

ФУНКЦИЯ.

СВОЙСТВА ФУНКЦИИ.

Лекция №2 по математике. Для студентов 1 курса весенний семестр отделение «Сестринское дело».

Составила преподаватель математики Чухарева Ю.И.

Определение .

Функция — это «закон»
однозначного соответствие
между элементами двух
множеств X и Y .

Определение .

Говорят, что

на множестве X имеется
функция (*отображение, операция, оператор*) f со значениями из Y , если
каждому элементу x из множества X по
правилу f поставлен в соответствие
некоторый элемент y из множества Y .

Определение.

Обозначение: $y = f(x)$, где

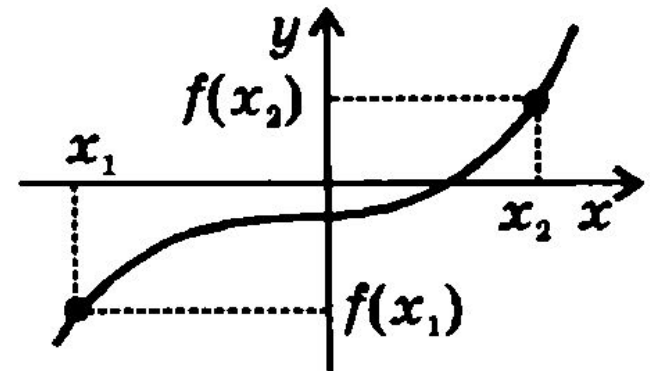
x — независимая переменная (аргумент функции),

y — зависимая переменная (функция).

Множество значений x называется **областью определения** функции (обычно обозначается D).

Множество значений y называется **областью значений** функции (обычно обозначается E).

Графиком функции называется множество точек плоскости с координатами $(x, f(x))$.



Способы задания функции.

СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ФУНКЦИЙ

- **Аналитический способ:** функция задается с помощью математической формулы.

Примеры: $y = x^2$, $y = \ln x$

- **Табличный способ:** функция задается с помощью таблицы.

Пример.

x	1	2	3	4	5
y	2	4	6	8	10

- **Описательный способ:** функция задается словесным описанием.

Пример: функция Дирихле $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{для рациональных } x, \\ 0 & \text{для иррациональных } x. \end{cases}$

- **Графический способ:** функция задается с помощью графика.

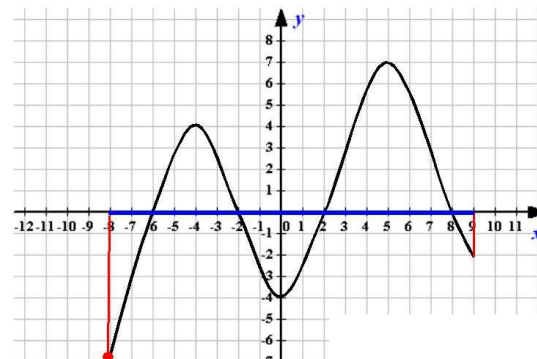
Основные свойства функции.

- Область определения функции.
 - Область значения функции.
 - Четность и нечетность функции.
 - Периодичность функции.
 - Точки пересечения графика функции с осями.
 - Промежутки знакопостоянства.
 - Асимптоты.
 - Точки экстремума. (максимум и минимум функции).
 - Промежутки монотонности функции. (промежутки возрастания и убывания функции)
 - График функции.
 - Дополнительные точки.
-

Область определения функции.

- **Область определения функции** – это множество всех значений аргумента, на котором задается функция.

Область определения функции



Если функция задана формулой вида $f(x) = \frac{A}{B}$,

то область определения является решением неравенства $B \neq 0$.

Если функция задана формулой вида $f(x) = \sqrt{B}$,

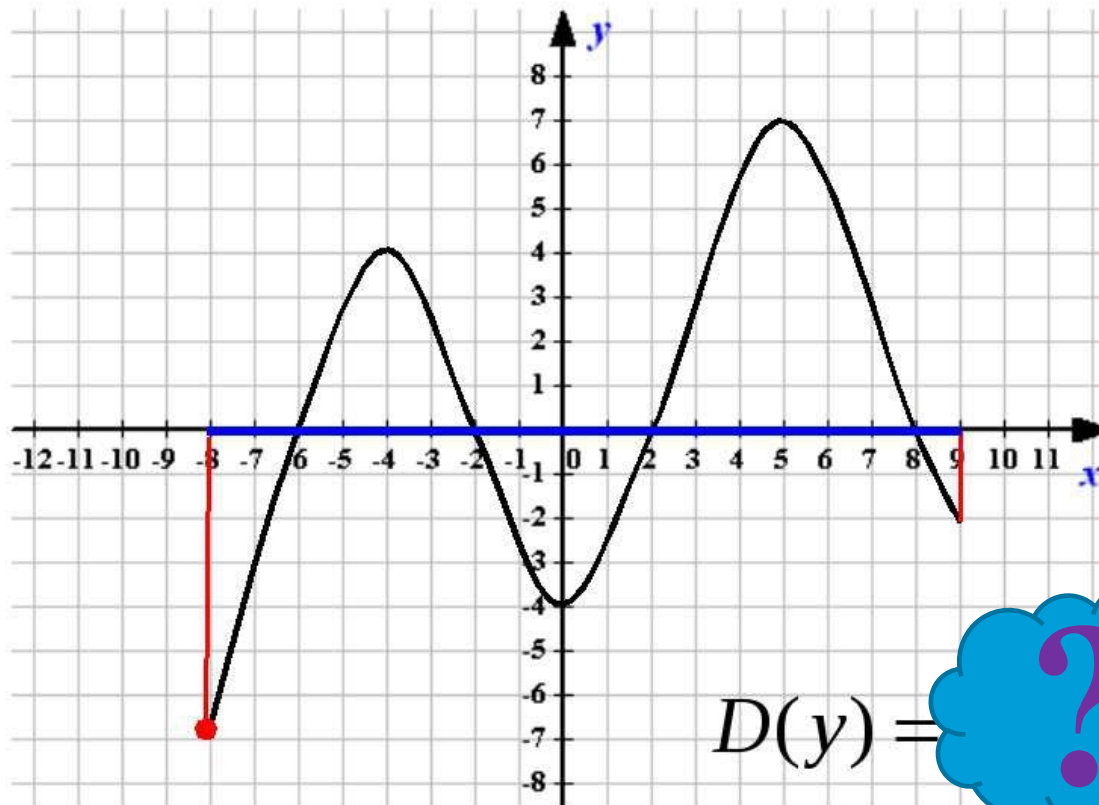
то область определения является решением неравенства $B \geq 0$.

Если функция задана формулой вида $f(x) = \log_a B$,

то область определения является решением неравенства $B > 0$.

Область определения функции.

- Область определения функции – это множество всех значений аргумента, на котором задается функция.

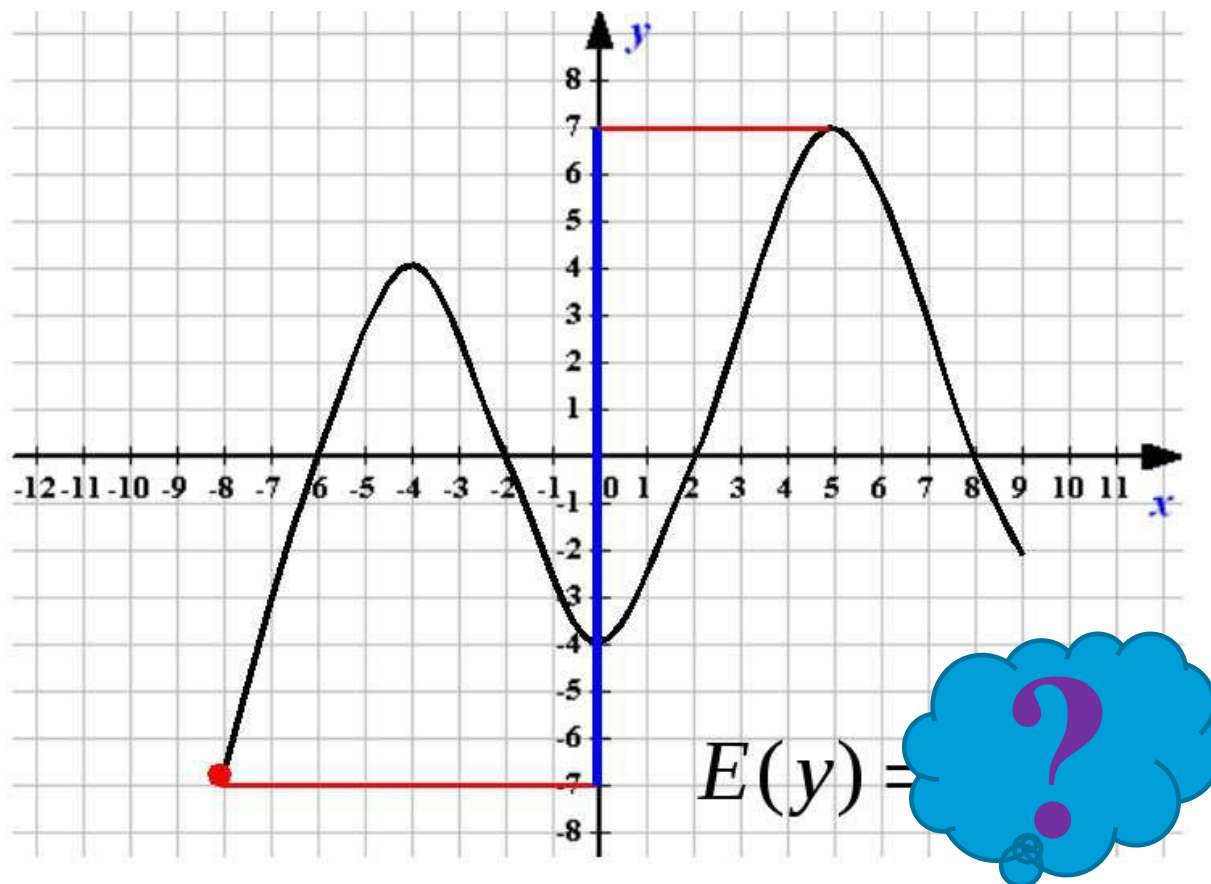


$$D(y) =$$



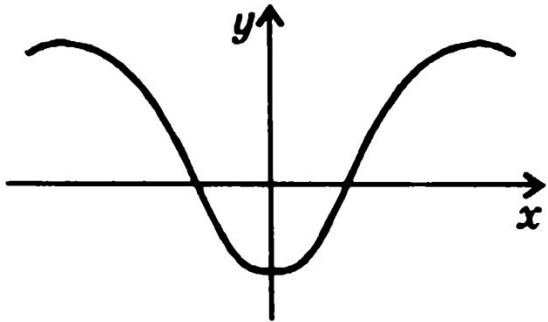
Область значений функции.

- Областью значений функции $y = f(x)$ называется множество всех значений функции, которые она принимает при переборе всех x из области определения .

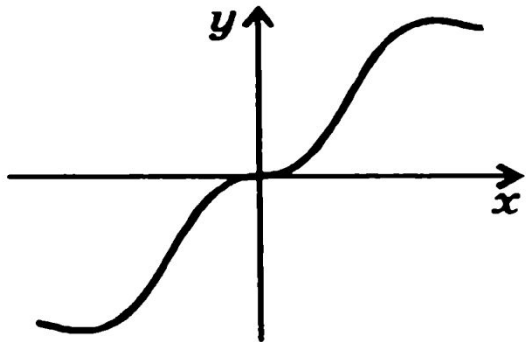


Четность и нечетность функции

$$f(-x) = f(x).$$



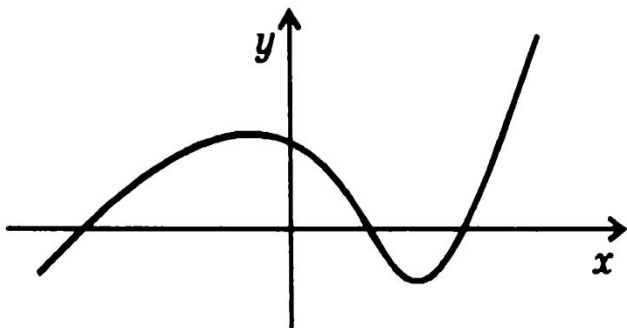
$$f(-x) = -f(x).$$



1. Четная функция: $f(-x) = f(x)$;

2. Нечетная функция: $f(-x) = -f(x)$;

3. Ни четная и ни нечетная функция.

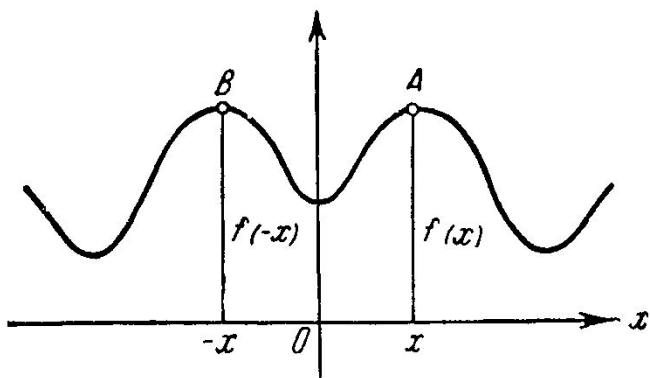


Четность и нечетность функции

Функция называется четной, если:

- область определения функции симметрична относительно нуля,
- для любого x из области определения выполняется равенство

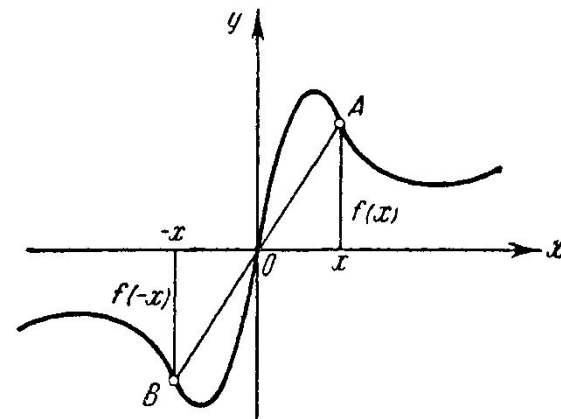
$$f(-x) = f(x)$$



Функция называется нечетной, если:

- область определения функции симметрична относительно нуля,
- для любого x из области определения выполняется равенство

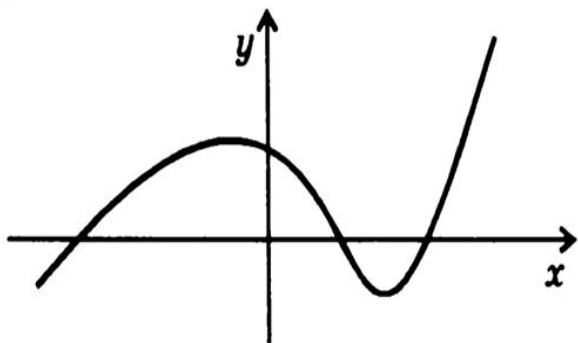
$$f(-x) = -f(x)$$



Функция называется ни четная и ни нечетная, если:

- область определения функции не симметрична относительно нуля,
- для любого x из области определения НЕ выполняется равенства:

$$f(-x) = f(x) \quad \text{и} \quad f(-x) = -f(x)$$



Периодичность функции.

Функция $f(x)$ называется периодической с периодом $T > 0$, если для любого x из области определения значения $x + T$ и $x - T$ также принадлежат области определения и

$$f(x) = f(x + T) = f(x - T).$$

При этом любое число вида Tn , где $n \in \mathbb{N}$, также является периодом этой функции.

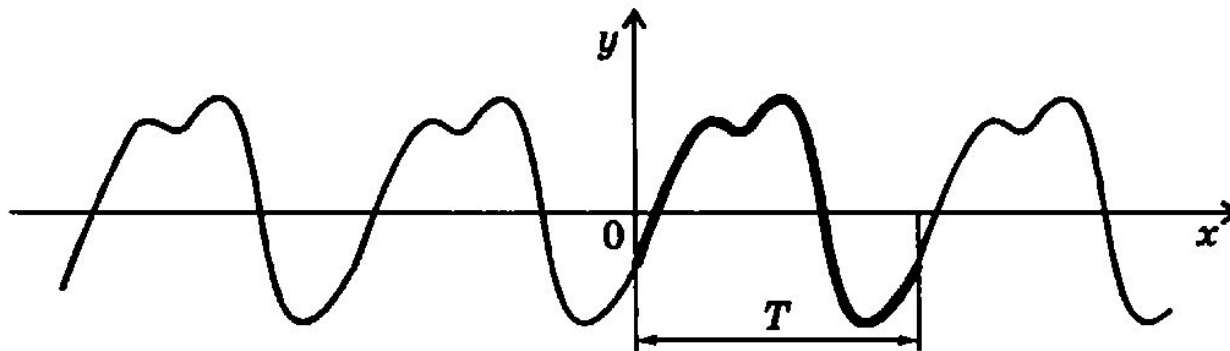
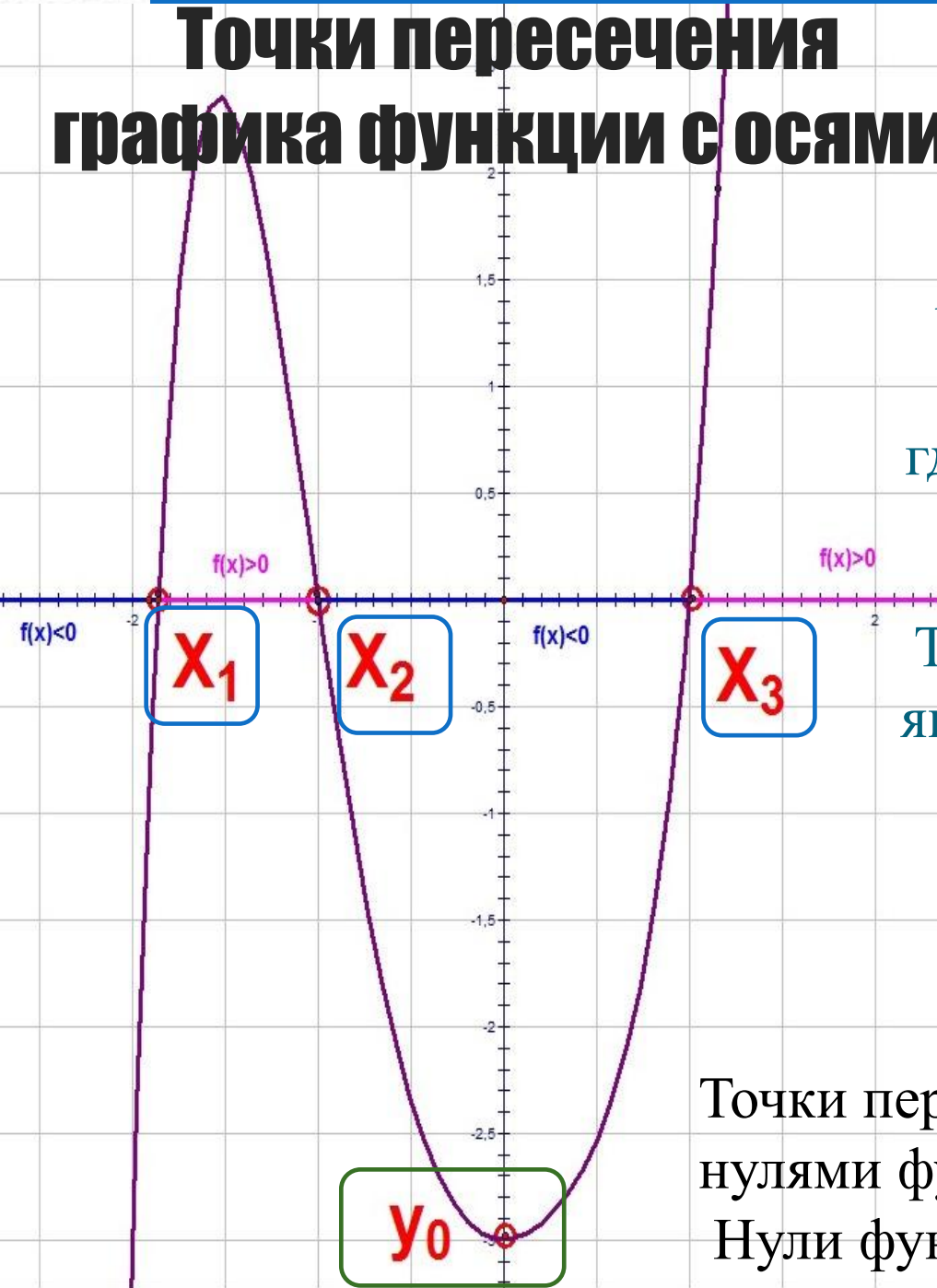


График периодической функции состоит из неограниченно повторяющихся одинаковых фрагментов. Чтобы построить график периодической функции, строят фрагмент графика на любом отрезке длиной T (например, $[0; T]$), а затем производят последовательные параллельные переносы фрагмента графика на T , $2T$, $3T$ и т.д. вдоль оси x (вправо и влево).

Точки пересечения графика функции с осями.



Точка пересечения с осью OY является точка с координатами

$$(0; y_0),$$

где y_0 значение функции при $x=0$,
т.е. $f(0) = y_0$.

Точка пересечения с осью OX является точка с координатами

$$(x_i; 0),$$

где x_i являются корнями
уравнения $f(x) = 0$.

Точки пересечения с осью OX называют нулями функции.

Нули функции: x_1, x_2, x_3

Промежутки знакопостоянства.

- Промежутки знакопостоянства – это промежутки на которых функция сохраняет свой знак, т.е. принимает только положительные или только отрицательные значения.

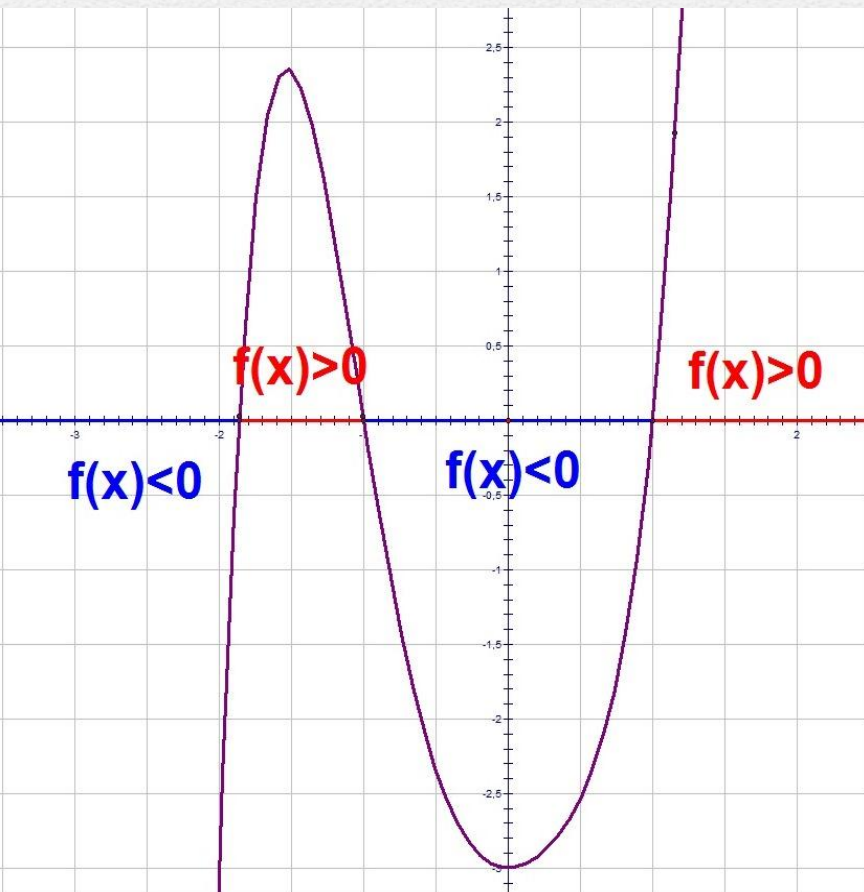


График функции расположен **выше оси OX** и функция принимает **положительные** значения на промежутке, который является решением неравенства $f(x) > 0$.

График функции расположен **ниже оси OX** и функция принимает **отрицательные** значения на промежутке, который является решением неравенства $f(x) < 0$.

Асимптота.



Асимптота.

Прямая $x = a$ является вертикальной асимптотой, если хотя бы один из пределов $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$ (предел справа) или $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$ (предел слева) равен бесконечности.

Прямая $y = b$ является горизонтальной асимптотой, если существуют конечные пределы

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b \text{ или } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$$

Прямая $y = kx + b$ является наклонной асимптотой, если существуют конечные пределы

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} \quad b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx)$$

либо при $x \rightarrow \infty$, либо при $x \rightarrow -\infty$.

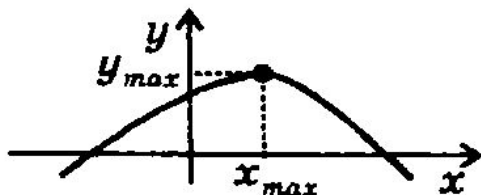
Точки экстремума.

(максимум и минимум функции)

Внутренняя точка x_{max} области определения называется **точкой максимума**, если для всех x из некоторой окрестности этой точки справедливо неравенство:

$$f(x) < f(x_{max}).$$

Значение $y_{max} = f(x_{max})$ называется **максимумом** этой функции.



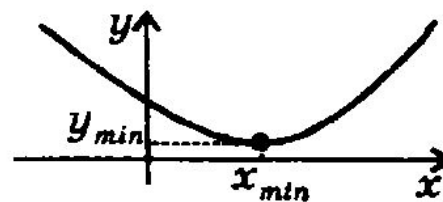
x_{max} — точка максимума

y_{max} — максимум

Внутренняя точка x_{min} области определения называется **точкой минимума**, если для всех x из некоторой окрестности этой точки справедливо неравенство:

$$f(x) > f(x_{min}).$$

Значение $y_{min} = f(x_{min})$ называется **минимумом** этой функции.



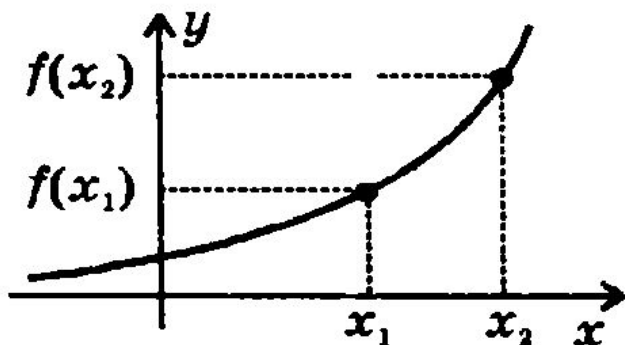
x_{min} — точка минимума

y_{min} — минимум

Промежутки монотонности функции. (промежутки возрастания и убывания функции)

Функция $y = f(x)$ называется возрастающей на интервале $(a; b)$, если для любых x_1 и x_2 из этого интервала таких, что $x_1 < x_2$, справедливо неравенство

$$f(x_1) < f(x_2).$$



Функция $y = f(x)$ называется убывающей на интервале $(a; b)$, если для любых x_1 и x_2 из этого интервала таких, что $x_1 < x_2$, справедливо неравенство

$$f(x_1) > f(x_2).$$

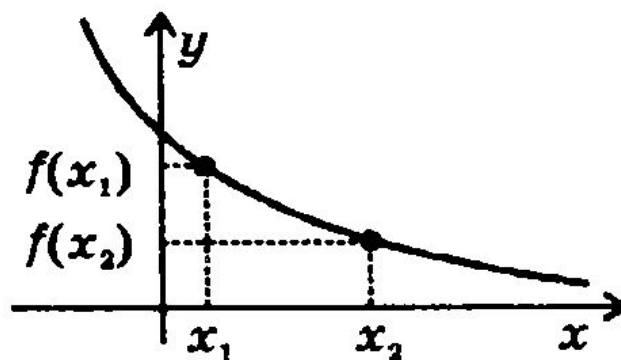
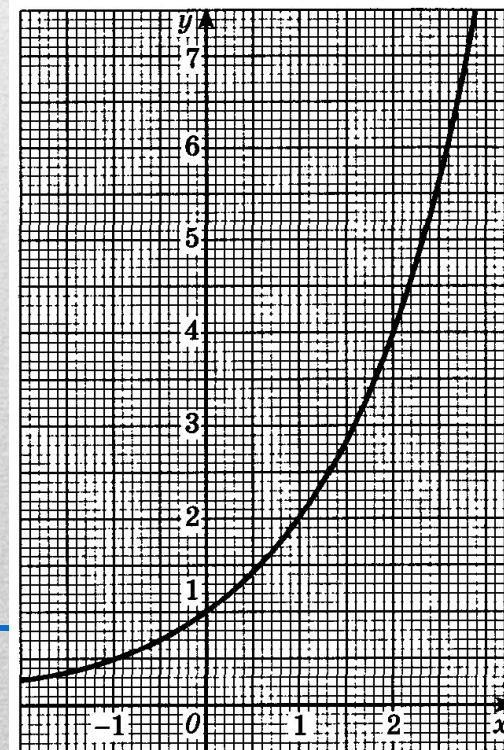
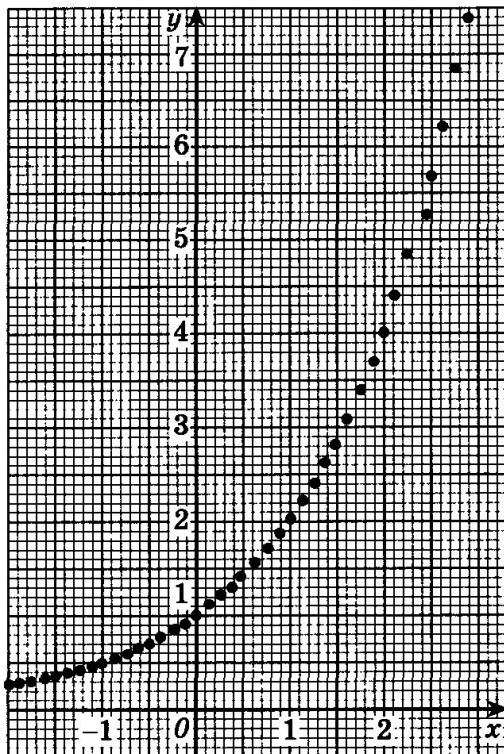


График функции.

Графиком функции называется множество точек с координатами $(x; f(x))$

Говорят, что

- **График функции** — это геометрическое место точек плоскости, абсциссы (x) и ординаты (y) которых связаны указанной функцией: точка (x, y) располагается (или находится) на графике функции f тогда и только тогда, когда $y=f(x)$.



Дополнительные точки

- По результатам исследования функции строится график функции. Для точности построения можно задать точки и найти значение функции в этих точках.

Литература и Интернет ресурсы



- Учебники по Алгебре для 10 и 11 классов.
- Наглядный справочник по алгебре и началам анализа. 7-11кл
Генденштейн, Ершова 1997 -96с.
- Математический анализ элементарных функций Крейн С.Г.,
Ушакова В.Н_1963 -168с.
- <http://www.alleng.ru/index.htm>
- <http://www.cleverstudents.ru>
- <http://mathprofi.ru>
- <http://bigslide.ru/matematika/7286-funkciya-oblast-opredeleniya-i-oblast-znacheniy-fu.html>
- <https://ru.wikipedia.org/wiki>
- Для создания некоторых слайдов использовалась программа
«Живая геометрия»

Желаем успехов.