

Интегрирование некоторых функций

Лекция 2.

I. Интегрирование дробно-рациональных функций

Опр. Дробной рациональной функцией называют частное от деления двух многочленов.

При этом можно считать, что степень многочлена, стоящего в числителе, ниже степени многочлена в знаменателе (в противном случае, можно выделить целую часть, разделив "углом" числитель на знаменатель).

Пример. $\frac{x^3 - 3x + 4}{x - 2} = x^2 + 2x + 1 + \frac{6}{x - 2}$. Тогда

интеграл от исходной дроби сведется к сумме интегралов от многочлена и правильной дроби.

Как известно из теории многочленов, каждый многочлен может быть представлен в виде произведения многочленов (разложен на множители) первой и/или второй степени в зависимости от того, действительные или комплексные у него корни, причем кратным корням отвечают одинаковые множители. В соответствии с этим, рациональная дробь представляется в виде суммы некоторого количества выражений следующих видов:

•

$$\frac{A}{(x-c)^m}, \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^s}$$

где $A, B, C \in \mathbb{R}$, $m, s \in \mathbb{N}$, где $x^2 + px + q$ - трехчлен с действительными коэффициентами не имеет действительных корней ($D < 0$).

Интегрирование рациональных дробей с помощью разложения на простейшие дроби. **Метод неопределённых**

коэффициентов.

Пример. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{x^5 - x^2}$.

Решение. Общее правило интегрирования дробей.

1) Разложим знаменатель на линейные и квадратичные множители: $x^5 - x^2 = x^2(x^3 - 1) = x^2(x-1)(x^2 + x + 1)$.

2) Разложим правильную рациональную дробь на простейшие дроби: $\frac{1}{x^5 - x^2} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x-1} + \frac{Dx+E}{x^2+x+1}$.

3) Приведем правую часть к общему знаменателю и освободимся от знаменателя:

$$1 \equiv A(x^3 - 1) + B(x^4 - x) + C(x^4 + x^3 + x^2) + Dx^4 - Dx^3 + Ex^3 - Ex^2.$$

$$1 \equiv (B + C + D)x^4 + (A + C - D + E)x^3 + (C - E)x^2 - A.$$

Пример

4) Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях полученного тождества и решим систему линейных уравнений относительно искомым коэффициентов:

$$\begin{array}{l|l} x^4 & B + C + D = 0, \\ x^3 & A + C - D + E = 0, \\ x^2 & C - E = 0, \\ x^0 & -A = 1. \end{array}$$

Отсюда получим: $A = -1$, $B = 0$, $C = \frac{1}{3}$, $D = -\frac{1}{3}$, $E = \frac{1}{3}$.

Тогда получим: $\frac{1}{x^5 - x^2} = \frac{-1}{x^2} + \frac{1}{3(x-1)} + \frac{-\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}}{x^2 + x + 1}$.

Пример

$$\begin{aligned} 5) \int \frac{dx}{x^5 - x^2} &= - \int \frac{dx}{x^2} + \int \frac{dx}{3(x-1)} + \int \frac{-\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}}{x^2 + x + 1} dx = \\ &= \frac{1}{x} + \frac{1}{3} \ln |x - 1| - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \int \frac{(2x+1)^{-3}}{x^2 + x + 1} dx = \\ &= \frac{1}{x} + \frac{1}{3} \ln |x - 1| - \frac{1}{6} \int \frac{(2x+1)}{x^2 + x + 1} dx + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2 + x + 1} = \\ &= \frac{1}{x} + \frac{1}{3} \ln |x - 1| - \frac{1}{6} \ln |x^2 + x + 1| + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{(x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} = \\ &= \frac{1}{x} + \frac{1}{3} \ln |x - 1| - \frac{1}{6} \ln |x^2 + x + 1| + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \operatorname{arctg} \frac{x + \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + C \\ &= \\ &= \frac{1}{x} + \frac{1}{3} \ln |x - 1| - \frac{1}{6} \ln |x^2 + x + 1| + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C. \end{aligned}$$

Интегралы от простейших дробей:

1 тип: $\int \frac{A dx}{x-a} = A \cdot \ln |x - a| + C$

(подстановка $t = x - a$).

2 тип: $\int \frac{A dx}{(x-a)^m} = A \cdot \frac{(x-a)^{-m+1}}{-m+1} + C$

(применяется та же подстановка).

3 тип: Следующий интеграл находится путем такого преобразования:

$$\begin{aligned} \int \frac{Ax + B}{px^2 + qx + r} dx &= \frac{A}{2p} \int \frac{(2px + q) + \left(2p \frac{B}{A} - q\right)}{px^2 + qx + r} dx = \\ &= \frac{A}{2p} \int \frac{(2px + q)}{px^2 + qx + r} dx + \left(B - \frac{Aq}{2p}\right) \int \frac{dx}{px^2 + qx + r} = \\ &= \ln |px^2 + qx + r| + \left(B - \frac{Aq}{2p}\right) \int \frac{dx}{px^2 + qx + r} \end{aligned}$$

Интегрирование дробно-рациональных функций

Произвольную постоянную здесь можно опускать, пока в правой части равенства есть хоть один интеграл. Первый из интегралов найден с помощью подстановки:

$$t = px^2 + qx + r$$

Оставшийся интеграл путем несложных преобразований (выделение полного квадрата) легко привести к виду:

$$k \int \frac{dx}{(x - \alpha)^2 + \beta^2},$$

который приводится к табличному с помощью

подстановки $t = \frac{x - \alpha}{\beta}$, что дает в результате $\frac{1}{\beta} \operatorname{arctg} \frac{x - \alpha}{\beta}$

Пример

Вычислить интеграл $\int \frac{3x+1}{x^2+2x+10} dx$.

Решение. Это интеграл 3-го типа, причем $D < 0$.

$$\begin{aligned} \text{Получим } \int \frac{3x+1}{(x+1)^2+9} dx &= \left[\begin{array}{l} x+1 = t, \\ dx = dt \\ x = t-1, \end{array} \right] = \\ &= \int \frac{3x+1}{(x+1)^2+9} dx = \int \frac{3(t-1)+1}{t^2+9} dt = \int \frac{3t-2}{t^2+9} dt = \\ &= \int \frac{3t}{t^2+9} dt - \int \frac{2}{t^2+9} dt = \frac{3}{2} \int \frac{2t}{t^2+9} dt - 2 \int \frac{dt}{t^2+9} = \\ &= \frac{3}{2} \ln |t^2+9| - \frac{2}{3} \operatorname{arctg} \frac{t}{3} + C = \\ &= \frac{3}{2} \ln |x^2+2x+10| - \frac{2}{3} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{3} + C. \end{aligned}$$

Интегрирование дробно-рациональных функций

4 тип: $\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k} dx$, где $k \geq 2, q - \frac{p^2}{4} > 0$.

Представим этот интеграл с помощью подстановки $x + \frac{p}{2} = t$ в виде суммы двух интегралов, один из которых легко берется:

$$A \int \frac{t}{(t^2+a^2)^k} dt + \left(B - \frac{Ap}{2}\right) \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^k} = I_1 + I_k,$$

где $a^2 = q - \frac{p^2}{4}$. Первый интеграл I_1 находится легко. Если второй интеграл I_k проинтегрируем по частям, то получим рекуррентную формулу для вычисления интеграла для любого натурального числа $k > 1$:

$$I_k = \frac{1}{a^2} \left(\frac{2k-3}{2k-2} \cdot I_{k-1} + \frac{t}{2(k-1)((t^2+a^2)^{k-1})} \right).$$

Пример

Вычислить интеграл $I_3 = \int \frac{dt}{(t^2+1)^3}$.

Решение. Здесь $a = 1$, $k = 3$.

Так как $I_1 = \int \frac{dt}{t^2+1} = \operatorname{arctg} t + C$, то

$$\begin{aligned} I_2 &= \int \frac{dt}{(t^2+1)^2} = \frac{1}{1^2} \left(\frac{2 \cdot 2 - 3}{2 \cdot 2 - 2} \cdot I_{2-1} + \frac{t}{2(2-1)((t^2+1^2)^{2-1})} \right) = \\ &= \frac{1}{2} I_1 + \frac{t}{2(t^2+1^2)^1} + C = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} t + \frac{t}{2(t^2+1)} + C; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_3 &= \int \frac{dt}{(t^2+1)^3} = \frac{1}{1^2} \left(\frac{2 \cdot 3 - 3}{2 \cdot 3 - 2} \cdot I_{3-1} + \frac{t}{2(3-1)((t^2+1^2)^{3-1})} \right) = \\ &= \frac{3}{4} I_2 + \frac{t}{4(t^2+1^2)^2} + C = \frac{3}{4} \left(\frac{1}{2} \operatorname{arctg} t + \frac{t}{2(t^2+1)} \right) + \frac{t}{4(t^2+1^2)^2} + \\ &+ C_1; \end{aligned}$$

II. Интегрирование рациональных выражений тригонометрических функций

- Вычисление неопределённых интегралов типа $\int R(\sin x, \cos x) dx$ сводится к вычислению интегралов от рациональной функции подстановкой

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t,$$

которая называется **универсальной тригонометрической подстановкой.**

$$t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}, \Rightarrow x = 2 \operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Интегрирование тригонометрических функций

Для преобразования рациональных выражений от $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$ в алгебраические рациональные функции переменной t применяются следующие тригонометрические формулы:

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1 + t^2}$$

$$\cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{2\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1 - t^2}$$

$$\operatorname{ctg} x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{2\operatorname{tg} \frac{x}{2}} = \frac{1 - t^2}{2t}$$

Интегрирование тригонометрических функций. Четность функций.

Тогда $\int R(\sin x, \cos x) dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) dt =$
 $= \int R_1(t) dt$, где $R_1(t)$ – рациональная функция от t .

Замечание. Обычно этот способ очень громоздкий, но он всегда приводит к результату. На практике применяют другие, более простые подстановки, в зависимости от свойств и вида подынтегральной функции. В частности, удобны правила:

- 1) Если функция $R(\sin x, \cos x)$ **нечетна** относительно **$\sin x$** , т.е. $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то подстановка **$\cos x = t$** ;
- 2) Если функция $R(\sin x, \cos x)$ **нечетна** относительно **$\cos x$** , т.е. $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то подстановка **$\sin x = t$** ;

3) Если функция $R(\sin x, \cos x)$ **четна** относительно $\sin x$ и $\cos x$, т.е. $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, то подстановка **$\operatorname{tg} x = t$** ;

4) Для интеграла $\int R(\operatorname{tg} x) dx$ также применяется подстановка **$\operatorname{tg} x = t$** .

Тогда **$\operatorname{tg} x = t \Rightarrow x = \operatorname{arctg} t$** , **$dx = \frac{dt}{1+t^2}$** .

В этом случае применяют тригонометрические формулы:

$$\sin x = \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1+(\operatorname{tg} x)^2}} = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \quad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+(\operatorname{tg} x)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$$

Пример 1.

Вычислить интеграл

$$\int \frac{dx}{1 + \sin x} .$$

Решение.

Используем универсальную тригонометрическую подстановку:

$$t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}, \Rightarrow x = 2 \operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Так как $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, то

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{1 + \sin x} &= \int \frac{\frac{2 dt}{1+t^2}}{1 + \frac{2t}{1+t^2}} = \int \frac{2 dt}{1+t^2+2t} = 2 \int \frac{dt}{(t+1)^2} = -\frac{2}{t+1} + C = \\ &= -\frac{2}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1} + C. \end{aligned}$$

Пример 2.

Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{1+3\cos^2 x}$.

Решение.

$$\int \frac{dx}{1+3\cos^2 x} = \left[\begin{array}{l} \operatorname{tg} x = t, \quad x = \operatorname{arctg} t, \\ dx = \frac{dt}{1+t^2}, \quad \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2} \end{array} \right] = \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{1+\frac{3}{1+t^2}} =$$
$$= \int \frac{dt}{4+t^2} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{t}{2} + C = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} x}{2} + C.$$

Интегралы вида $\int \sin^m x \cos^n x dx$

- 1) Если n – целое положительное нечетное число, то подстановка $\sin x = t$;
- 2) Если m – целое положительное нечетное число, то подстановка $\cos x = t$;
- 3) Если m и n – целые неотрицательные четные числа, то применяют формулы понижения степени: $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$, $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$;
- 4) Если $m + n$ – целое отрицательное четное число, то подстановка $\operatorname{tg} x = t$.

Пример 3.

Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{\cos x \sin^3 x}$.

Решение.

$$\int \frac{dx}{\cos x \sin^3 x} = \int \cos^{-1} x \sin^{-3} x dx =$$

$$= \left[\begin{array}{l} m + n = -4, \quad \sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \quad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \\ \operatorname{tg} x = t, \quad x = \operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{dt}{1+t^2} \end{array} \right] =$$

$$= \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \cdot (\sqrt{1+t^2})^3} = \int \frac{1+t^2}{t^3} dt = \int \frac{1}{t^3} dt + \int \frac{1}{t} dt = -\frac{1}{2t^2} + \ln |t| + C =$$

$$= -\frac{1}{2 \operatorname{tg}^2 x} + \ln | \operatorname{tg} x | + C.$$

Интегралы вида $\int \operatorname{tg}^m x \, dx$ и $\int \operatorname{ctg}^m x \, dx$,

где m – целое положительное число. Применяются формулы

$$\operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1, \quad \operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} - 1,$$

с помощью которых последовательно понижается степень $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$.

Пример. $\int \operatorname{tg}^3 x \, dx = \int \operatorname{tg}^2 x \cdot \operatorname{tg} x \, dx =$
 $= \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) \cdot \operatorname{tg} x \, dx =$

$$= \int \left(\frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x} - \operatorname{tg} x \right) dx = \int \frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x} dx - \int \operatorname{tg} x \, dx =$$

$$= \int \operatorname{tg} x \, d(\operatorname{tg} x) - \int \operatorname{tg} x \, dx = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + \ln |\cos x| + C.$$

**Интегралы вида $\int \sin mx \cos nx dx$,
 $\int \cos mx \cos nx dx$, $\int \sin mx \sin nx dx$.**

Применим известные тригонометрические формулы:

$$\sin \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} (\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)),$$

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)),$$

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)).$$

Пример.

$$\int \sin 2x \cos 5x dx = \int \frac{1}{2} (\sin 7x + \cos(-3x)) dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int \sin 7x dx + \frac{1}{2} \int \cos(-3x) dx =$$

$$= -\frac{1}{14} \cos 7x + \frac{1}{6} \cos 3x + C.$$

Интегрирование иррациональных функций

I. Пусть $\int R(x; x^{\frac{m}{n}}, \dots, x^{\frac{r}{s}}) dx$ – рациональная функция своих аргументов; m, n, \dots, r, s – целые числа.

Пусть k – общий знаменатель дробей $\frac{m}{n}, \dots, \frac{r}{s}$. Тогда подстановка $x = t^k, dx = k \cdot t^{k-1} dt$ преобразует данный интеграл в интеграл от рациональной функции.

II. Пусть $\int R(x; (\frac{ax+b}{cx+d})^{\frac{m}{n}}, \dots, (\frac{ax+b}{cx+d})^{\frac{r}{s}}) dx$, тогда

подстановка $\frac{ax+b}{cx+d} = t^k$, где k – общий знаменатель дробей $\frac{m}{n}, \dots, \frac{r}{s}$.

Пример

Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{(2x+1)^{\frac{2}{3}} - (2x+1)^{\frac{1}{2}}}$.

Решение.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(2x+1)^{\frac{2}{3}} - (2x+1)^{\frac{1}{2}}} &= \left[\begin{array}{l} 2x + 1 = t^6, \\ 2 dx = 6t^5 dt \\ dx = 3t^5 dt \end{array} \right] = \int \frac{3t^5 dt}{t^4 - t^3} = \\ &= 3 \int \frac{t^2 dt}{t-1} = 3 \int \frac{(t^2-1)+1}{t-1} dt = 3 \int \left(t + 1 + \frac{1}{t-1} \right) dt = \\ &= 3 \frac{t^2}{2} + 3t + 3 \ln |t - 1| + C = \frac{3}{2} (2x + 1)^{\frac{1}{3}} + \\ &+ 3(2x + 1)^{\frac{1}{6}} + 3 \ln | (2x + 1)^{\frac{1}{6}} - 1 | + C. \end{aligned}$$

Интегрирование некоторых видов иррациональностей

Тригонометрические подстановки применяются, если:

1. $\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2}) dx$, подстановка $x = a \sin t$.

2. $\int R(x, \sqrt{a^2 + x^2}) dx$, подстановка $x = a \operatorname{tg} t$.

3. $\int R(x, \sqrt{x^2 - a^2}) dx$, подстановка $x = a \operatorname{sec} t = \frac{a}{\cos t}$

или $x = a \operatorname{cosec} t = \frac{a}{\sin t}$.

Интегрирование некоторых видов иррациональностей

- **Формулы:**

$$1. \int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2} \left(x \sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin \frac{x}{a} \right) + C.$$

$$2. \int \sqrt{x^2 + A} dx = \frac{1}{2} \left(x \sqrt{x^2 + A} + A \ln \left| x + \sqrt{x^2 + A} \right| \right) + C.$$

($A \neq 0$).

Пример

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2} dx &= \left[\begin{array}{l} x = 2 \sin t, \frac{x}{2} = \sin t \\ dx = 2 \cos t dt \end{array} \right] = \\ &= \int \frac{\sqrt{4-4\sin^2 t}}{4\sin^2 t} 2 \cos t dt = \int \frac{\sqrt{1-\sin^2 t}}{\sin^2 t} \cos t dt = \\ &= \int \operatorname{ctg}^2 t dt = \int \frac{dt}{\sin^2 t} - \int dt = -\operatorname{ctgt} - t + C = \\ &= \left[\operatorname{ctgt} = \frac{\sqrt{1-\sin^2 t}}{\sin t} = \frac{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}}{\frac{x}{2}} = \frac{\sqrt{4-x^2}}{x} \right] = \\ &= -\frac{\sqrt{4-x^2}}{x} - \operatorname{arcsin} \frac{x}{2} + C. \end{aligned}$$