Несобственные интегралы. Приложения определенного интеграла. Приближенное вычисление определенного интеграла

Лекция № 4

Несобственные интегралы.

1) **Несобственный интеграл I - ого рода (с бесконечными пределами интегрирования).**

Опр. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a; +\infty)$. ***Несобственным интегралом первого рода*** от функции $f(x)$ на промежутке $[a; +\infty)$ называется предел

$$\lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)dx,$$

если он существует и конечен.

Обозначается несобственный интеграл символом

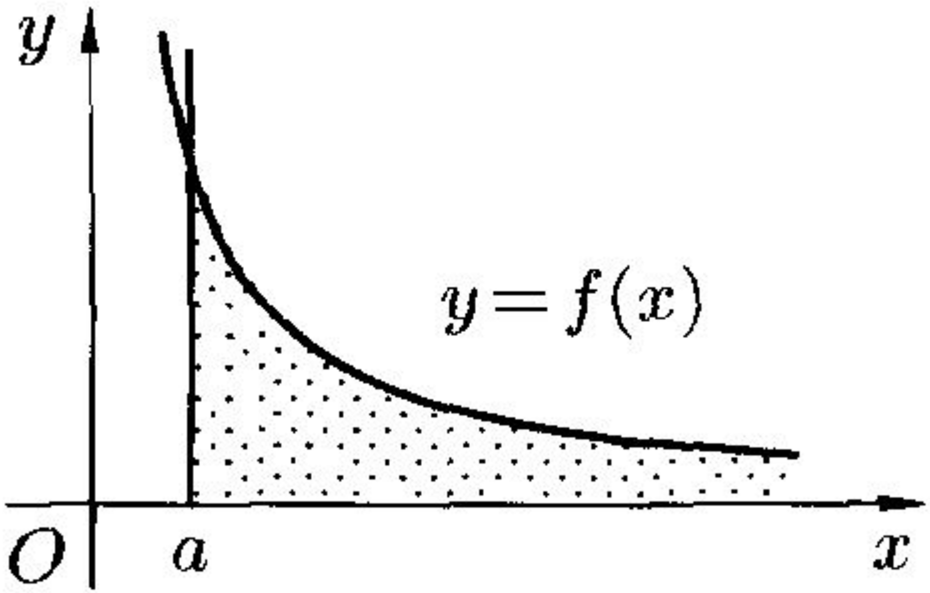
$$\int_a^{+\infty} f(x)dx\,.$$

Несобственные интегралы.

Вводя понятие определенного интеграла, мы предполагали, что отрезок интегрирования конечен, а подынтегральная функция ограничена на этом отрезке. Рассмотрим случаи, когда хотя бы одно из этих условий не выполняется.

Несобственные интегралы.

- Если непрерывная функция $f(x) \geq 0$ на промежутке $[a; +\infty)$ и интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится, то он выражает площадь бесконечно длинной криволинейной трапеции.



Несобственные интегралы.

- Если указанный предел существует, то интеграл называется ***сходящимся***, в противном случае интеграл называется ***расходящимся***.

Аналогичным образом определяются еще два вида несобственных интегралов первого рода:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{b} f(x)dx,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{c} f(x)dx + \lim_{b\to+\infty} \int_{c}^{b} f(x)dx\,,$$

где с – произвольное число. В этом случае интеграл сходится лишь тогда, когда сходятся оба интеграла справа.

Пример

Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость

$$\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}dx$$

Решение. По определению имеем

$$\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}dx = \lim_{c\to+\infty}\int_0^{c} xe^{-x^2}dx = -\frac{1}{2}\lim_{c\to+\infty}\int_0^{c} e^{-x^2}d(-x^2) =$$

$$= -\frac{1}{2}\lim_{c\to+\infty} e^{-x^2}\Big|_0^c = -\frac{1}{2}\lim_{c\to+\infty}(e^{-c^2}-1) = \frac{1}{2}.$$

Ответ: интеграл сходится.

Пример

- Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость:

а) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^2} = \lim\limits_{b\to+\infty} \frac{x^{-1}}{-1} \,|_1^b =$

$= -\lim\limits_{b\to+\infty} \frac{1}{x} \,|_1^b = -\lim\limits_{b\to+\infty} (\frac{1}{b} - 1) = 1$, **интеграл сходится**.

б) $\int_{-\infty}^0 \cos x \, dx = \lim\limits_{a\to-\infty} \sin x \,|_{-\infty}^0 =$

$= \lim\limits_{a\to-\infty} (\sin 0 - \sin a) = -\lim\limits_{a\to-\infty} \sin a,$

но предел $\lim\limits_{a\to-\infty} \sin a$ не существует, значит, интеграл **расходится.**

Пример

- Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость:

в) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim\limits_{b \to +\infty} \int_1^b \frac{dx}{x} = \lim\limits_{b \to +\infty} \ln x \mid_1^b =$

$= \lim\limits_{b \to +\infty} (\ln b - \ln 1) = \ln \infty = \infty,$

значит, **интеграл расходится.**

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\mathrm{p}}} = \lim_{b \to +\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^{\mathrm{p}}} = \begin{cases} \frac{1}{1-\mathrm{p}}(b^{1-\mathrm{p}} - 1), p \neq 1, \\ \ln p, \quad p = 1. \end{cases}$$

Если $p > 1$, то интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\mathrm{p}}}$ сходится.

Если $p \leq 1$, то интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\mathrm{p}}}$ расходится.

Признаки сходимости несобственных интегралов первого рода.

- **Первый признак сравнения.**

Теорема 1. Если на промежутке [*a;* +∞) непрерывные функции $f(x)$ и $g(x)$ удовлетворяют условию

$0 \leq f(x) \leq g(x)$, то из сходимости интеграла $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ следует сходимость интеграла $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, а из расходимости интеграла $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ следует расходимость интеграла $\int_a^{+\infty} g(x)dx$.

Пример. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2(1+e^{-x})}$.

Решение. Сравним: $\frac{1}{x^2(1+e^{-x})} < \frac{1}{x^2}$ при $1 \leq x \leq +\infty$. Так как $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ сходится, то сходится и искомый интеграл по признаку сравнения.

Признаки сходимости несобственных интегралов первого рода.

- **Второй признак сравнения.**

Теорема 2. Если существует предел $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=k$

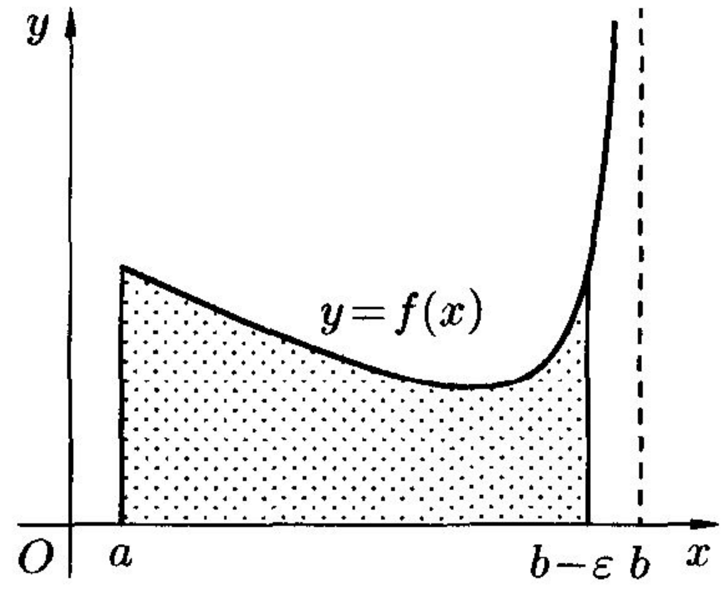
$(0<k<\infty, f(x)>0$ и $g(x)>0)$, то интегралы $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ и $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ одновременно оба сходятся или оба расходятся.

2) Несобственные интегралы II - ого рода (интегралы от неограниченных (разрывных) функций).

Опр. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на полуинтервале $[a;\ b)$ и имеет бесконечный разрыв при $x = b$. Если существует конечный предел $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$, то его называют **несобственным интегралом II - ого рода** и обозначают $\int_a^b f(x)dx$.

Таким образом, по определению,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx.$$



Несобственные интегралы II - ого рода (интегралы от неограниченных (разрывных) функций).

- Аналогично: 1) если функция $f(x)$ терпит разрыв в точке $x = a$, то полагают $\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx.$

2) если функция $f(x)$ терпит разрыв во внутренней точке с отрезка $[a; b]$, то несобственный интеграл II - ого рода определяется формулой

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\alpha\to 0}\int_a^{c-\alpha} f(x)dx + \lim_{\beta\to 0}\int_{c+\beta}^b f(x)dx.$$

Пример. Вычислить $\int_0^1 \frac{dx}{x^2}$. ***Решение:***

При $x = 0$ функция $y = \dfrac{1}{x^2}$ терпит бесконечный разрыв

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{0+\varepsilon}^1 x^{-2}\,dx = -\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{x}\Big|_{0+\varepsilon}^1 = -\left(1 - \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\right) = \infty,$$

Признаки сходимости несобственных интегралов второго рода.

- **Первый признак сравнения.**

Теорема 1. Если на полуинтервале [*a; b*) функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны, удовлетворяют условию $0 \leq f(x) \leq g(x)$ и при $x = b$ *терпят бесконечный разрыв.* Тогда из сходимости интеграла $\int_a^b g(x)dx$ следует сходимость интеграла $\int_a^b f(x)dx$, а из расходимости интеграла $\int_a^b f(x)dx$ следует расходимость интеграла $\int_a^b g(x)dx$.

Признаки сходимости несобственных интегралов второго рода.

- **Второй признак сравнения.**

Теорема 2. Пусть функции $f(x)$ и $g\,(x)$ непрерывны на полуинтервале $[a;\ b)$ и терпят разрыв в точке $x = b$. Если существует предел $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = k$ $(0< k< \infty, f(x) > 0$ и $g(x) > 0)$, то интегралы $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ и $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ одновременно оба сходятся или оба расходятся.

Пример.

Установить сходимость интеграла: $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sin x}$.

<u>Решение.</u>

Функция $f(x) = \dfrac{1}{\sin x}$ имеет на $[0; 1]$ единственный разрыв в точке $x = 0$. Рассмотрим функцию $\varphi(x) = \dfrac{1}{x}$.

Интеграл расходится:

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{0+\varepsilon}^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \to 0} \ln x \Big|_{\varepsilon}^{1} = 0 - \lim_{\varepsilon \to 0} \ln \varepsilon$$

И так как

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} = 1,$$

то интеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sin x}$ также расходится.

Пример.

- Вычислить или установить расходимость интеграла $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^p}, p\ > 0, p -$ число.

<u>Решение</u>. $x = b$ - особая точка. $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^p} =$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \int_a^{b-\varepsilon} \frac{dx}{(b-x)^p} dx = -\frac{1}{-p+1} \lim_{\varepsilon\to 0} (b-x)^{-p+1} \Big|_a^{b-\varepsilon} =$$

$$= \frac{1}{p-1} \lim_{\varepsilon\to 0} (\varepsilon^{-p+1} - (b-a)^{-p+1}) =$$

$$= \begin{cases} 0, \text{если } 0 < p < 1, \text{сходится интеграл,} \\ \infty, \text{если } p \geq 1, \text{интеграл расходится.} \end{cases}$$

Аналогично: 1) интеграл $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^p}$ сходится при $0 < p < 1$ и расходится при $p \geq 1$;

Пример.

1) Интеграл $\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2}$ расходится, так как $p > 1.$

2) Интеграл $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$ сходится, так как

$p = \frac{2}{3} < 1.$

3) Интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$

(x = a = 0 – точка разрыва, $\alpha > 0$)

расходится при $\alpha \geq 1$

и сходится при $0 < \alpha < 1.$

Геометрические приложения определенного интеграла.

I. Вычисление площадей плоских фигур.

а) в прямоугольных координатах:

Если непрерывная кривая задана уравнением $y = f(x)$ и $f(x) \geq 0$, то площадь фигуры равна $S = \int_a^b f(x)dx$.

Если $f(x) < 0$, то площадь фигуры равна

$$S = -\int_a^b f(x)dx.$$

Или две формулы можно объединить в одну:

$$S = \left|\int_a^b f(x)dx\right|.$$

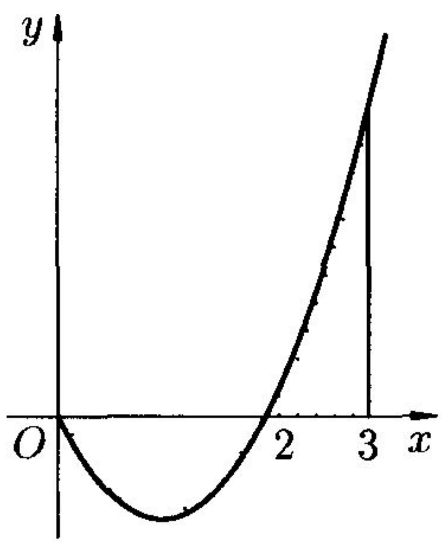
Пример.

- Найти площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = x^2 - 2x$ при $x \in [0; 3]$.

<u>*Решение*</u>.

$$S = S_1 + S_2 = -\int_0^2 (x^2 - 2x)dx + \int_2^3 (x^2 - 2x)dx =$$

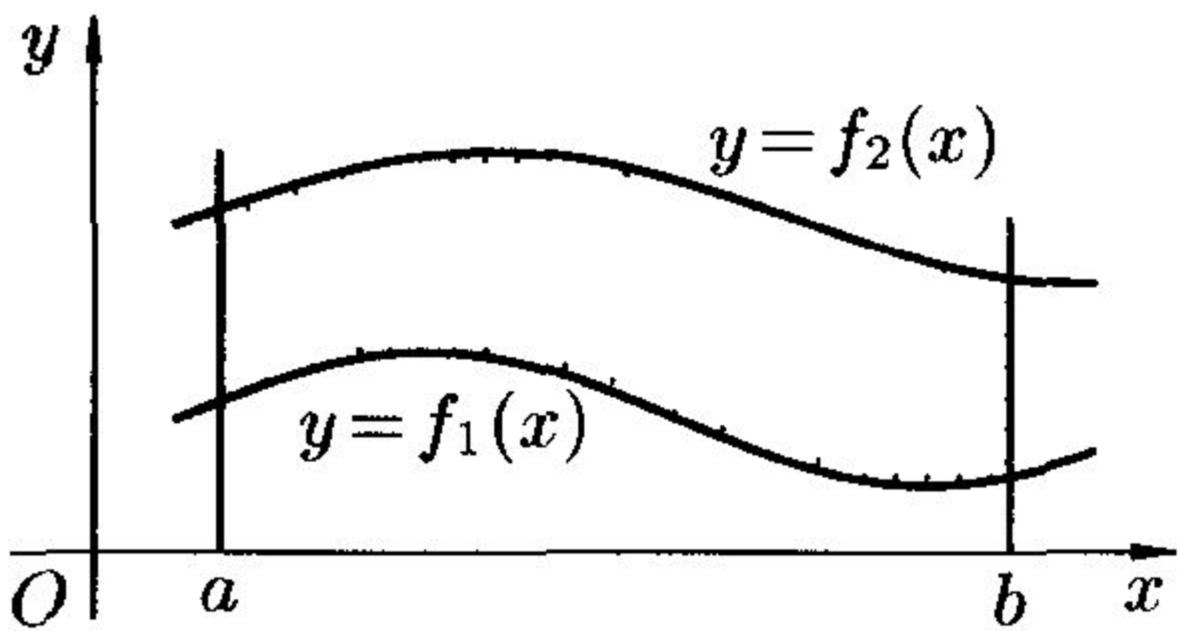
$$= -\left(\frac{x^3}{3} - x^2\right) \Big|_0^2 + \left(\frac{x^3}{3} - x^2\right) \Big|_2^3 = \frac{8}{3} \text{ (кв. ед.)}.$$



Геометрические приложения определенного интеграла.

- Если фигура ограничена сверху кривой $y = f_2(x)$, а снизу – кривой $y = f_1(x)$, где $f_1(x) \leq f_2(x)$, то площадь фигуры равна

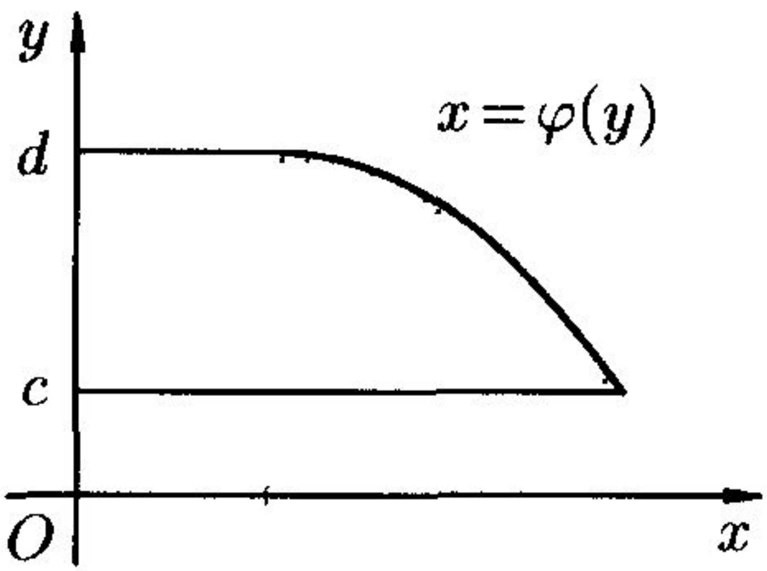
$$\boldsymbol{S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]dx.}$$



Площадь плоской фигуры

- Если криволинейная трапеция ограничена прямыми $y = c$, $y = d$, осью Oy и непрерывной кривой $x = \varphi(y)$, где $\varphi(y) \geq 0$, то площадь равна

$$S = \int_c^d \varphi(y)dy.$$



Площадь плоской фигуры

- Если кривая задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [\alpha; \beta]$, то площадь криволинейной трапеции, ограниченной этой кривой, прямыми $x = a$, $x = b$ и отрезком $[a; b]$ оси Ox, выражается формулой

$$S = \left| \int_{\alpha}^{\beta} y(t) \cdot x'(t)\, dt \right|,$$

где α и β определяются из равенств:

$$x(\alpha) = a,\ x(\beta) = b.$$

Пример

Вычислить площадь фигуры, ограниченной эллипсом

$x = a\cos t,\ y = b\sin t$.

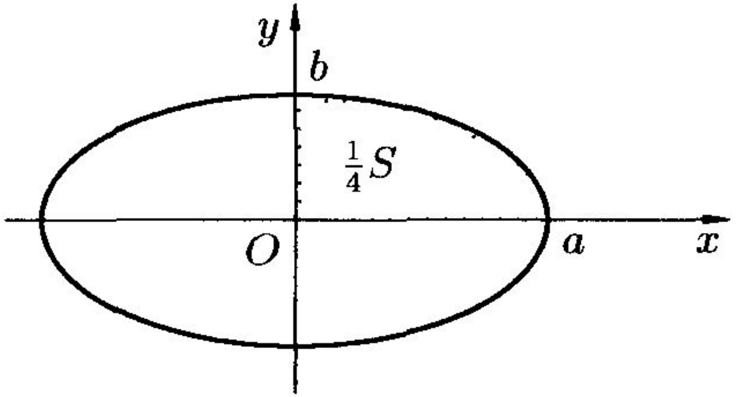
Решение. Найдем сначала $\frac{1}{4}S$.

Так как $0 \le x \le a$, то $\frac{\pi}{2} \le t \le 0$. Найдем $x'(t) = -a\sin t$.

Тогда $\frac{1}{4}S = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} b\sin t \cdot a\sin t\,dt = -ab\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin^2 t\,dt =$

$= -ab\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{\mathbf{1}-\cos \mathbf{2}t}{\mathbf{2}}\,dt = -\frac{ab}{2}\left(\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} dt - \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \cos \mathbf{2}t\,dt\right) =$

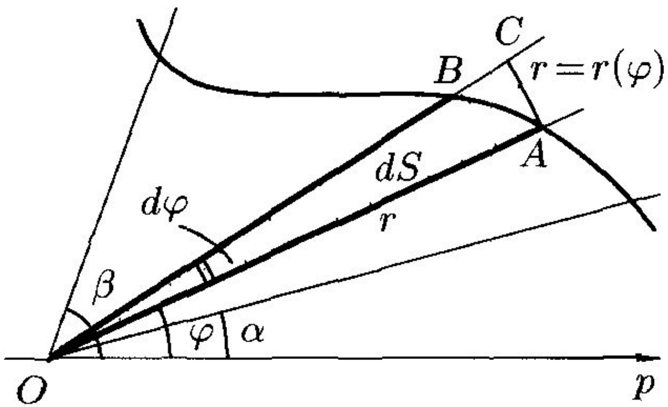
$= -\frac{ab}{2}\left(-\frac{\pi}{2} - 0\right) = \frac{\pi ab}{4}$, тогда $S = \pi ab$.



Площадь плоской фигуры

- б) в полярных координатах:

Площадь криволинейного сектора, ограниченного непрерывной кривой, заданной в полярных координатах уравнением $r = r(\varphi)$ и двумя лучами $\varphi = \alpha$ и $\varphi = \beta$ $(\alpha < \beta)$ находится по формуле:



$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2 d\varphi = \int_{\alpha}^{\beta} dS,$$

где $dS = \frac{1}{2} r^2 d\varphi$ – равен площади кругового сектора OAC радиуса r с центральным углом φ.

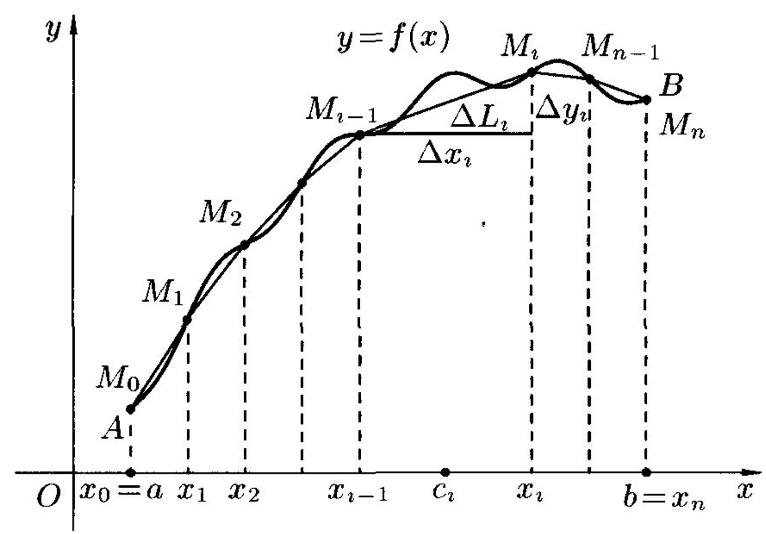
II. Вычисление дуги плоской кривой

- а) в прямоугольных координатах

Под **длиной дуги *AB*** понимается предел, к которому стремится длина ломаной линии, вписанной в эту дугу, когда число звеньев ломаной неограниченно возрастает, а длина наибольшего звена стремится к нулю.

Если кривая $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$ гладкая (т.е. ее производная непрерывна), то длина дуги этой кривой равна:

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$



II. Вычисление дуги плоской кривой

б) Если уравнение кривой *AB* задано параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [\alpha; \beta]$, где $x(t)$ и $y(t)$ – непрерывные функции с непрерывными производными и $x(\alpha) = a$, $x(\beta) = b$, то длина дуги равна

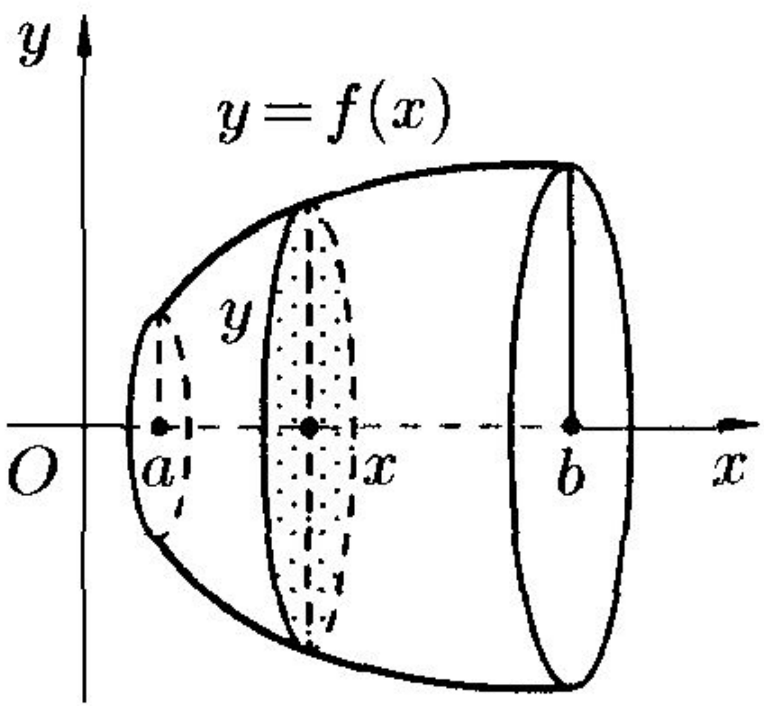
$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt.$$

в) Если гладкая кривая задана в полярных координатах уравнением $r = r(\varphi)$, где $\alpha \le \varphi \le \beta$, то длина дуги равна

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + r'^2}\, d\varphi$$

III. Вычисление объема тела

Пусть вокруг оси Ox вращается криволинейная трапеция, ограниченная непрерывной линией $y = f(x) \geqslant 0$, отрезком $a \leqslant x \leqslant b$ и прямыми $x = a$ и $x = b$ Полученная от вращения фигура называется *телом вращения*.

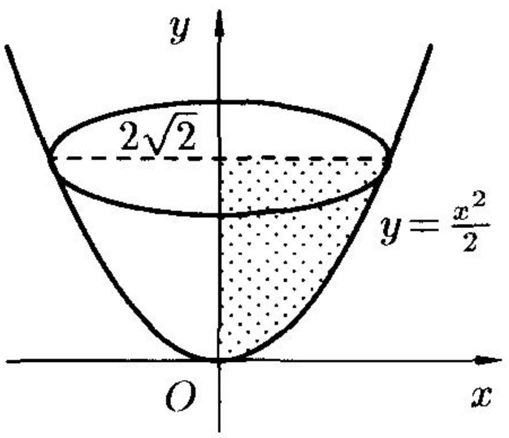


$$V_x = \pi \int_a^b y^2\, dx.$$

III. Вычисление объема тела

Если криволинейная трапеция ограничена графиком непрерывной функции $x = \varphi(y) \geqslant 0$ и прямыми $x = 0$, $y = c$, $y = d$ $(c < d)$, то объем тела, образованного вращением этой трапеции вокруг оси Oy, по аналогии с формулой (равен

$$V_y = \pi \int\limits_c^d x^2\, dy$$



Пример. Найти объем тела $y = \frac{x^2}{2}$, $x = 0$, $y = 2\sqrt{2}$ вокруг оси Oy

$$V_y = \pi \int\limits_0^{2\sqrt{2}} 2y\, dy = \pi y^2 \Big|_0^{2\sqrt{2}} = 8\pi$$

Пример

- Найти длину кривой $y^2 = x^3$ от x = 0 до x = 1 $(y \geq 0)$.

Пример.

- Найти площадь фигуры, ограниченной лемнискатой $r^2 = 2\cos 2\varphi$.

<u>Решение.</u>

Пример.

1. Найти площадь фигуры, ограниченной параболой $y = -x^2$, прямыми $x = 0$, $x = 1$ и осью Ox.

<u>*Решение*</u>. $S = -\int_0^1 (-x^2)dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3}$ (кв. ед.).

Пример.

- Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$\begin{cases} y = 2 - x^2 \\ y = -x. \end{cases}$$

<u>*Решение.*</u> Найдем точки пересечения графиков заданных функций: $2 - x^2 = -x$, откуда $x_1 = -1$, $x_2 = 2$. Искомая площадь:

$$S = \int_{-1}^{2} (2 - x^2 - (-x))dx = 4{,}5 \text{ (кв. ед.)}.$$