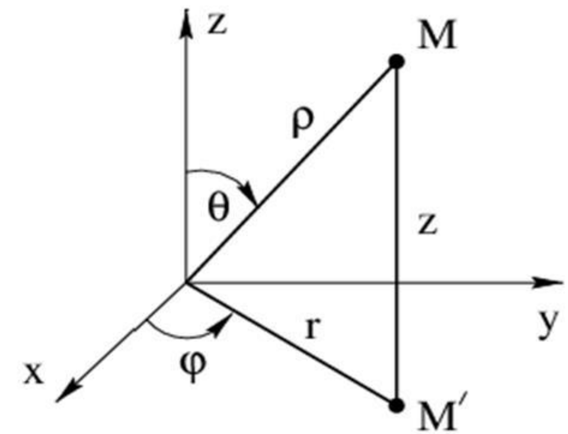


Рис. 2. *Цилиндрическая и сферическая системы координат*

Вычисление тройного интеграла в цилиндрических координатах

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \\ z = z. \end{cases} \quad J = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r\begin{vmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{vmatrix} = r(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = r.$$

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint\limits_V f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)\,r\,drd\varphi dz.$$

Определение 55.6. *Элементом объёма в цилиндрической системе координат называется величина* $dV = r\,dr\,d\varphi\,dz$.

Вычисление тройного интеграла в сферических координатах

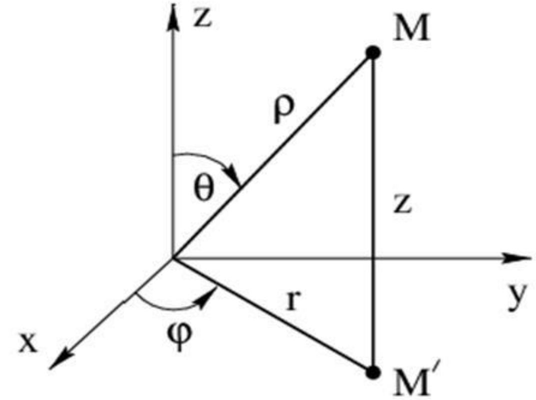


Рис. 2. *Цилиндрическая и сферическая системы координат*

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi\sin\theta, \\ y = \rho\sin\varphi\sin\theta, \\ z = \rho\cos\theta, \end{cases}$$

$$J = \begin{vmatrix} \cos\varphi\sin\theta & -\rho\sin\varphi\sin\theta & \rho\cos\varphi\cos\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & \rho\cos\varphi\sin\theta & \rho\sin\varphi\cos\theta \\ \cos\theta & 0 & -\rho\sin\theta \end{vmatrix} =$$

$$= \cos\theta \begin{vmatrix} -\rho\sin\varphi\sin\theta & \rho\cos\varphi\cos\theta \\ \rho\cos\varphi\sin\theta & \rho\sin\varphi\cos\theta \end{vmatrix} - \rho\sin\theta \begin{vmatrix} \cos\varphi\sin\theta & -\rho\sin\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & \rho\cos\varphi\sin\theta \end{vmatrix} =$$

$$= \rho^2\cos^2\theta\sin\theta \begin{vmatrix} -\sin\varphi & \cos\varphi \\ \cos\varphi & \sin\varphi \end{vmatrix} - \rho^2\sin^3\theta \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{vmatrix} =$$

$$= -\rho^2\sin\theta(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = -\rho^2\sin\theta.$$

$$\begin{vmatrix} -\sin\varphi & \cos\varphi \\ \cos\varphi & \sin\varphi \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{vmatrix} = -(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = -1.$$

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint\limits_V f(\rho\cos\varphi\sin\theta, \rho\sin\varphi\sin\theta, \rho\cos\theta)\rho^2\sin\theta d\rho d\varphi d\theta.$$

Определение 55.7. *Элементом объёма в сферической системе координат называется величина* $dV = \rho^2\sin\theta d\rho d\varphi d\theta$.

Пример 55.4. *Вычислить* $\iiint\limits_V (x^2 + y^2)dxdydz$, *если* V – *шар* $x^2+y^2+z^2 \leqslant R^2$.

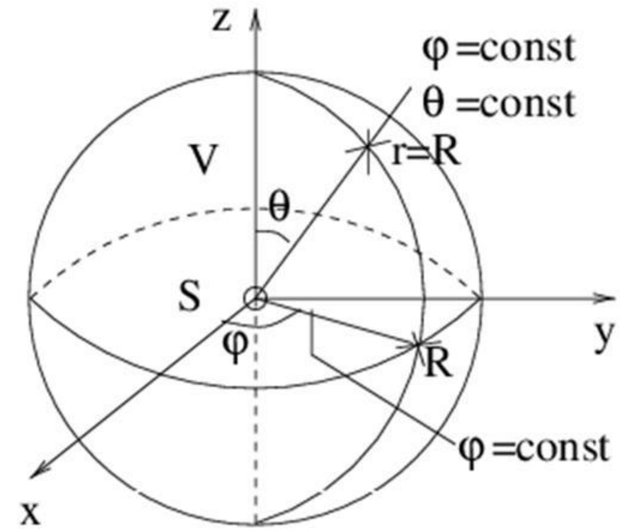


Рис. 102. *К примеру 55.4*

$$\iiint\limits_V (x^2+y^2)dxdydz = \iiint\limits_V \rho^4 \sin^3\theta d\rho d\varphi d\theta.$$

$$\iiint\limits_V \rho^4 \sin^3\theta \, d\varphi \, d\rho \, d\theta = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} \sin^3\theta d\theta \int\limits_0^{R} \rho^4 d\rho =$$

$$= \varphi\Big|_0^{2\pi} \left(\int\limits_0^{\pi} (\cos^2\theta - 1) d\cos\theta \right) \frac{\rho^5}{5}\Bigg|_0^R = \frac{2\pi}{5} R^5 \left(\frac{\cos^3\theta}{3} - \cos\theta \right)\Bigg|_0^{\pi} = \frac{8\pi}{15} R^5.$$

56.1. Вычисление объёма тел

$$\lim_{\substack{n\to+\infty \\ \lambda\to 0}} \sum_{i=1}^{n} \Delta V_i = \iiint\limits_V dV = V, \quad (55.2)$$

Пример 56.1. *Вычислить объём шара радиуса R.*

Решение: В сферических координатах все переменные в данном случае разделяются и

$$V = \iiint\limits_V dV = \iiint\limits_V \rho^2 \sin\theta d\rho d\varphi d\theta =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta \int\limits_0^{R} \rho^2 d\rho =$$

$$= \varphi\Big|_0^{2\pi} (-\cos\theta)\Big|_0^{\pi} \frac{\rho^3}{3}\Big|_0^R = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

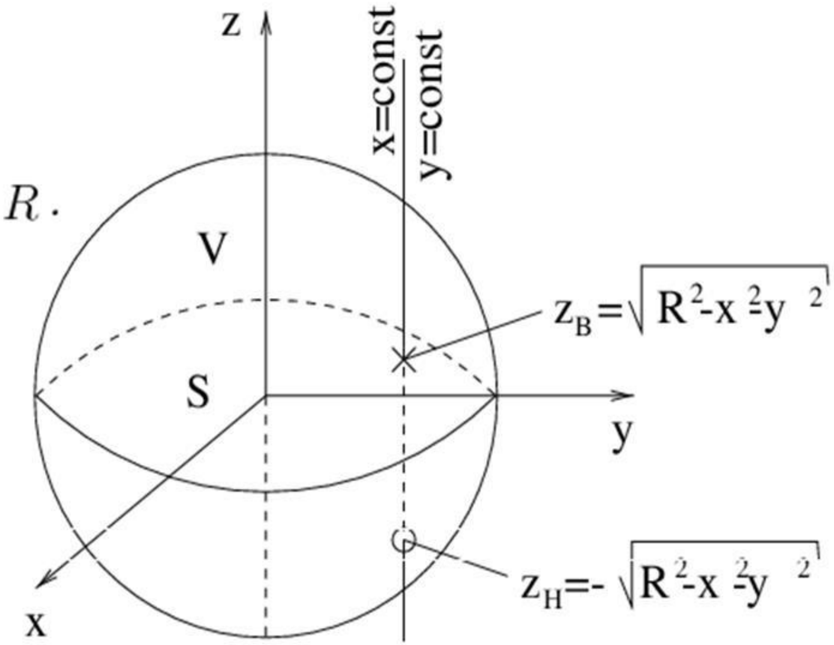


Рис. 108. *К примеру 56.1*

2 способ

$$V = \iint\limits_S (z_в - z_н) ds = 2\iint\limits_S \sqrt{R^2-x^2-y^2} ds = 2\iint\limits_S r\sqrt{R^2-r^2} dr d\varphi =$$

$$= 2\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{R} r\sqrt{R^2-r^2} dr = 2\varphi\Big|_0^{2\pi} \left(-\frac{2(R^2-r^2)^{3/2}}{3\cdot 2}\right)\Bigg|_0^R = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

56.2. Вычисление массы тел

Если объёмная плотность тела является переменной величиной $\gamma = \gamma(x, y, z)$, то масса элементарного объёма dV будет равна $dm = \gamma(x, y, z)dv$, а следовательно, масса всего тела с объёмом V.

$$M = \iiint\limits_V dm = \iiint\limits_V \gamma(x, y, z)dV. \qquad (56.1)$$

В случае постоянной плотности $\gamma = \text{const}$

$$M = \gamma \iiint\limits_V dV = \gamma V. \qquad (56.2)$$

56.3. Статические моменты и координаты центра тяжести тел

В пространственном случае статические моменты определяются относительно координатных плоскостей Oxy, Oxz и Oyz и для материальной точки с массой Δm соответственно равны $\Delta M_{xy} = \Delta m\zeta$, $\Delta M_{xz} = \Delta m\eta$, $\Delta M_{yz} = \Delta m\xi$, где ξ, η, ζ – координаты рассматриваемой точки в пространстве. Следовательно, для тела объёмом V получим

$$M_{xy} = \iiint\limits_V \gamma(x,y,z) z dV, \qquad (56.3)$$

$$M_{xz} = \iiint\limits_V \gamma(x,y,z) y dV, \qquad (56.4)$$

$$M_{yz} = \iiint\limits_V \gamma(x,y,z) x dV. \qquad (56.5)$$

В случае постоянной плотности $\gamma = \text{const}$:

$$M_{xy} = \gamma \iiint\limits_V z dV, \qquad (56.6)$$

$$M_{xz} = \gamma \iiint\limits_V y dV, \qquad (56.7)$$

$$M_{yz} = \gamma \iiint\limits_V x dV. \qquad (56.8)$$

Координаты центра тяжести

$$x_{\text{ц}} = \frac{M_{yz}}{M} = \frac{\iiint\limits_V \gamma(x,y,z)x\,dV}{\iiint\limits_V \gamma(x,y,z)\,dV}, \qquad (56.9)$$

$$y_{\text{ц}} = \frac{M_{xz}}{M} = \frac{\iiint\limits_V \gamma(x,y,z)y\,dV}{\iiint\limits_V \gamma(x,y,z)\,dV}, \qquad (56.10)$$

$$z_{\text{ц}} = \frac{M_{xy}}{M} = \frac{\iiint\limits_V \gamma(x,y,z)z\,dV}{\iiint\limits_V \gamma(x,y,z)\,dV}. \qquad (56.11)$$

В случае постоянной плотности $\gamma = \text{const}$ эти формулы примут вид:

$$x_{\text{ц}} = \frac{M_{yz}}{M} = \frac{1}{V}\iiint\limits_V x\,dV, \qquad (56.12)$$

$$y_{\text{ц}} = \frac{M_{xz}}{M} = \frac{1}{V}\iiint\limits_V y\,dV, \qquad (56.13)$$

$$z_{\text{ц}} = \frac{M_{xy}}{M} = \frac{1}{V}\iiint\limits_V z\,dV. \qquad (56.14)$$

Пример 56.3. *Вычислить координаты центра тяжести полушара радиуса R, если плотность γ постоянна.*

Р е ш е н и е: Совместим центр шара с началом координат и рассмотрим верхнюю половину шара (рис. 109), для которой $z \geq 0$.

В силу симметрии полушара по x и y две координаты центра тяжести $x_ц = y_ц = 0$. По формуле (56.12) находим, используя сферическую систему координат:

$$V = \frac{2}{3}\pi R^3.$$

$$z_ц = \frac{3}{2\pi R^3} \iiint\limits_V z dv = \frac{3}{2\pi R^3} \iiint\limits_V \rho^3 \cos\theta \sin\theta d\rho d\varphi d\theta =$$

$$= \frac{3}{4\pi R^3} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi/2} \sin 2\theta d\theta \int\limits_0^R \rho^3 d\rho =$$

$$= \frac{3}{8\pi R^3} \varphi\Big|_0^{2\pi} (-\cos 2\theta)\Big|_0^{\pi/2} \frac{\rho^4}{4}\Bigg|_0^R =$$

$$= \frac{3}{8\pi R^3} 2\pi 2 \frac{R^4}{4} = \frac{3}{8} R.$$

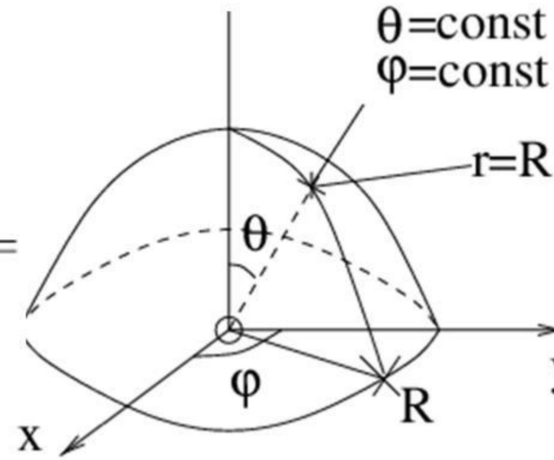


Рис. 109. *К примеру 56.3*

56.4. Моменты инерции тел

Моменты инерции материальной точки с координатами ξ, η, ζ и массой Δm относительно координатных осей Ox, Oy и Oz определяются как произведение массы Δm на квадрат расстояния до этих осей, который соответственно равен $\eta^2 + \zeta^2$, $\xi^2 + \zeta^2$, $\xi^2 + \eta^2$.

$$I_x = \iiint\limits_V \gamma(x, y, z)(y^2 + z^2)\,dV, \qquad (56.15)$$

$$I_y = \iiint\limits_V \gamma(x, y, z)(x^2 + z^2)\,dV, \qquad (56.16)$$

$$I_z = \iiint\limits_V \gamma(x, y, z)(x^2 + y^2)\,dV. \qquad (56.17)$$

Введем также полярный момент инерции I_0, определяемый по формуле

$$I_0 = \iiint\limits_V \gamma(x, y, z)\rho^2\,dV = \iiint\limits_S \gamma(x, y, z)(x^2 + y^2 + z^2)\,dV. \qquad (56.18)$$

$$I_0 = \frac{1}{2}(I_x + I_y + I_z). \qquad (56.19)$$

В случае постоянной плотности $\gamma = \text{const}$ формулы (56.16) – (56.18) примут вид:

$$I_x = \gamma \iiint\limits_V (y^2 + z^2) dV, \tag{56.20}$$

$$I_y = \gamma \iiint\limits_V (x^2 + z^2) dV, \tag{56.21}$$

$$I_z = \gamma \iiint\limits_V (x^2 + y^2) dV. \tag{56.22}$$

$$I_0 = \gamma \iiint\limits_V \rho^2 dV = \gamma \iiint\limits_V (x^2 + y^2 + z^2) dV. \tag{56.23}$$

Пример 56.5. *Найти момент инерции I шара радиуса R относительно диаметра, если плотность постоянна.*

Р е ш е н и е: Совместим центр шара с началом координат (рис. 102). В силу симметрии моменты инерции относительно любого диаметра равны, следовательно, $I_x = I_y = I_z = I$. Используя сферические координаты и формулу связи (56.19), найдем формулу для полярного момента инерции I_0 (56.23) :

$$I = \frac{2}{3}I_0 = \frac{2}{3}\gamma \iiint\limits_V \rho^4 \sin\theta d\rho d\varphi d\theta = \frac{2\gamma}{3}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int\limits_0^{R} \rho^4 d\rho = \frac{8\pi}{15}\gamma R^5.$$

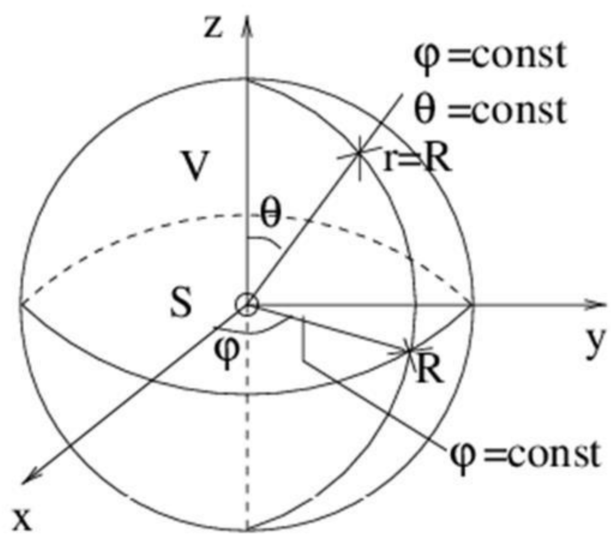


Рис. 102. *К примеру* 56.5

Правило Штейнера

Момент инерции твердого тела относительно любой оси равен моменту инерции этого тела относительно параллельной ей оси, проходящей через центр тяжести тела, сложенному с произведением массы тела на квадрат расстояния между этими осями.

$$I_y = I_c + (x_ц^2 + z_ц^2)M. \qquad (56.24)$$

По формуле (56.17) момент инерции $I_y = \gamma \iiint\limits_V (x^2 + z^2)dv$.

Момент инерции относительно оси, проходящей через точку C и параллельной оси Oy (рис. 110),

будет $I_c = \gamma \iiint\limits_V ((x - x_ц)^2 + (z - z_ц)^2)\, dv$.

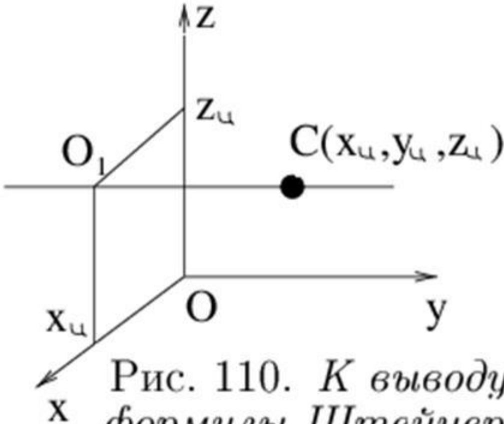


Рис. 110. *К выводу формулы Штейнера*

$$I_c = \gamma \iiint\limits_V (x^2 - 2xx_ц + x_ц^2 + z^2 - 2zz_ц + z_ц^2)dv = \gamma \iiint\limits_V (x^2 + z^2)dv +$$

$$+\gamma(x_ц^2 + z_ц^2) \iiint\limits_V dv - 2x_ц\gamma \iiint\limits_V xdv - 2z_ц\gamma \iiint\limits_V zdv = I_y + (x_ц^2 + z_ц^2)M - 2x_ц M_{yz} - 2z_ц M_{xy}.$$

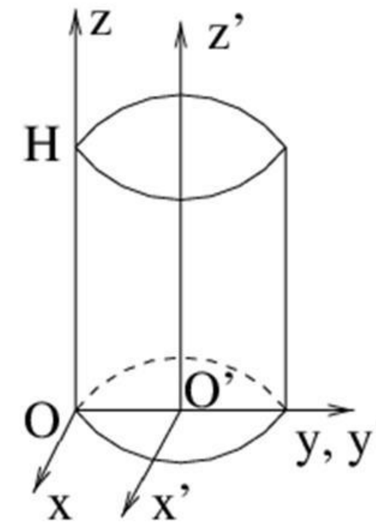
Далее, так как из формул (56.10) и (56.11) следует, что $M_{yz} = x_ц M$, а $M_{xy} = z_ц M$, получаем $I_c = I_y - (x_ц^2 + z_ц^2)M$ или окончательно

$$I_y = I_c + (x_ц^2 + z_ц^2)M. \qquad (56.24)$$

Пример 56.7. *Найти момент инерции I_T шара радиуса R относительно оси, касательной к сфере, являющейся его границей. Плотность γ постоянна.*

Р е ш е н и е: В примере 56.6 найден момент инерции шара относительно диаметра, а так как любой диаметр проходит через центр тяжести шара, то в формуле (56.24) $I_c = \frac{8\pi}{15}\gamma R^5$. Поскольку расстояние между диаметром и параллельной ему касательной T равно R, а масса шара $M = \frac{4}{3}\gamma\pi R^3$ из формулы Штейнера (56.24), приняв касательную T за ось Oy, имеем $I_T = I_c + (x_ц^2 + z_ц^2)M = \frac{8\pi}{15}\gamma R^5 + R^2\frac{4}{3}\gamma\pi R^3 = \frac{28\pi}{15}\gamma R^5$.

Пример 56.5. *Определить момент инерции цилиндра радиуса R и высотой H относительно образующей.*



Р е ш е н и е: Направим ось Oz по образующей цилиндра, ось Ox по касательной к окружности, лежащей в основании цилиндра, тогда центр основания цилиндра будет лежать на оси Oy (рис. 112).

В данной задаче целесообразнее вначале вычислить момент инерции $I_{z'}$, относительно оси, совпадающей с осью цилиндра, а, следовательно, проходящей через его центр тяжести, а затем I_z найти по правилу Штейнера.

$I_{z'}$ находим по формуле (56.22), перейдя в ней к цилиндрическим координатам, связанным с полюсом O', в которых

$x'^2 + y'^2 = r^2$, $dV = r dr d\varphi dz$:

$$I_{z'} = \gamma \iiint\limits_V (x'^2 + y'^2) dV = \gamma \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^R r^3 dr \int\limits_0^H dz = \gamma \cdot \varphi\Big|_0^{2\pi} \frac{r^4}{4}\Big|_0^R z\Big|_0^H = \frac{\gamma\pi R^4 H}{2}.$$

По правилу Штейнера (56.24) определим момент инерции цилиндра относительно оси Oz (образующей), учитывая, что масса цилиндра $M = \gamma\pi R^2 H$, а расстояние между осями Oz и $O'z'$ равно R:

$$I_z = \frac{\gamma\pi R^4 H}{2} + \gamma\pi R^4 H = \frac{3}{2}\gamma\pi R^4 H.$$

Пример 56.6. *Определить центр тяжести $\frac{1}{8}$ части шара, радиуса R (рис. 107).*

Решение: Очевидно, что в силу симметрии $x_ц = y_ц = z_ц$. Объём $\frac{1}{8}$ части шара равен $V = \frac{1}{6}\pi R^3$. Естественно вычисления провести в сферических координатах. Найдем $z_ц$, по формуле (56.14), положив $z = \rho\cos\theta$, $dV = \rho^2 \sin\theta d\rho d\varphi d\theta$:

$$z_ц = \frac{6}{\pi R^3}\iiint\limits_V z dv = \frac{6}{\pi R^3}\int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{\pi/2} \sin\theta\cos\theta d\theta \int\limits_0^R \rho^3 d\rho =$$

$$= \frac{6}{\pi R^3}\,\varphi\Big|_0^{\pi/2}\left(-\frac{\cos 2\theta}{4}\right)\Big|_0^{\pi/2}\,\frac{\rho^4}{4}\Big|_0^R = \frac{3}{8}R.$$

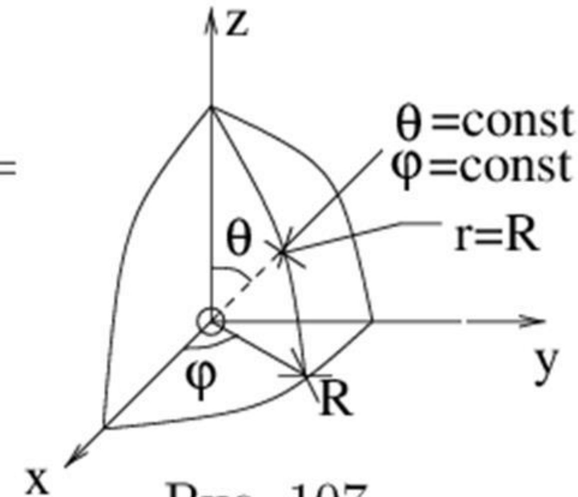


Рис. 107.

Пример 56.7. *Найти кинетическую энергию $\frac{1}{8}$ части шара радиуса R, вращающегося вокруг одной из осей Ox, Oy, или Oz (рис. 107) с угловой скоростью ω.*

Р е ш е н и е: Кинетическая энергия тела, вращающегося вокруг некоторой оси с угловой скоростью ω равна $W = \frac{I\omega^2}{2}$, где I – есть момент инерции тела относительно этой оси. Для вычисления момента инерции в нашем примере естественно использовать сферические координаты.

Учитывая симметрию и формулы (56.14) и (56.19), вычислим значение

$$I = I_x = I_y = I_z = \frac{2}{3}I_0 = \frac{2}{3}\gamma \iiint\limits_V \rho^2 dV = \frac{2}{3}\gamma \iiint\limits_V \rho^4 \sin\theta d\rho d\varphi d\theta =$$

$$= \frac{2}{3}\gamma \int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{\pi/2} \sin\theta d\theta \int\limits_0^R \rho^4 d\rho = \frac{2}{3}\gamma\ \varphi\Big|_0^{\pi/2} (-\cos\theta)\Big|_0^{\pi/2} \frac{\rho^5}{5}\Big|_0^R = \frac{\gamma\pi}{15}R^5,$$

а затем и кинетическую энергию

$$W = \frac{I\omega^2}{2} = \frac{\gamma\pi}{30}\omega^2 R^5.$$

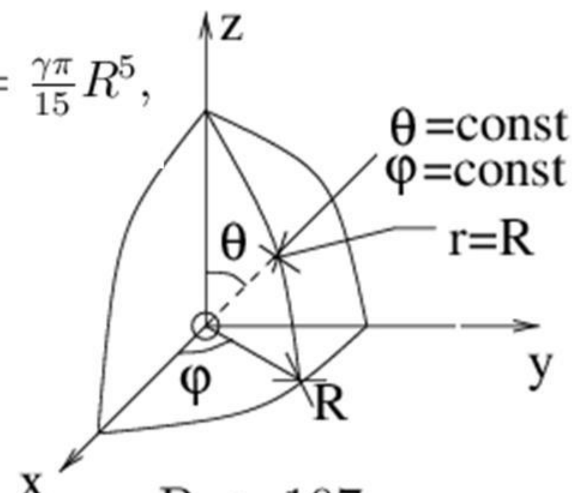


Рис. 107.

Спасибо за внимание