

Тема 1. Числа и вычисления. Теория.



Делители и кратные

Делителем натурального числа a называется натуральное число, на которое a делится без остатка.

Кратным натурального числа a называют натуральное число, которое делится без остатка на a .

Основные признаки делимости:

- если запись натурального числа оканчивается цифрой 0, то это число делится на 10;
- если запись натурального числа оканчивается цифрой 0 или 5, то это число делится на 5;
- если запись натурального числа оканчивается чётной цифрой (0, 2, 4, 6 или 8), то это число делится на 2;
- если сумма цифр числа делится на 3, то и число делится на 3;
- если сумма цифр числа делится на 9, то и число делится на 9.

Натуральное число больше 1 называют *простым*, если оно имеет ровно два натуральных делителя: единицу и само себя. В противном случае натуральное число называют *составным*.

НОД и НОК

Наибольшее натуральное число, на которое делятся числа a и b , называют *наибольшим общим делителем* (НОД) этих чисел. Например, $\text{НОД}(24; 36) = 12$.

Натуральные числа называют *взаимно простыми*, если их НОД равен 1.

Чтобы найти НОД нескольких натуральных чисел, надо:

- *разложить их на простые множители;*
- *из множителей, входящих в разложение одного из этих чисел, вычеркнуть те, которые не входят в разложение других чисел;*
- *найти произведение оставшихся множителей.*

Наименьшим общим кратным (НОК) натуральных чисел a и b называют наименьшее натуральное число, которое кратно и a , и b .

Чтобы найти НОК нескольких натуральных чисел, надо:

- *разложить их на простые множители;*
- *выписать множители, входящие в разложение одного из чисел;*
- *добавить к ним недостающие множители остальных чисел;*
- *найти произведение получившихся множителей.*

НОД и НОК

Пример

$$\begin{array}{r|l} 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$$\text{НОД}(24; 36) = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 12.$$

$$\text{НОК}(24; 36) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 72.$$

Действия с обыкновенными дробями

Чтобы правильно выполнить сравнение, сложение или вычитание обыкновенных дробей нужно сначала привести их к общему знаменателю:

ПЕРВЫЙ СПОСОБ НАЙТИ ОБЩИЙ ЗНАМЕНАТЕЛЬ	ВТОРОЙ СПОСОБ НАЙТИ ОБЩИЙ ЗНАМЕНАТЕЛЬ	ТРЕТИЙ СПОСОБ НАЙТИ ОБЩИЙ ЗНАМЕНАТЕЛЬ
Сделать общим знаменателем произведение знаменателей Пример: $\frac{1}{2} + \frac{3}{5} = \frac{\quad}{10}$	Сделать общим знаменателем больший из знаменателей Пример: $\frac{1}{3} + \frac{5}{6} = \frac{\quad}{6}$	Сделать общим знаменателем число, в несколько раз превышающее больший из знаменателей Пример: $\frac{1}{6} + \frac{7}{9} = \frac{\quad}{18}$

Примеры: $\frac{4}{25} + \frac{15}{4} = \frac{4 \cdot 4 + 25 \cdot 15}{25 \cdot 4} = \frac{16 + 375}{100} = \frac{391}{100} = 3,91.$

$$\frac{3}{2} - \frac{9}{5} = \frac{3 \cdot 5 - 2 \cdot 9}{2 \cdot 5} = -\frac{3}{10} = -0,3.$$

Действия с обыкновенными дробями

Чтобы сложить смешанные числа, надо:

- привести дробные части этих чисел к общему знаменателю;
- отдельно выполнить сложение целых частей и отдельно дробных; если при сложении дробных частей получилась неправильная дробь, выделить целую часть из этой дроби и прибавить её к полученной целой части.

Пример

$$5\frac{5}{6} + 3\frac{3}{4} = 5\frac{10}{12} + 3\frac{9}{12} = 8\frac{19}{12} = 9\frac{7}{12}.$$

Чтобы выполнить вычитание смешанных чисел, надо:

- привести дробные части этих чисел к общему знаменателю; если дробная часть уменьшаемого меньше дробной части вычитаемого, превратить её в неправильную дробь, уменьшив на единицу целую часть;
- отдельно выполнить вычитание целых частей и отдельно дробных.

Пример

$$5\frac{7}{9} - 2\frac{1}{6} = 5\frac{14}{18} - 2\frac{3}{18} = 3\frac{11}{18}.$$

Действия с обыкновенными дробями

Примеры:

$$\begin{array}{r} 5 \\ \hline 11 \\ 21 \end{array} - \begin{array}{r} 3 \\ \hline 2 \\ 35 \end{array} = \frac{55}{105} - \frac{6}{105} = \frac{49}{105} = \frac{7}{15}.$$

7*3 7*5

$$1 - \frac{7}{13} = \frac{13}{13} - \frac{7}{13} = \frac{6}{13}$$

$$5\frac{5}{6} + 3\frac{3}{4} = 5\frac{10}{12} + 3\frac{9}{12} = 8\frac{19}{12} = 9\frac{7}{12}.$$

$$8 - 5\frac{3}{11} = 7\frac{11}{11} - 5\frac{3}{11} = 2\frac{8}{11}.$$

$$5\frac{7}{9} - 2\frac{1}{6} = 5\frac{14}{18} - 2\frac{3}{18} = 3\frac{11}{18}.$$

$$8\frac{3}{17} - 4 = 4\frac{3}{17}.$$

$$3\frac{4}{9} - 1\frac{5}{6} = 3\frac{8}{18} - 1\frac{15}{18} = 2\frac{26}{18} - 1\frac{15}{18} = 1\frac{11}{18}$$

$$8\frac{3}{17} + 4 = 12\frac{3}{17}.$$

$$16\frac{3}{8} + 19\frac{1}{4} = 16\frac{3}{8} + 19\frac{2}{8} = 35\frac{5}{8}$$

Действия с обыкновенными дробями

Чтобы умножить дробь на натуральное число, надо её числитель умножить на это число, а знаменатель оставить без изменения.

Пример

$$\frac{4}{5} \cdot 3 = \frac{4 \cdot 3}{5} = \frac{12}{5} = 2 \frac{2}{5}$$

УМНОЖЕНИЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ДРОБЕЙ

Чтобы умножить обыкновенные дроби, необходимо умножить числитель на числитель, а знаменатель на знаменатель

Пример:

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{5} = \frac{3 \cdot 1}{4 \cdot 5} = \frac{3}{20}$$

ДЕЛЕНИЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ДРОБЕЙ

Чтобы разделить обыкновенные дроби, необходимо первую дробь оставить без изменения, а вторую перевернуть, а затем умножить дроби

Пример:

$$\frac{3}{4} : \frac{2}{7} = \frac{3}{4} \cdot \frac{7}{2} = \frac{3 \cdot 7}{4 \cdot 2} = \frac{21}{8}$$

Действия с обыкновенными дробями

Для того чтобы выполнить умножение смешанных чисел, надо их записать в виде неправильных дробей, а затем воспользоваться правилом умножения дробей.

Чтобы найти дробь от числа, нужно умножить число на эту дробь.

Чтобы умножить смешанное число на натуральное число, можно:

- умножить целую часть на натуральное число;
- умножить дробную часть на это натуральное число;
- сложить полученные результаты.

Два числа, произведение которых равно 1, называют взаимно обратными.

Примеры: $\frac{7}{15} \cdot 40 = \frac{7}{15} \cdot \frac{40}{1} = \frac{7 \cdot 40}{15 \cdot 1} = \frac{7 \cdot 8}{3 \cdot 1} = \frac{56}{3} = 18\frac{2}{3}$

$$\left(\frac{19}{8} + \frac{11}{12}\right) : \frac{5}{48} = \frac{19 \cdot 3 + 11 \cdot 2}{24} \cdot \frac{48}{5} = \frac{79 \cdot 48}{24 \cdot 5} = \frac{79 \cdot 2}{1 \cdot 5} = 31,6.$$

Действия с обыкновенными дробями

Чтобы разделить одну дробь на другую, надо делимое умножить на число, обратное делителю.

Пример

$$2\frac{2}{5} : 1\frac{1}{15} = \frac{12}{5} : \frac{16}{15} = \frac{12}{5} \cdot \frac{15}{16} = \frac{12 \cdot 15}{5 \cdot 16} = \frac{3 \cdot 3}{4} = \frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}$$

Чтобы найти число по данному значению его дроби, надо это значение разделить на эту дробь.

Частное двух чисел или выражений, в котором знак деления обозначен чертой, называют *дробным выражением*.

Отношения и пропорции

Частное двух чисел называют *отношением* этих чисел. Отношение показывает, во сколько раз первое число больше второго или какую часть первое число составляет от второго.

Равенство двух отношений называют *пропорцией*: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$; $a:b = c:d$, где a и d – крайние члены пропорции, c и b – средние члены пропорции.

В верной пропорции произведение крайних членов равно произведению средних: $a \cdot d = b \cdot c$. Если произведение крайних членов пропорции равно произведению средних членов, то пропорция верна.

Чтобы найти неизвестный крайний член пропорции, надо произведение средних членов разделить на известный крайний член пропорции.

Чтобы найти неизвестный средний член пропорции, надо произведение крайних членов пропорции разделить на известный средний член пропорции.

Две величины называют *прямо пропорциональными*, если при увеличении (уменьшении) одной из них в несколько раз другая увеличивается (уменьшается) во столько же раз.

Две величины называют *обратно пропорциональными*, если при увеличении (уменьшении) одной из них в несколько раз другая уменьшается (увеличивается) во столько же раз.

Действия с десятичными дробями

Чтобы округлить десятичную дробь до определенного разряда целой или дробной части, все меньшие разряды отбрасываются, а предшествующий отбрасываемой при округлении цифре разряд не изменяет своей величины, если за ним идут цифры 0, 1, 2, 3, 4, и увеличивается на единицу, если идут цифры 5, 6, 7, 8, 9.

Примеры

а) округлить 41,958 до сотых: $41,958 \approx 41,96$;

б) округлить 7,12 до десятых: $7,12 \approx 7,1$.

Действия с десятичными дробями

Чтобы **сложить (вычесть)** две десятичные дроби нужно:

- 1) Уравнять в этих дробях количество знаков после запятой;
- 2) Записать их друг под другом так, чтобы запятая была под запятой;
- 3) Выполнить сложение (вычитание) и записать в ответе запятую под запятыми.

Примеры: $8,345 + 1,8 = 8,345 + 1,800 = \begin{array}{r} 8,345 \\ +1,800 \\ \hline 10,145 \end{array}$

$$10,145 - 1,08 = 10,145 - 1,080 = \begin{array}{r} 10,145 \\ -1,080 \\ \hline 9,065 \end{array}$$

Действия с десятичными дробями

Чтобы **перемножить** две десятичные дроби нужно:

- 1) Выполнить умножение, не обращая внимание на запятые;
- 2) В ответе, считая справа, отделить запятой столько цифр, сколько их стоит после запятой в обоих множителях вместе.

Пример: $3,\underbrace{75}_2 * 1,\underbrace{8}_1 = \begin{array}{r} 375 \\ * 18 \\ \hline 3000 \\ + 375 \\ \hline 6750 \end{array} = 6,\underbrace{750}_3 = 6,75$

Действия с десятичными дробями

Чтобы **разделить** число на десятичную дробь нужно:

- 1) В делимом и делителе перенести запятую вправо на столько цифр, сколько их после запятой в делителе;
- 2) Выполнить деление столбиком на натуральное число.

Примеры: $35,1 : 1,8 = 351 : 18 =$

$$\begin{array}{r} 19,5 \\ 18 \overline{) 351} \\ \underline{-18} \\ 171 \\ \underline{-162} \\ 90 \\ \underline{-90} \\ 0 \end{array} = 19,5$$

$$14,76 : 3,6 = 147,6 : 36 = \frac{147,6}{144} \frac{36}{4,1} = 4,1$$

Действия с различными дробями

Чтобы выполнить действия с десятичными и обычными дробями, надо числа записать в каком-то одном виде.

Десятичную дробь переводят в обыкновенную следующим образом:

- 1) дробную часть записывают в числитель;
- 2) в знаменатель записывают единицу с таким количеством нулей, сколько знаков после запятой в дробной части десятичной дроби;
- 3) Если можно, то полученную дробь сокращают.

Пример: $5, \underbrace{383}_3 = 5 \frac{\underbrace{383}_3}{1 \underbrace{000}_3} = \frac{5383}{1000}$

$$0, \underbrace{75}_2 = \frac{75}{1 \underbrace{00}_2} = \frac{3 * \cancel{25}}{4 * \cancel{25}} = \frac{3}{4}$$

Действия с различными дробями

Чтобы обратить периодическую дробь в обыкновенную, надо:

- из числа, стоящего до второго периода, вычесть число, стоящее до первого периода;
- записать эту разность числителем;
- в знаменателе написать цифру 9 столько раз, сколько цифр в периоде;
- дописать в знаменателе столько нулей, сколько цифр между запятой и первым периодом.

Примеры

а) $0,(45) = \frac{45-0}{99} = \frac{5}{11};$

б) $2,1(34) = \frac{2134-21}{990} = \frac{2113}{990}.$

Действия с различными дробями

Обыкновенную дробь переводят в десятичную:

- 1) Разделив числитель на знаменатель столбиком;
- 2) Помножив знаменатель и числитель на такое число, чтобы в знаменателе получилось число, кратное десяти.

Пример: $\frac{3}{25} =$

3	25
– 30	0,12
25	
– 50	
50	
– 50	
0	

 $= 0,12$

$$\frac{3}{25} = \frac{3 \times 4}{25 \times 4} = \frac{12}{100} = 0,12$$

Действия с различными дробями

Чтобы перевести смешанное число в неправильную дробь, нужно:

- 1) Умножить целую часть на знаменатель, прибавить числитель и результат записать в числитель;
- 2) Знаменатель оставить прежним.

Примеры: $1\frac{2}{3} = \frac{1 \cdot 3 + 2}{3} = \frac{3 + 2}{3} = \frac{5}{3}$

$$0,875 \cdot 2\frac{2}{7} = \frac{875}{1000} \cdot \frac{16}{7} = \frac{125 \cdot 16}{1000 \cdot 1} = \frac{1 \cdot 16}{8 \cdot 1} = 2$$

$$\frac{0,9}{1 + \frac{1}{8}} = \frac{\frac{9}{10}}{1\frac{1}{8}} = \frac{\frac{9}{10}}{\frac{9}{8}} = \frac{9}{10} * \frac{8}{9} = \frac{8}{10} = 0,8$$

Положительные и отрицательные числа

Два числа, отличающиеся друг от друга только знаками, называют *противоположными* числами.

Натуральные числа, противоположные им числа и нуль называют *целыми* числами.

Модулем $|a|$ числа a называется само это число, если оно неотрицательно, и противоположное ему число, если оно отрицательно:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \geq 0, \\ -a, & \text{если } a < 0. \end{cases}$$

Основные свойства модуля:

- $|-a| = a$;
- $|a| \geq 0$;
- $|a|^2 = a^2$;
- $\|a\| = |a|$;
- $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$;
- $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|} \ (b \neq 0)$;
- $|a + b| \leq |a| + |b|$;
- $|a| - |b| \leq ||a| - |b||$.

ЗНАКИ

СЛОЖЕНИЕ ЧИСЕЛ С РАЗНЫМИ ЗНАКАМИ

Чтобы сложить два числа с разными знаками, необходимо из более крупного (не учитывая знаки) вычесть менее крупное. И поставить перед результатом знак более крупного числа

Пример:

$$6 + (-4) = +(6 - 4) = 2$$

$$-8 + 1 = -(8 - 1) = -7$$

СЛОЖЕНИЕ ОТРИЦАТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Чтобы сложить два отрицательных числа, необходимо сложить их (не учитывая знаки), и поставить перед результатом минус

Пример:

$$-8 + (-2) = -(8 + 2) = -10$$

$$-1 - 5 = -(1 + 5) = -6$$

ЗНАКИ

ЗНАКИ ПРИ УМНОЖЕНИИ И ПРИ ДЕЛЕНИИ

Минус на минус даёт плюс (при умножении и при делении)

Плюс на минус даёт минус (при умножении и при делении)

Пример:

$$+1 \cdot (-4) = -4$$

$$-6 \cdot (+1) = -6$$

$$-2 \cdot (-4) = +8$$

$$+4 : (-4) = -1$$

$$-8 : (+2) = -4$$

$$-4 : (-2) = +2$$

Чтобы найти длину отрезка на координатной прямой, надо из координаты его правого конца вычесть координату его левого конца.

Степени и корни

Свойства арифметического корня:

- $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$;
- $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ ($b \neq 0$);
- $\sqrt[p]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[pn]{a}$;
- $\sqrt[nk]{a^k} = \sqrt[n]{a}$;
- $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[p]{a} = \sqrt[np]{a^{n+p}}$;
- $(\sqrt[n]{a})^p = \sqrt[n]{a^p}$;
- $\sqrt[n]{c^p} = c^{\frac{p}{n}}$ (n и p – натуральные).

Свойства степеней (p и q – произвольные рациональные числа):

- $c^1 = c$;
- $c^0 = 1$;
- $c^{-p} = \frac{1}{c^p}$;
- $c^p \cdot c^q = c^{p+q}$;
- $(c^p)^q = c^{pq}$;
- $\frac{c^p}{c^q} = c^{p-q}$;
- $(c_1 \cdot c_2)^p = c_1^p \cdot c_2^p$;
- $\left(\frac{c_1}{c_2}\right)^p = \frac{c_1^p}{c_2^p}$.

Примеры

а) $6^2 = 6 \cdot 6 = 36$;

б) $-6^2 = -36$;

в) $(-6)^2 = (-6) \cdot (-6) = 36$;

г) $\sqrt[3]{8} = 2$;

д) $\sqrt[3]{-8} = -2$;

е) $\sqrt{81} = 9$.

Степени и корни

Таблица квадратов двузначных чисел

x^2	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81
1	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361
2	400	441	484	529	576	625	676	729	784	841
3	900	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521
4	1600	1681	1764	1849	1936	2025	2116	2209	2304	2401
5	2500	2601	2704	2809	2916	3025	3136	3249	3364	3481
6	3600	3721	3844	3969	4096	4225	4356	4489	4624	4761
7	4900	5041	5184	5329	5476	5625	5776	5929	6084	6241
8	6400	6561	6724	6889	7056	7225	7396	7569	7744	7921
9	8100	8281	8464	8649	8836	9025	9216	9409	9604	9801

Тема 1. Числа и вычисления. Практические задания с решениями

Задание 1 № 314264

Вычислите: $\frac{4}{25} + \frac{15}{4}$.

Решение.

Приведём дроби к общему знаменателю:

$$\frac{4}{25} + \frac{15}{4} = \frac{4 \cdot 4 + 25 \cdot 15}{25 \cdot 4} = \frac{16 + 375}{100} = \frac{391}{100} = 3,91.$$

О т в е т: 3,91.

Задание 1 № 314127

Найдите значение выражения $18 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^2 - 20 \cdot \frac{1}{9}$.

Решение.

Вынесем общий множитель за скобки:

$$18 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^2 - 20 \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{9} \left(18 \cdot \frac{1}{9} - 20\right) = \frac{1}{9} \cdot (-18) = -2.$$

О т в е т: -2.

Задание 1 № 314283

Найдите значение выражения

$$\left(\frac{11}{30} - \frac{17}{36}\right) : \frac{19}{45}.$$

Решение.

Приведём в скобках к общему знаменателю:

$$\left(\frac{11}{30} - \frac{17}{36}\right) : \frac{19}{45} = \frac{11 \cdot 36 - 17 \cdot 30}{1080} \cdot \frac{45}{19} = -\frac{114 \cdot 45}{1080 \cdot 19} = -\frac{6}{24} = -0,25.$$

Ответ: -0,25.

Задание 1 № 337375

Найдите значение выражения $\frac{27}{5 \cdot 4}.$

Решение.

Найдём значение выражения:

$$\frac{27}{5 \cdot 4} = \frac{27}{20} = \frac{135}{100} = 1,35.$$

Ответ: 1,35.

Задание 1 № 337385

Найдите значение выражения $\left(2\frac{3}{4} + 2\frac{1}{5}\right) \cdot 16$.

Решение.

Выполним действие в скобках, затем умножение:

$$\left(2\frac{3}{4} + 2\frac{1}{5}\right) \cdot 16 = \left(\frac{11}{4} + \frac{11}{5}\right) \cdot 16 = \frac{55 + 44}{20} \cdot 16 = \frac{99 \cdot 16}{20} = \frac{99 \cdot 8}{10} = \frac{792}{10} = 79,2.$$

Ответ: 79,2.

Приведём другое решение.

Раскроем скобки и выполним умножение:

$$\left(2\frac{3}{4} + 2\frac{1}{5}\right) \cdot 16 = \left(2 + \frac{3}{4}\right) \cdot 16 + \left(2 + \frac{1}{5}\right) \cdot 16 = 32 + \frac{3 \cdot 16}{4} + 32 + \frac{1 \cdot 16}{5} = 32 + 12 + 32 + \frac{32}{5} = 79,2.$$

Задание 1 № 341664

Найдите значение выражения $\frac{1}{\frac{1}{18} - \frac{1}{21}}$.

Решение.

Найдём значение выражения:

$$\frac{1}{\frac{1}{18} - \frac{1}{21}} = \frac{1}{\frac{7-6}{126}} = \frac{1}{\frac{1}{126}} = 126.$$

Ответ: 126.

Задание 1 № 314203

Найдите значение выражения $\frac{6,9 - 1,5}{2,4}$.

Решение.

Умножим числитель и знаменатель на 10:

$$\frac{6,9 - 1,5}{2,4} = \frac{69 - 15}{24} = \frac{54}{24} = \frac{9}{4} = 2,25.$$

Ответ: 2,25.

Задание 1 № 314236

Найдите значение выражения $\frac{4,8 \cdot 0,4}{0,6}$.

Решение.

Умножим числитель и знаменатель на 100:

$$\frac{4,8 \cdot 0,4}{0,6} = \frac{48 \cdot 4}{60} = 3,2.$$

Ответ: 3,2.

Задание 1 № 314233

Найдите значение выражения $30 - 0,8 \cdot (-10)^2$.

Решение.

Последовательно получаем:

$$30 - 0,8 \cdot (-10)^2 = 30 - 0,8 \cdot 100 = 30 - 80 = -50$$

Ответ: -50.

Задание 1 № 316314

Найдите значение выражения: $5,4 \cdot 0,8 + 0,08$.

Решение.

Для упрощения вычислений, вынесем общий множитель за скобки:

$$5,4 \cdot 0,8 + 0,08 = 5,4 \cdot 0,8 + 0,1 \cdot 0,8 = 0,8 \cdot (5,4 + 0,1) = 0,8 \cdot 5,5 = 4,4.$$

Ответ: 4,4.

Задание 1 № 337334

Найдите значение выражения $0,007 \cdot 7 \cdot 700$.

Решение.

Представим числа в стандартном виде:

$$0,007 \cdot 7 \cdot 700 = 7 \cdot 10^{-3} \cdot 7 \cdot 7 \cdot 10^2 = 343 \cdot 10^{-1} = 34,3.$$

Ответ: 34,3.

Задание 1 № 314233

Найдите значение выражения $-7,2 - 9 \cdot (-4,8)$

Решение.

Последовательно получаем: $-7,2 + 43,2 = 36$

Ответ: 36