Кафедра медицинской и биологической физики с курсом информатики

Лекции «Физика, математика»
Раздел 1. Основы математического анализа, биомеханика, акустика

Статистический анализ выборок. Числовые характеристики ряда.

Вопросы:

1. Основные понятия математической статистики.
2. Числовые характеристики выборки.
3. Нормальное распределение. Функция Гаусса.

Доцент, к.б.н. – *Цокова Татьяна Николаевна*

Значение темы в системе знаний врача:

Работники здравоохранения поставляют основную массу данных, на которых базируется медицинская статистика. Поэтому им следует знать, как эти данные могут и должны использоваться, для того чтобы, с одной стороны, повысить уровень своей работы, а с другой - улучшить организацию медицинской помощи в своей стране.

1.Основные понятия математической статистики.

Выборочный метод –
изучение большой совокупности объектов относительно некоторого количественного признака X производится по сравнительно небольшому числу случайно отобранных объектов.

Основные понятия математической статистики.

Множество всех возможных значений (*вариант*)-x^*_i называется ***генеральной совокупностью,*** а число N – *объемом* генеральной совокупности.

Относительной частотой называется отношение частоты n_i к объему выборки n:

$p^*_i = n_i / n$.

Основные понятия математической статистики.

Выборкой $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется совокупность значений СВ X, полученной в результате n независимых экспериментов.

$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ - простой статистический ряд.

Основные понятия математической статистики.

Объемом совокупности называется количество объектов в совокупности.

Объем выборки $\boldsymbol{n}$, как правило, значительно меньше объема N генеральной совокупности: $\boldsymbol{n} << N$.

Основные понятия математической статистики.

Определение 1 **Закон статистического распределение**

X	x_1	x_2	x_3	…	x_n
P(X)	p_1	p_2	p_3	…	p_n

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_k = \sum_{i=1}^{k} p_i = 1.$$

Основные понятия математической статистики.

Определение 2.

Математическим ожиданием дискретной случайной величины X называется сумма произведений всех возможных значений случайной величины на соответствующие вероятности появления этих значений, т.е.

$$M(X)=\sum_{i=1}^{n}x_i p_i = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n\ p_n = a.$$

Математическое ожидание -

- центр распределения;
- самое ожидаемое значение ряда, т.е. вероятность его максимальная;
- среднее значение дискретной случайной величины, т.е.

$$M(X) = \overline{X}$$

Основные понятия математической статистики.

Определение 3.

Математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины X от её математического ожидания называют дисперсией случайной величины X и обозначают D(X), т.е.

$$D(X)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-a)^2 p_i=(x_1-a)^2 p_1+(x_2-a)^2 p_2+\ldots+(x_n-a)^2 p_n$$

Дисперсия-

- мера рассеивания значений случайной величины от среднего значения;
- имеет размерность квадрата случайной величины;

Основные понятия математической статистики.

Определение 4.

Среднее квадратическое отклонение случайной величины, является арифметическим корнем из дисперсии.

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

- характеристика рассеяния в единицах признака X

2. *Основные числовые характеристики выборки.*

Существуют точечные и интервальные оценки параметров.

Определение 5.

Точечной оценкой φ* параметра φ называют число, которое находят по функции результатов наблюдения

$\varphi^* = \varphi^*(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, дает приближенное значение теоретического параметра φ.

Требования к числовым оценкам ряда.

Она должна быть:

Несмещённой – если её математической ожидание равно оцениваемому параметру при любом объёме выборки.

Эффективной. Эффективность характеристика точности – отношение дисперсии наилучшей оценки и данной несмещённой оценки. Наилучшая оценка – оценка с наименьшей дисперсией.

Состоятельной, если сходится по вероятности к параметру φ, т.е. $\lim P(|\varphi^* - \varphi| < \Delta) = 1$ при $n \to \infty$. Это равенство означает, что при достаточно больших n, φ* отличается от φ на величину меньшую, чем произвольное число Δ.

Основные числовые характеристики выборки

1. **Средняя выборочная** (среднее взвешенное значение признака в выборке):

$$\overline{X}_B = \frac{\sum_{i=1}^{K} X_i n_i}{n} = \frac{1}{n} \cdot (X_1 \cdot n_1 + X_2 n_2 + \ldots + X_k n_k). \qquad (1)$$

Основные числовые характеристики выборки

1. **Дисперсия выборочная**. Характеризует разброс (рассеяние) значений вариант x_i от выборочного среднего значения $\overline{x_в}$ и измеряется в квадратных единицах признака X:

$$D_в = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{k} (x_i - \overline{x}_в)^2 \cdot n_i = \frac{1}{n}\left[(x_1 - \overline{x}_в)^2 n_1 + (x_2 - \overline{x}_в)^2 \cdot n_2 + \ldots + (x_к - \overline{x}_в)^2 n_k\right].$$

(2)

Основные числовые характеристики выборки

На практике используют ещё одну формулу для расчёта дисперсии:

$$D_{в} = \overline{x_{в}^{2}} - \left(\overline{x}_{в}\right)^{2}, \qquad (3)$$

где

$$\overline{x_{в}} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{k} x_i n_i; \qquad \overline{x_{В}^{2}} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{k} x_i^2 n_i .$$

Основные числовые характеристики выборки

1. **Среднее квадратичное отклонение выборки** – характеристика рассеяния значений признака в выборке от среднего выборочного в единицах признака *X*:

$$\sigma_{в} = \sqrt{D_{в}}\ . \qquad (4)$$

Оценки имеют следующий вид (если **n<30)**

$$\overline{x} \approx \overline{x_{в}};$$

$$D \approx \frac{n}{n-1} \cdot D_{в} = S_{в}^{2}; \qquad (5)$$

$$\sigma \approx S_{B} = \sqrt{\frac{n}{n-1} D_{B}}, \qquad (6)$$

где S_B^2 - исправленная выборочная дисперсия.

Исправленная выборочная дисперсия:

$$S^2(X) = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}$$

(7)- (9)

$$S^2(X) = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 m_i}{n-1}$$

где m_i-частота.

$$S^2(X) = \frac{n\sigma^2(x)}{n-1}$$

Основные числовые характеристики выборки

Определение 6.

Доверительным интервалом φ^* на основе точечной оценки называется интервал, который покрывает параметр φ с заданной надежностью *P*,

$$P(|(\varphi^* - \varphi| < \Delta) = p$$

Доверительный интервал для нормально распределённой случайной величины

при n<30:

$$M(X) = \overline{X} \pm \frac{t_{n,p} S}{\sqrt{n}}, \qquad (10)$$

где $t_{n-1,p}$-коэффициент Стьюдента (таблица),
р- доверительная вероятность, равная 0,95.

при n>30:

$$M(X) = \overline{X} \pm 1{,}96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \qquad (11)$$

3. Нормальное распределение. Функция Гаусса. Гистограмма

Определение 7.

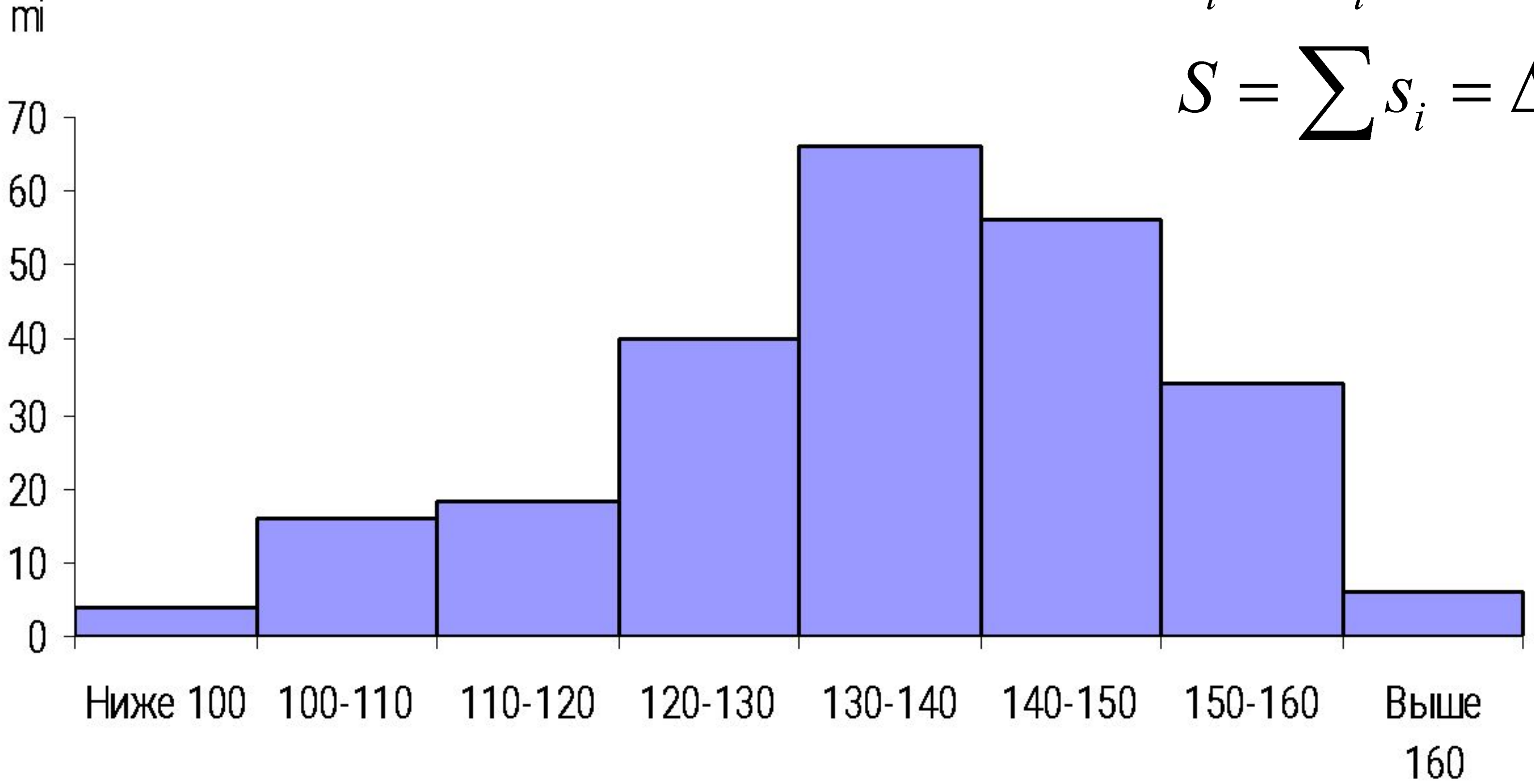
Гистограмма – графическое представление частотного распределения количественной случайной величины, сгруппированной в классы равной ширины площадями прямоугольников.

Высоты каждого прямоугольника пропорциональны частотам классов, а ширина интервала, одинаковая для всех.

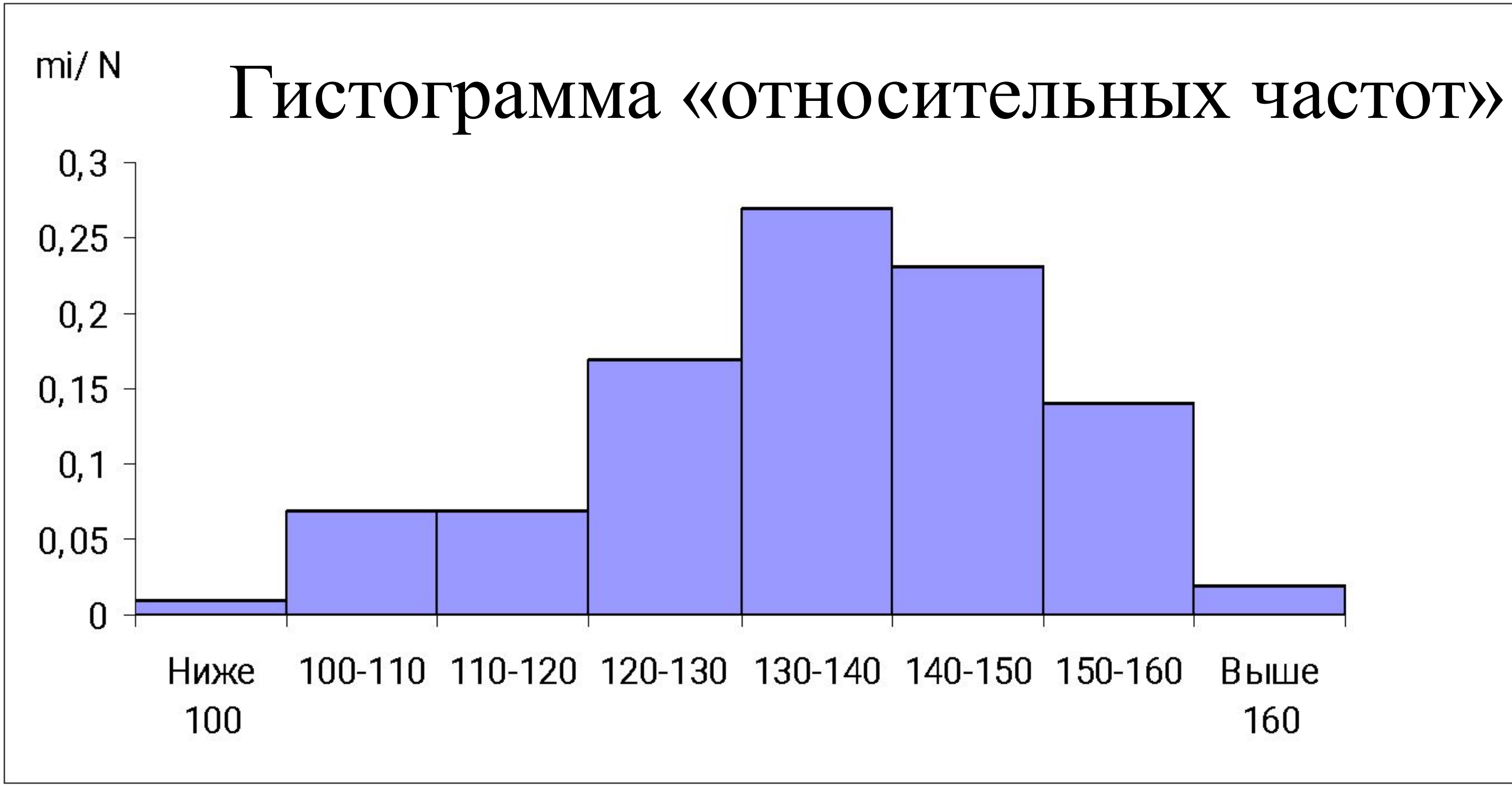
Гистограмма «частот»

$$s_i = m_i \cdot \Delta x$$

$$S = \sum s_i = \Delta x \cdot n$$



Гистограмма «относительных частот»



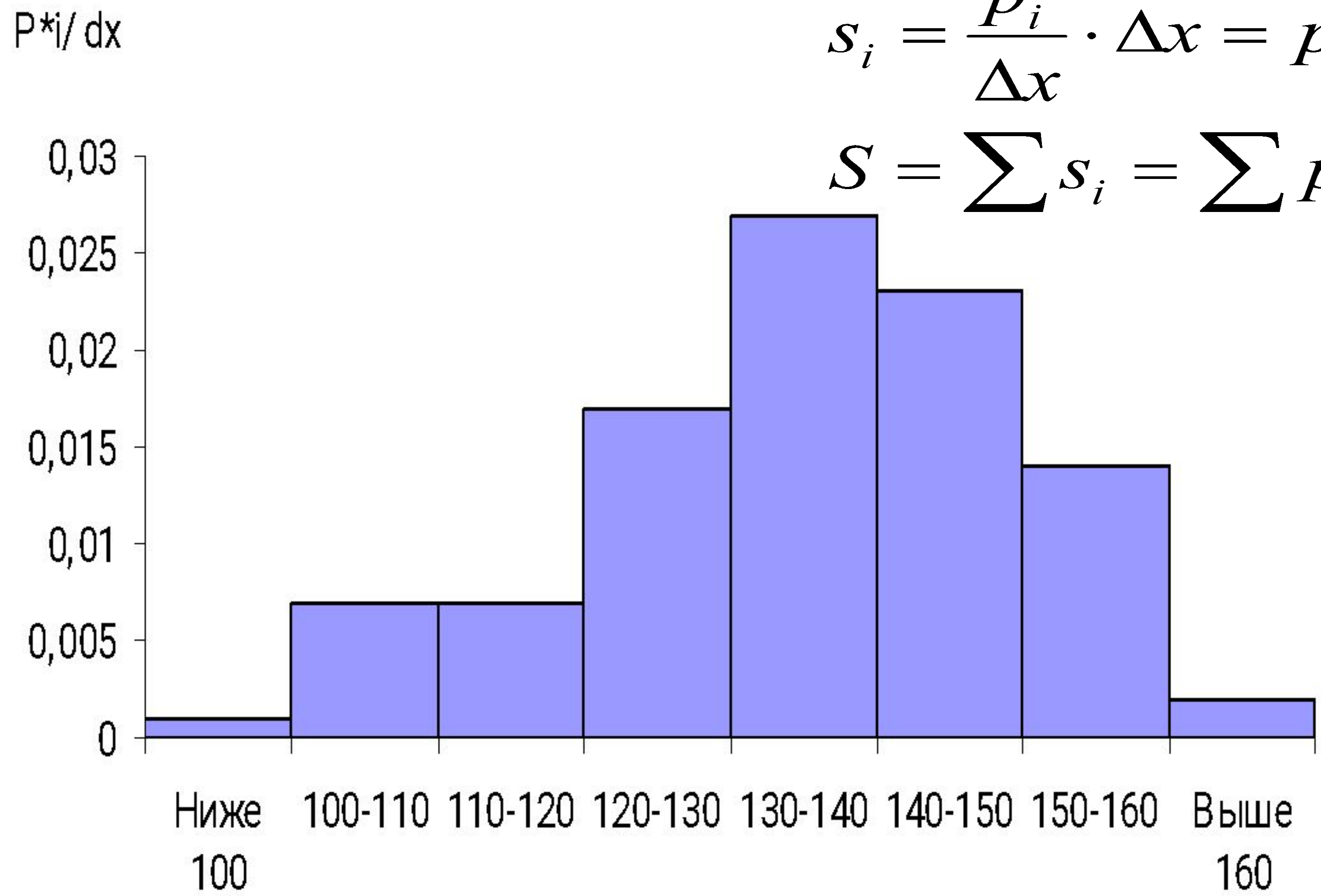
$$s_i = \frac{m_i}{n} \cdot \Delta x$$

$$S = \sum s_i = \Delta x \cdot \frac{\sum m_i}{n} = \Delta x \cdot \frac{n}{n} = \Delta \tilde{o}$$

Гистограмма «приведённых частот»

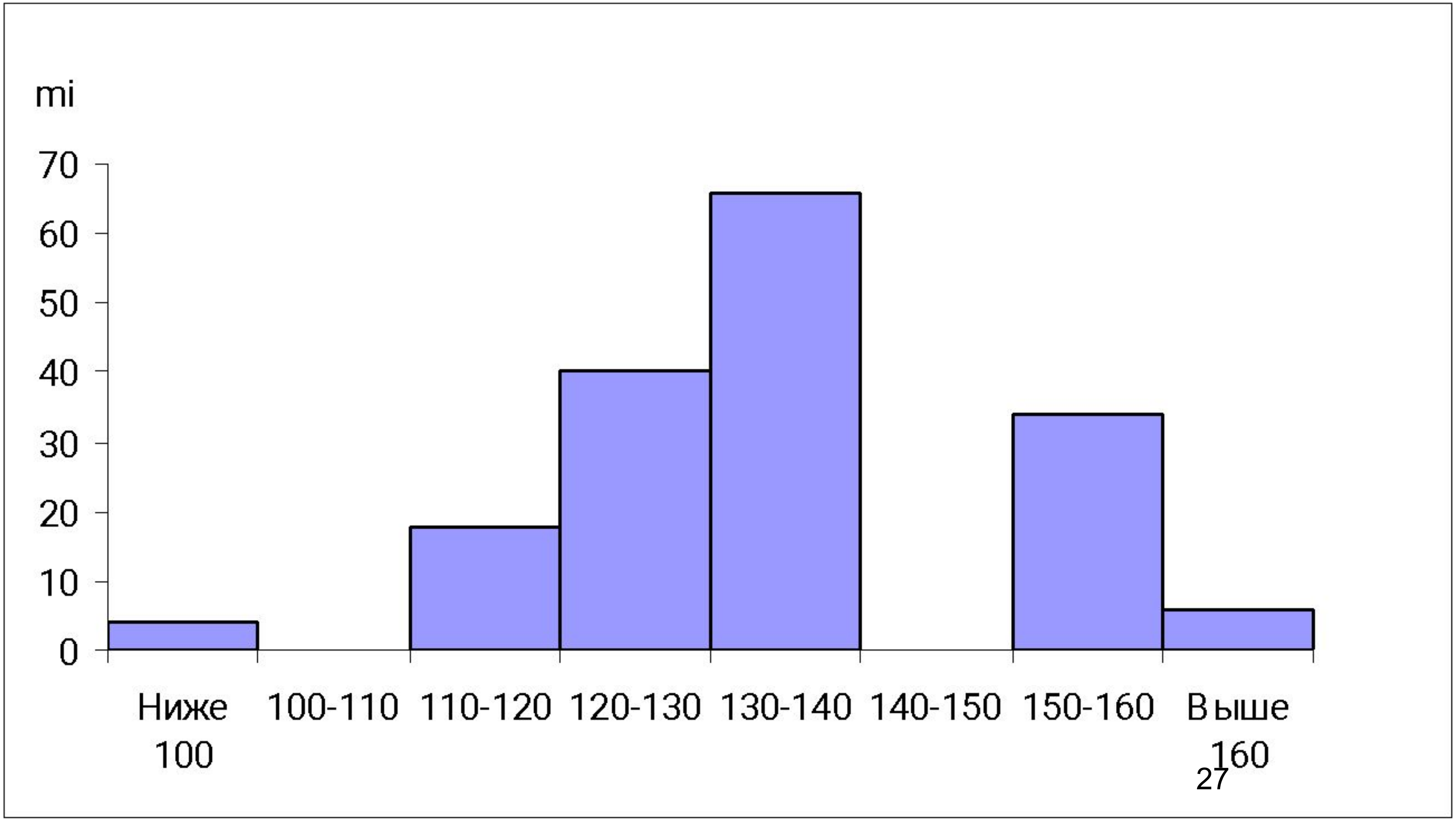
$$s_i = \frac{p_i^*}{\Delta x} \cdot \Delta x = p_i^*$$

$$S = \sum s_i = \sum p_i = 1$$



Замечание. Вид гистограммы зависит от Δx, т.е. от числа интервалов m. Если m велико, гистограмма имеет «гребенчатый» вид.

Если m – мало, потеря особенностей, т.е. имеем равномерное распределение.



Согласно центральной предельной теореме закон распределения суммы большого числа независимых СВ, влияние каждого из которых на всю сумму ничтожно мало, близок к нормальному.

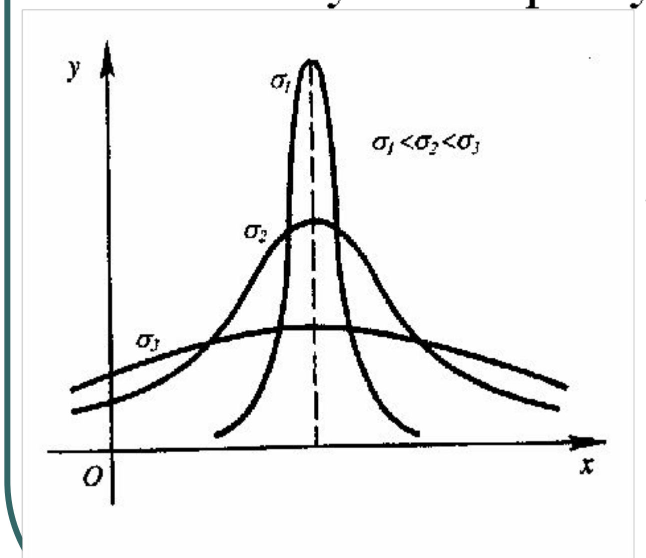
А.М.Ляпунов (1857 – 1918)

Нормальное распределение (распределение Гаусса).

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\cdot\sigma^2}}$$ **функция *Гаусса*.**

Это симметричная, быстро затухающая функция.

Имеет куполообразную форму с вершиной при $x = \bar{x}$,



где $\bar{x}$ – определяет точку максимума и ось симметрии, σ - расстояние от этой оси до точки перегиба (**M(X) =** $\bar{x}$ **, D(X) = σ).**

функция *Гаусса.*

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2 \cdot \sigma^2}}$$

Свойства нормального распределения:

а) Наиболее вероятны значения x, близкие к ожидаемому среднему значению

б) Отклонения от среднего значения в обе стороны равновероятны.

в) Большие отклонения x от среднего значения маловероятны.

Свойства нормального распределения

г) При уменьшении σ увеличивается вероятность значений, близких к , рассеяние уменьшается, кривая сжимается.

д) При увеличении σ график кривой Гаусса становится более расплывчатым, что говорит об увеличении рассеяния.

В случае $\bar{x} = 0$, $\sigma = 1$ функция Гаусса называется *плотностью нормированного и центрированного распределения (локальная функция Лапласа)*

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

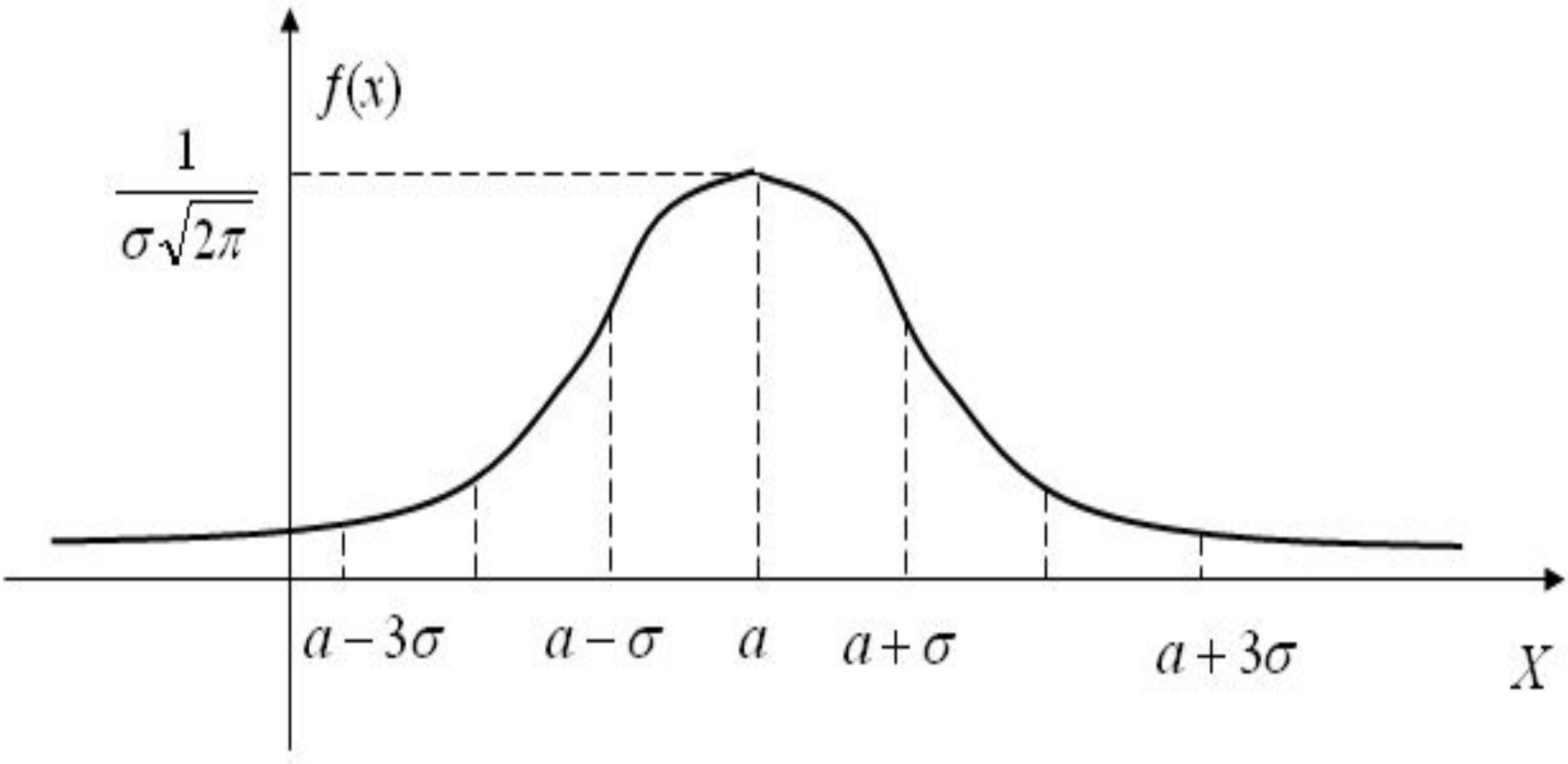
и вычисляется с помощью таблиц.

Правило «трех сигм».

$$P(|X - \overline{X}| < 3\sigma) \approx 0{,}9973 \ (99{,}7\%).$$

почти достоверно (на 99,7%), значения нормально распределенной случайной величины отличаются от своего среднего значения $\bar{x}$ менее, чем на 3σ, то есть практически все значения нормально распределенной случайной величины X попадают в интервал:

$$(\bar{x} - 3\sigma; \ \bar{x} + 3\sigma).$$


$f(x)$
$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$
$a-3\sigma$
$a-\sigma$
a
$a+\sigma$
$a+3\sigma$
X

Если случайная величина X_{meas} распределена по **нормальному закону,** то, обычно, за абсолютную погрешность принимают её **среднеквадратичное отклонение.**

Абсолютная погрешность измеряется в тех же единицах измерения, что и сама величина.

Литература:

- Морозов, Ю.В.
Основы высшей математики и статистики: учебник / Ю.В. Морозов. – М.: Медицина, 2001