

Ряды

Лекция 9

1. Определение числового ряда.

Сходимость

- В математических приложениях, а также при решении некоторых задач в экономике, статистике и других областях рассматриваются суммы с бесконечным числом слагаемых. Что понимается под такими суммами?

Пусть задана бесконечная числовая последовательность $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$

Опр. **Числовым рядом** или просто **рядом** называется выражение (сумма) вида $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (1).

Числа $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ называются **членами ряда**, а

a_n – **общим** или **n – м членом ряда**.

Чтобы задать ряд (1), достаточно задать функцию натурального аргумента $a_n = f(n)$ вычисления n -го члена ряда по его номеру n ($n \in N$).

Пример 1. Пусть $a_n = \frac{1}{n}$. Ряд $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ называется **гармоническим**.

Пример 2. Пусть $a_n = \frac{1}{n^a}$, $a > 0$. Ряд $1 + \frac{1}{2^a} + \frac{1}{3^a} + \dots + \frac{1}{n^a} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$ называется **обобщённым гармоническим рядом**.

В частном случае при $a = 1$ получается гармонический ряд.

Пример 3. $a_n = a_1 + d(n - 1)$ – общий член арифметической прогрессии.

Пример 4. Пусть $b_n = b_1 q^{n-1}$.

Ряд $b_1 + b_1 q + b_1 q^2 + \dots + b_1 q^{n-1} + \dots$ называется **рядом геометрической прогрессии**.

Из членов ряда (1) образуем числовую последовательность частичных сумм

$S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$, где $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ – сумма первых n членов ряда, которая называется **n -й частичной суммой**, т. е. $S_1 = a_1$, $S_2 = a_1 + a_2 = S_1 + a_2$, $S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = S_2 + a_3$,

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = S_{n-1} + a_n, \dots (5)$$

Числовая последовательность $S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$ при неограниченном возрастании номера n может:

- 1) иметь конечный предел;
- 2) не иметь конечного предела (предел не существует или равен бесконечности).

Опр. Ряд (1) называется **сходящимся**, если последовательность его частичных сумм (5) имеет конечный предел, т. е. $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$.

В этом случае число **S** называется **суммой ряда** (1) и пишется $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = S$

а число **$R_n = S - S_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \dots$** называют **остатком ряда**.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0.$$

Опр. Ряд (1) называется **расходящимся**, если последовательность его частичных сумм не имеет конечного предела.

•

Расходящемуся ряду не приписывают никакой суммы.

Таким образом, задача нахождения суммы сходящегося ряда (1) равносильна вычислению предела последовательности его частичных сумм.

Примеры

1. Ряд $0 + 0 + \dots + 0 + \dots$ сходится, его сумма равна нулю ($S_n = 0$).

2. Ряд $1 + 1 + 1 + \dots + 1 + \dots$ расходится, $S_n = n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$,

то есть $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$.

3. Ряд $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots + 1 + \dots$ расходится, так как последовательность его частичных сумм

($S_1 = 1, S_2 = 0, S_3 = 1, \dots$) не имеет предела,

то есть $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ не существует.

Пример

Доказать, что ряд $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ сходится и найти его сумму.

Решение. Найдем n -ю частичную сумму данного ряда S_n .

Общий член ряда $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$ представим в виде: $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$.

$$\text{Тогда } S_1 = \frac{1}{1 \cdot 2} = 1 - \frac{1}{2}, S_2 = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = 1 - \frac{1}{3}, \dots,$$

$$S_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Получим $S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$. Отсюда имеем: $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$.

Пример.

Пусть $b_n = b_1 q^{n-1}$ - общий член ряда геометрической прогрессии, где $b_1 \neq 0$, $q = \frac{b_2}{b_1}$ - знаменатель прогрессии.

Найдем сумму первых n членов ряда: $S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$,

$q \neq 1$.

Запишем формулу в виде: $S_n = \frac{b_1}{1-q} - \frac{b_1 \cdot q^n}{1-q}$, тогда, если:

1) $|q| < 1$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{b_1}{1-q}$, т.е. ряд сходится и его сумма $S = \frac{b_1}{1-q}$.

2) $|q| > 1$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} |q^n| = \infty$ и $S_n \rightarrow \pm\infty$ при $n \rightarrow \infty$, т.е. сумма ряда не существует и ряд расходится.

3) $q = 1$, то ряд имеет вид $b_1 + b_1 + b_1 + \dots$,

тогда $S_n = n \cdot b_1$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot b_1 = \infty$. Значит, ряд расход.

4) $q = -1$, то ряд имеет вид

$b_1 - b_1 + b_1 - b_1 + \dots$, тогда

$$S_n = \begin{cases} 0, & \text{если } n - \text{четное число,} \\ b_1, & \text{если } n - \text{нечетное число.} \end{cases}$$

Значит, S_n предела не имеет и **ряд расходится**.

Пример. Определить сумму ряда

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots + \frac{1}{3^{n-1}} + \dots$$

Решение. Имеем геометрическую прогрессию,

где $b_1 = 1$, $q = \frac{1}{3} < 1$. Поэтому $S = \frac{b_1}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2} \Rightarrow$

Ряд сходится.

2. Свойства сходящихся числовых рядов

1. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$ сходится и его сумма равна S , то и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n = c \cdot a_1 + c \cdot a_2 + c \cdot a_3 + \dots$, где $c = \text{const}$, также сходится и его сумма равна $c \cdot S$.

Но если этот ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится и $c \neq 0$, то и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n$ также расходится.

2. Если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, то сходятся и ряды $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$, причем сумма каждого равна соответственно $S_1 \pm S_2$.

Замечание. Но сумма (разность) двух расходящихся рядов может быть как сходящимся, так и расходящимся рядом.

3. Если к ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ прибавить (или отбросить) конечное число членов, то полученный ряд и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходятся или расходятся одновременно.

Замечание. Из данного свойства следует, что если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то его остаток

$$R_n \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty, \text{ т.е. } \lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0.$$

Необходимый признак сходимости числового ряда

Теорема. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то его общий член a_n стремится к нулю, т.е. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

(Обратная теорема неверна, т.е., если $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, то ряд необязательно сходится. Пример: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$).

Доказательство:

Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится и $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$.

Тогда и $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = S$ (при $n \rightarrow \infty$ и $(n-1) \rightarrow \infty$).

Учитывая, что $a_n = S_n - S_{n-1}$ при $n > 1$, получаем:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n - \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} \\ &= S - S = 0. \end{aligned}$$

Следствие.

(Достаточное условие расходимости ряда).

Если $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ или этот предел не существует, то ряд расходится.

Доказательство:

Действительно, если бы ряд сходился, то по теореме $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Но это противоречит условию. Значит, ряд расходится.

Пример 1. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-2}{n+5}$.

Решение.

Ряд расходится, т.к. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n-2}{n+5} = 3 \neq 0$.

Пример 2. Исследовать сходимость ряда

$$\left(1 + \frac{1}{1}\right)^1 + \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 + \dots + \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n + \dots$$

Решение. Ряд расходится,

$$\text{т.к. } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \neq 0.$$

3. Достаточные признаки сходимости знакопостоянных рядов (знакоположительных рядов).

Замечание. Знакоотрицательный ряд умножается на (-1) , что не влияет на сходимость ряда.

Признаки сравнения.

Теорема. I признак сравнения. Если $0 \leq a_n \leq b_n$, начиная с некоторого номера $n = n_0$, и ряд

$$b_1 + b_2 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad (2)$$

сходится, то сходится и ряд (1): $a_1 + a_2 + a_3 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
Если же ряд (1) расходится, то расходится и ряд (2).

Замечание. В качестве рядов для сравнения можно взять геометрическую прогрессию $\sum_{n=1}^{\infty} b_1 q^{n-1}$, которая сходится при $|q| < 1$ и расходится при $|q| \geq 1$, и гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, который расходится.

Пример.

Исследовать сходимость ряда

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 2^2} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \dots + \frac{1}{n \cdot 2^n} + \dots$$

Решение. $a_n = \frac{1}{n \cdot 2^n}$. Сравним его с рядом геометрической прогрессии $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$, который сходится, т.к. $q = \frac{1}{2} < 1$.

Обозначим общий член $b_n = \frac{1}{2^n}$.

Так как $\frac{1}{n \cdot 2^n} < \frac{1}{2^n}$, то по I признаку сравнения **сходится и искомый ряд.**

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ расх. т.к. $\frac{1}{\sqrt{n+1}} > \frac{1}{n}$ при $n > 2$.

Теорема. II признак сравнения (предельный признак сравнения). Если существует конечный и отличный от нуля предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = k$ (в частности, $a_n \sim b_n$), то ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся или расходятся одновременно ($a_n \geq 0, b_n \geq 0$).

Пример. Ряд $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{2n-1} + \dots$

расходится, так как по II признаку сравнения

получим $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2n-1} : \frac{1}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n-1} = \frac{1}{2} \neq 0$,

а гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, как известно,

расходится.

Признак Даламбера

Теорема. Пусть $a_n > 0$, начиная с некоторого номера $n = n_0$, и существует предел

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = d$. Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится при $d < 1$ и расходится при $d > 1$. Если $d = 1$, то вопрос открыт.

Пример. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot n!}{n^n}$$

Решение.

Выпишем $a_n = \frac{3^n \cdot n!}{n^n}$ и $a_{n+1} = \frac{3^{n+1} \cdot (n+1)!}{(n+1)^{n+1}}$.

$$\begin{aligned} \text{Найдем } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3^{n+1} \cdot (n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{3^n \cdot n!}{n^n}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1} \cdot (n+1)! \cdot n^n}{(n+1)^{n+1} \cdot 3^n \cdot n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n \cdot 3 \cdot (n+1) \cdot n! \cdot n^n}{(n+1)^n (n+1) \cdot 3^n \cdot n!} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^n}{(n+1)^n} = 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} = 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \\ &= 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n} = 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} = 3 \cdot e^{-1} = \frac{3}{e} > 1, \end{aligned}$$

следовательно, ряд расходится по признаку Даламбера.

Радикальный признак Коши

Теорема. Пусть $a_n > 0$, начиная с некоторого номера $n = n_0$, и существует $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = d$. Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится при $d < 1$ и расходится при $d > 1$. Если $d = 1$, то вопрос открыт.

Пример. Исследовать сходимость ряда

$$\frac{2}{1} + \left(\frac{3}{3}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^3 \dots + \left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^n + \dots$$

Решение. Выпишем $a_n = \left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^n$.

Найдем $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n-1} = \frac{1}{2} \neq 0$,

следовательно, ряд расходится по достаточному признаку расходимости ряда.

Интегральный признак Коши

Теорема. Если $a_n = f(n)$, где функция $f(x) > 0$, монотонно убывает и непрерывна при $1 \leq a \leq x$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и интеграл $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ сходятся или расходятся одновременно.

• **Пример.** Исследовать сходимость гармонического ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Решение. Все условия соблюдены для функции

$f(x) = \frac{1}{x}$, поэтому вычислим несобственный интеграл

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{1}{x} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} (\ln x) \Big|_1^b = \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} (\ln b - \ln 1) = +\infty, \text{ значит, } \mathbf{\text{ряд расходится.}} \end{aligned}$$