Производная

Производной ***функции f(x) в точке*** x_0 ***называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента при*** $\Delta x \to 0$***, если этот предел существует.***

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}}$$

Функцию, имеющую производную в точке x_0 ***называют дифференцируемой в этой точке.***

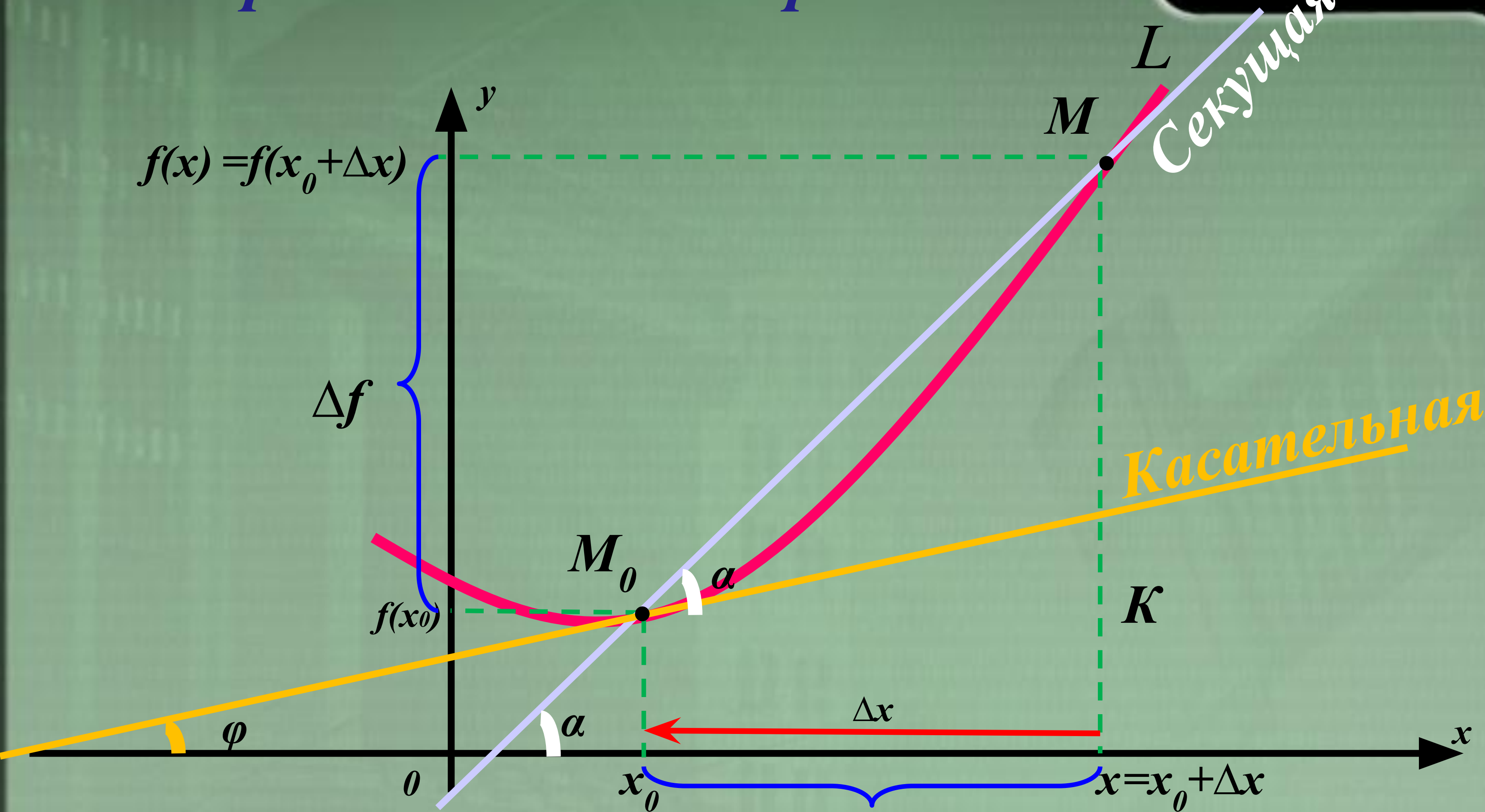
Физический смысл производной

$$v(t) = S'(t) \qquad a(t) = v'(t) = S''(t)$$

Геометрический смысл производной

Касательной к кривой L называется предельное положение секущей MM_0, когда точка M стремится к точке M_0 по кривой L.

Геометрический смысл производной

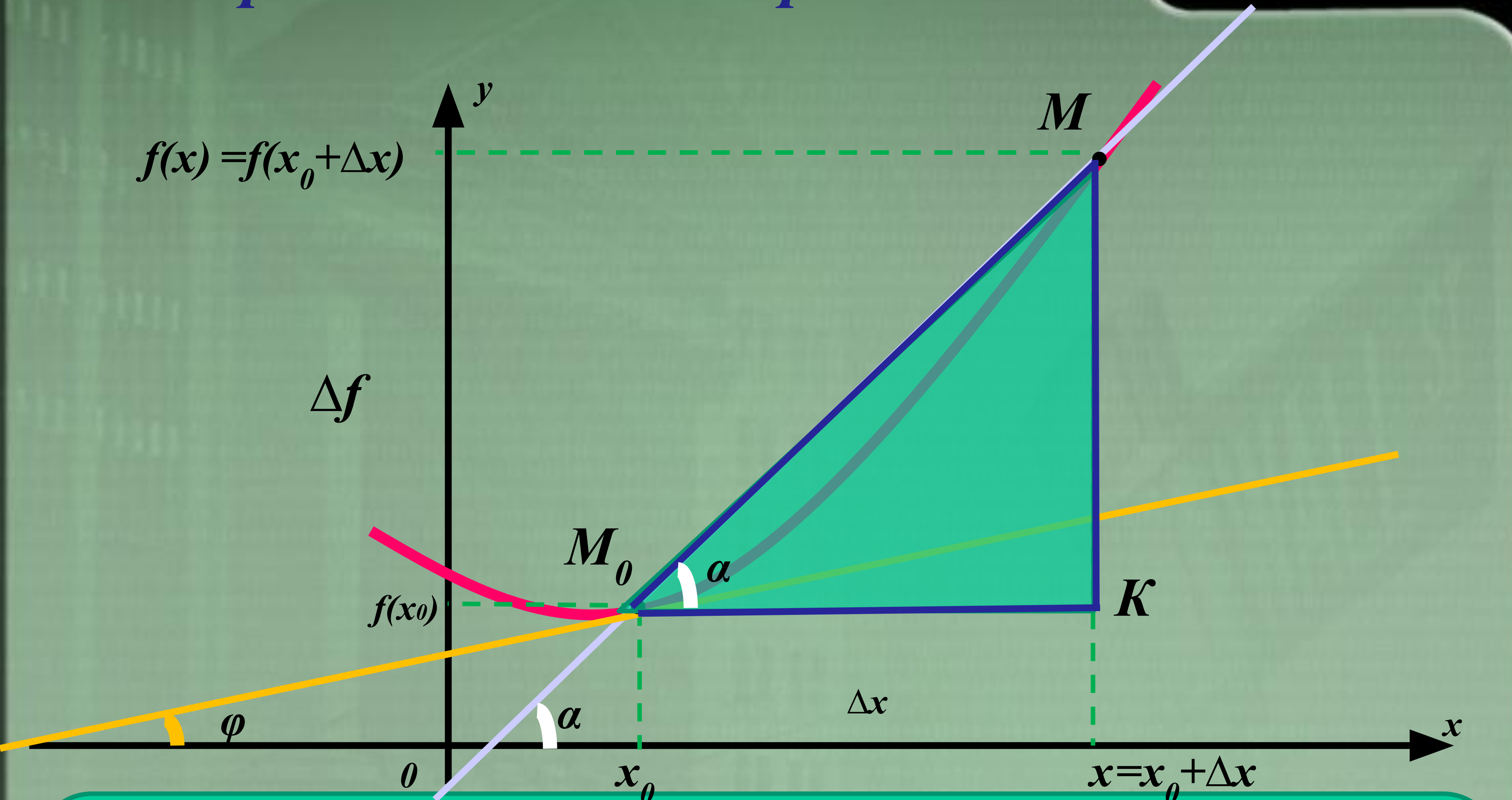


ϕ и α – углы наклона касательной и секущей к положительному направлению оси ОХ.

$$x \to x_o \Rightarrow \ \Delta x \to 0$$

$$\alpha \to \varphi$$

Геометрический смысл производной



$$tg\alpha = \frac{MK}{M_0K} = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$$

$$tg\alpha \to tg\varphi$$

$$tg\varphi = \lim_{M \to M_0} tg\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = f'(x_0)$$

$$x \to x_0 \Rightarrow \Delta x \to 0$$

$$\alpha \to \varphi$$

Геометрический смысл производной – это тангенс угла наклона касательной, проведённой к графику функции в данной точке (угловой коэффициент касательной).

Уравнение касательной

Уравнение прямой, проходящей через точку x_0

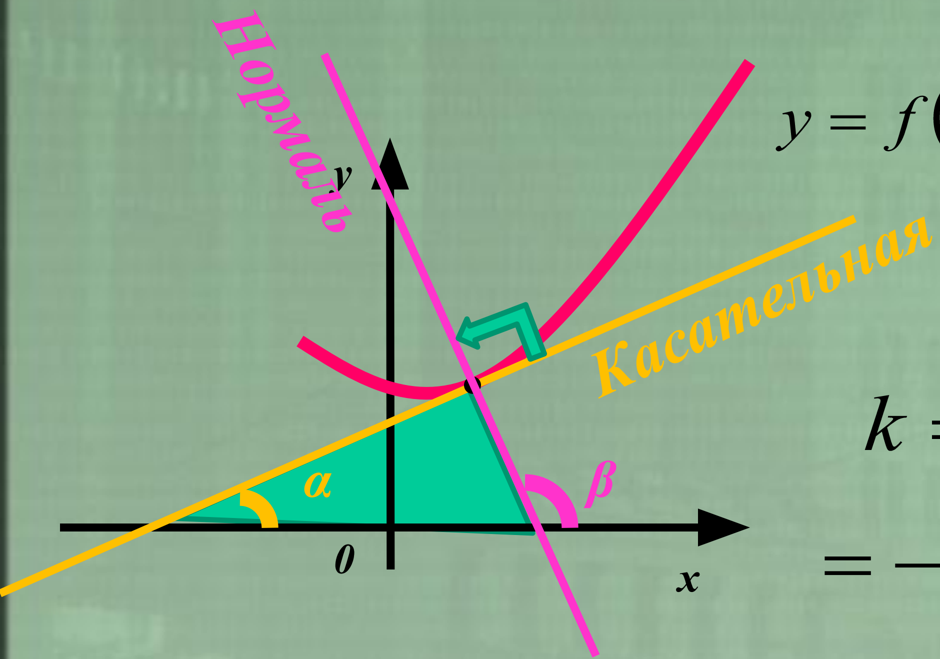
$$k = \mathrm{tg}\varphi = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \qquad k = \mathrm{tg}\varphi = f'(x_0)$$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \qquad f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

$$\boxed{f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}$$

Уравнение нормали

Нормалью к графику функции называется прямая, перпендикулярная касательной и проходящая через точку касания.



$$y = f(x)$$

$$\beta = \alpha + 90^0$$

$$k = tg\beta = tg(\alpha + 90°) = = -Ctg\alpha = -\frac{1}{tg\alpha} = -\frac{1}{f'(x_0)}$$

$$\boxed{f(x) = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)}$$

Составить уравнение касательной и нормали к графику функции $y=2x^3+x^2-x+3$ в точке $x_0=2$

$$\boxed{f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)}$$

$$\boxed{f(x)=f(x_0)-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)}$$

$$f(2)=2\cdot 2^3+2^2-2+3=21$$

$$f'(x)=6\cdot x^2+2x-1$$

$$f'(2)=6\cdot 2^2+4-1=27$$

$$f(x)=21+27(x-2)$$

$$f(x)=21-\frac{1}{27}(x-2)$$

$$f(x)=21+27x-54$$

$$\boxed{f(x)=27x-33}$$

$$\boxed{f(x)=\frac{1}{27}x+21\frac{2}{27}}$$

уравнение касательной

уравнение нормали

Правила дифференцирования

u=f(x)   *v=g(x)*

Производная суммы и разности	• $(u \pm v)' = u' \pm v'$
Производная произведения	• $(u \cdot v)' = u'v + v'u$
Постоянный множитель выносится за знак производной	• $(Cu)' = Cu'$
Производная частного	• $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$ $\left(\frac{u}{C}\right)' = \frac{u'}{C}$

Производная сложной функции

Функция является ***сложной***, если она зависит от аргумента через одну или несколько других функций.

Определите является ли функция сложной:

1) $y = \sqrt{\sin x}$ **да** $u = \sin x$ $y = \sqrt{u}$ **да**

2) $y = \cos x$ **нет**

3) $y = x^3 - 4x$ **нет** **нет**

4) $y = \log_3(x^3 + 1)$ **нет** **да** $u = x^3 + 1$ $y = \log_3 u$

5) $y = \cos\frac{1}{x}$ **да** $u = \frac{1}{x}$ $y = \cos u$ **да**

6) $y = \sqrt{\sin(x^2 + 3)}$ $u = x^2 + 3$ $g = \sin u$ $y = \sqrt{g}$

7) $y = \frac{\ln x}{3}$

8) $y = \sqrt[4]{x^3}$

9) $y = (x^4 + 3x)^3$ $u = x^4 + 3x$ $y = u^3$

Теорема

о производной сложной функции:

Если функция Z(y(x)) дифференцируема по y, а y(x) дифференцируема по x, то

$$Z'(x)=Z'_y \cdot y'_x$$

$$y=\sqrt{\sin x}$$

$$y'=\left(\sqrt{\sin x}\right)'=\left(\sqrt{u}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{u}}\cdot u'=\frac{1}{2\sqrt{\sin x}}\cdot\cos x=$$

$$\boxed{u=\sin x}$$

$$\boxed{u'=\cos x}$$

$$=\boxed{\frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}}$$

Примеры:

$$1)\ \left(e^{Sin^2 5x}\right)' = \left(e^u\right)' = e^u \cdot u' = e^{\sin^2 5x} \cdot \left(\sin^2 5x\right)' =$$

$$= 5e^{Sin^2 5x} \cdot 2 \cdot Sin5x \cdot Cos5x = \boxed{5Sin10x \cdot e^{Sin^2 5x}}$$

$$\boxed{u = Sin^2 5x}$$

$$\left(Sin^2 5x\right)' = \left(g^2\right)' = 2g \cdot g' = 2 \cdot Sin5x\left(Sin5x\right)' =$$

$$= 2 \cdot Sin5x \cdot 5 \cdot Cos5x$$

$$\boxed{g = Sin5x}$$

$$\boxed{\left(Sin5x\right)' = 5Cos5x}$$

$$2)\ \left(Ln\left(tg\sqrt{x^3 - Sinx}\right)\right)' = (Lnu)' = \frac{1}{u}\cdot u' =$$

$$= \frac{1}{tg\sqrt{x^3 - Sinx}}\cdot\left(tg\sqrt{x^3 - Sinx}\right)' =$$

$$= \frac{1}{tg\sqrt{x^3 - Sinx}}\cdot\frac{1}{Cos^2\sqrt{x^3 - Sinx}}\cdot\frac{3x^2 - Cosx}{2\sqrt{x^3 - Sinx}}$$

$$\boxed{u = tg\sqrt{x^3 - Sinx}} \qquad \boxed{b = \sqrt{x^3 - Sinx}}$$

$$\left(tg\sqrt{x^3 - Sinx}\right)' = (tgb)' = \frac{1}{Cos^2 b}\cdot b' = \frac{1}{Cos^2\sqrt{x^3 - Sinx}}\cdot\left(\sqrt{x^3 - Sinx}\right)'$$

$$\left(\sqrt{x^3 - Sinx}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x^3 - Sinx}}\cdot\left(x^3 - Sinx\right)' = \frac{3x^2 - Cosx}{2\sqrt{x^3 - Sinx}}$$

$$2)\left(Ln\left(tg\sqrt{x^3-Sinx}\right)\right)'=\left(Lnu\right)'=\frac{1}{u}\cdot u'=$$

$$=\frac{1}{tg\sqrt{x^3-Sinx}}\cdot\left(tg\sqrt{x^3-Sinx}\right)'=$$

$$=\frac{1}{tg\sqrt{x^3-Sinx}}\cdot\frac{1}{Cos^2\sqrt{x^3-Sinx}}\cdot\frac{3x^2-Cosx}{2\sqrt{x^3-Sinx}}=$$

$$=\boxed{\frac{3x^2-Cosx}{tg(\sqrt{x^3-Sinx})\cdot Cos^2(\sqrt{x^3-Sinx})\cdot 2\sqrt{x^3-Sinx}}}=$$

$$=\frac{\cancel{Cos(\sqrt{x^3-Sinx})}\cdot(3x^2-Cosx)}{Sin(\sqrt{x^3-Sinx})\cdot Cos^{\cancel{2}}(\sqrt{x^3-Sinx})\cdot 2\sqrt{x^3-Sinx}}=$$

$$=\boxed{\frac{(3x^2-Cosx)}{\sqrt{x^3-Sinx}\cdot Sin(2\sqrt{x^3-Sinx})}}$$