Применение интеграла по фигуре от скалярной функции в механике

Вычисление массы материальной фигуры.

- *- стержень, совпадающий с отрезком интегрирования, тогда*

$$M = \int_a^b \rho(x)\,dx$$

- *-дуга линии (L), тогда*

$$M = \int_{(L)} \rho(P)\,dl;$$

- *- плоская область (D), тогда*

$$M \overset{(*)}{=} \iint_{(D)} \rho(P)\,ds;$$

- - *поверхность* (Q), *тогда*

$$M = \iint\limits_{(Q)} \rho(P)\,dq;$$

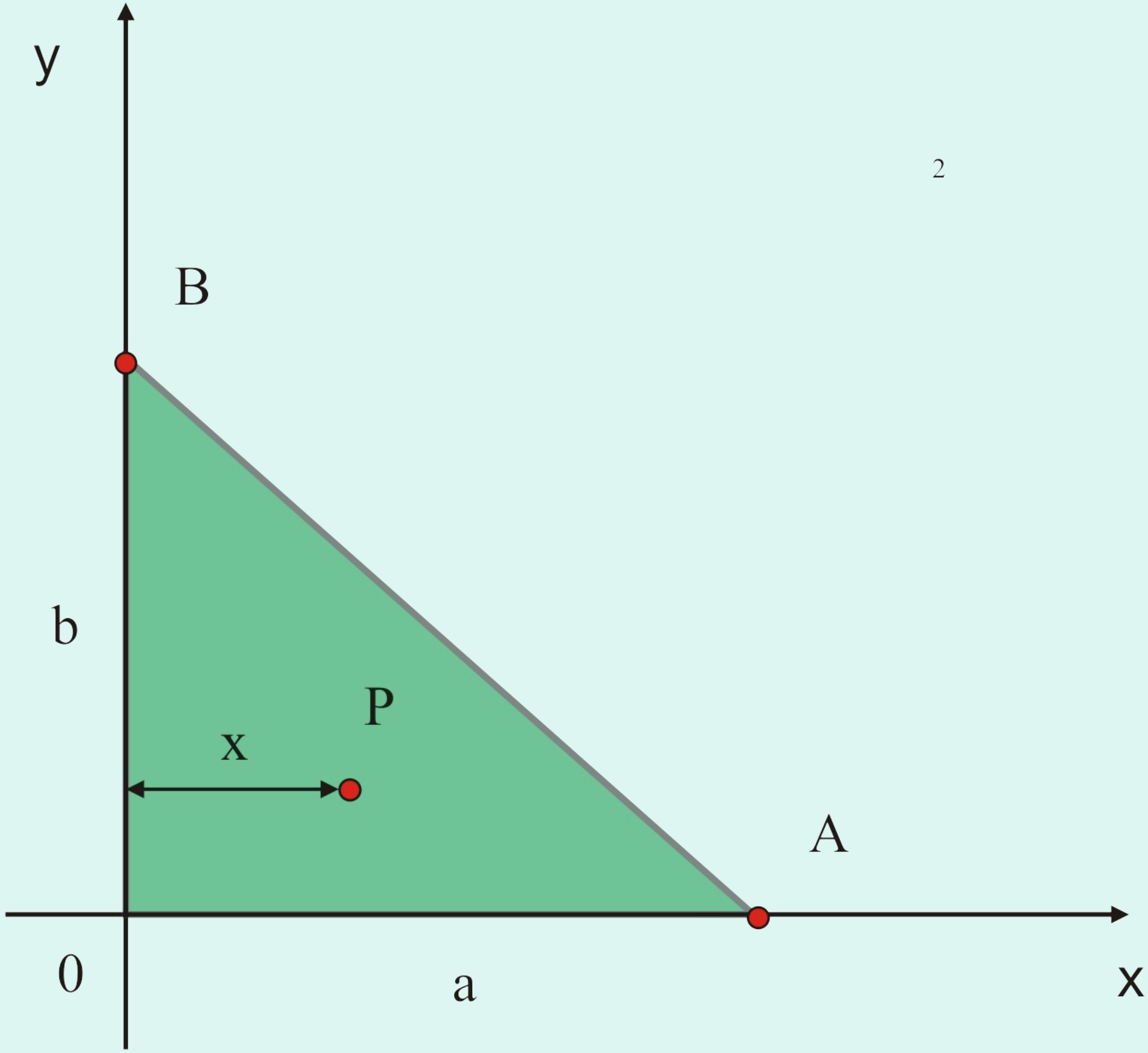
- - *пространственная область (тело)* (V), *тогда*

$$M = \iiint\limits_{(V)} \rho(P)\,dv$$

Пример

Найти массу пластинки, имеющей форму прямоугольного треугольника с

катетами $OA=a$, $OB=b$, если плотность в любой точке P равна расстоянию от точки P до катета OB.



2

Решаем задачу с применением формулы (*), при этом $\rho(P) = \rho(x, y) = x.$

Уравнение прямой AB в отрезках:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \Rightarrow y = \frac{b}{a}(a - x)$$

Тогда

$$M = \iint\limits_{(D)} \rho(x, y)dxdy = \int\limits_0^a \mathrm{dx} \int\limits_0^{\frac{b}{a}(a-x)} xdy = \int\limits_0^a x(y)\Big|_0^{\frac{b}{a}(a-x)} dx =$$

$$= \frac{b}{a}\int\limits_0^a x(a - x)dx = \frac{b}{a}\left(a\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^a = \frac{a^2 b}{6};$$

Вычисление статических моментов.

Определение 1 *Статическим моментом материальной точки относительно прямой (точки, плоскости)*

называется произведение ее массы на расстояние от точки до прямой (точки, плоскости).

- Определение 2 *Статическими моментами плоской системы* n

материальных точек относительно осей декартовой прямоугольной системы координат называются выражения:

$$M_x = \sum_{i=1}^{n} y_i m_i, \quad M_y = \sum_{i=1}^{n} x_i m_i,$$

где m_i *- сосредоточенные в точках массы;* $x_i, y_i, \quad i = \overline{1, n}$ *- абсциссы и ординаты соответствующих точек.*

Определение 3

Статическими моментами M_x и M_y *плоской фигуры относительно осей декартовой прямоугольной системы координат называются выражения:*

$$M_x = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} y_i \rho(P_i) \Delta\mu_i = \int_{(\Phi)} y\rho(P)d\mu,$$

$$M_y = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} x_i \rho(P_i) \Delta\mu_i = \int_{(\Phi)} x\rho(P)d\mu.$$

при условии, что указанные пределы существуют и не зависят от способа построения интегральной суммы

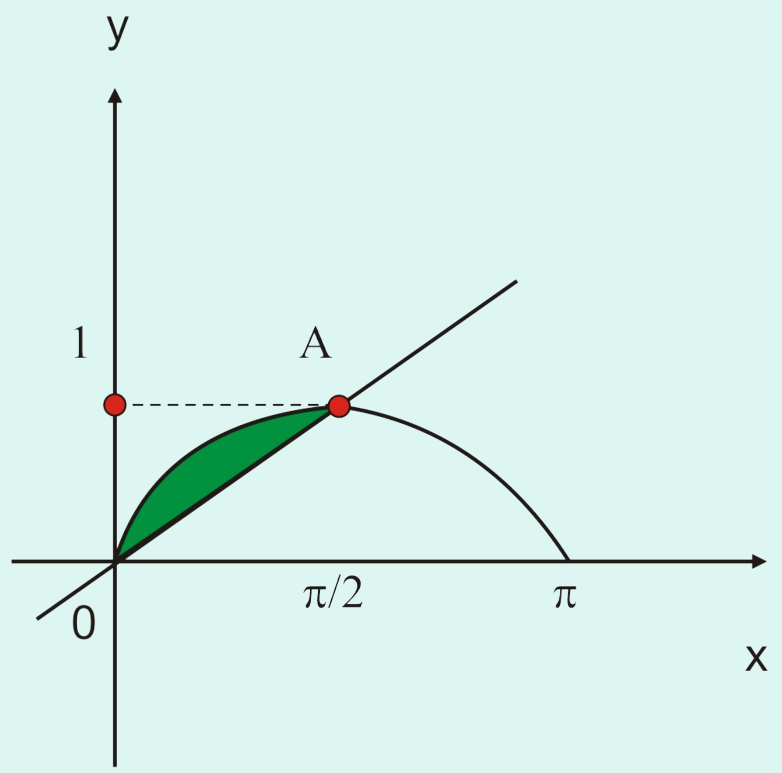
Пример

Найти статический момент относительно оси Ox однородной фигуры, ограниченной синусоидой $y = \sin x$, и прямой OA, проходящей через начало координат и точку $A\left(\frac{\pi}{2};1\right)$ синусоиды .

Для определения воспользуемся формулой

$$M_x = \iint_{(D)} y\rho(x, y)\,dxdy,$$

уравнение прямой OA имеет вид $y = \dfrac{2x}{\pi}$



$$M_x = \iint\limits_{(D)} y\rho(x,y)\,dxdy = \rho\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_{2x/\pi}^{\sin x} y\,dy = \frac{1}{2}\rho\int_0^{\pi/2}\left(\sin^2 x - \frac{4}{\pi^2}x^2\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\rho\int_0^{\pi/2}\left(\frac{1-\cos 2x}{2} - \frac{4}{\pi^2}x^2\right)dx = \frac{1}{8}\rho\left(\pi - \frac{2}{3}\pi\right) = \frac{\pi}{24}\rho$$

Координаты центра масс материальной фигуры

- *Для плоской фигуры* $Mx_c = M_y, \; My_c = M_x$

$$x_c = \frac{M_y}{M} = \frac{\int\limits_{(\Phi)} x\rho(P)d\mu}{\int\limits_{(\Phi)} \rho(P)d\mu}, \quad y_c = \frac{M_x}{M} = \frac{\int\limits_{(\Phi)} y\rho(P)d\mu}{\int\limits_{(\Phi)} \rho(P)d\mu}$$

- *для пространственной фигуры*

$$Mx_c = M_{yz}, \; My_c = M_{xz}, \; Mz_c = M_{yx}$$

$$x_c = \frac{M_{yz}}{M} = \frac{\int\limits_{(\Phi)} x\rho(P)d\mu}{\int\limits_{(\Phi)} \rho(P)d\mu}, \quad y_c = \frac{M_{xz}}{M} = \frac{\int\limits_{(\Phi)} y\rho(P)d\mu}{\int\limits_{(\Phi)} \rho(P)d\mu}, \quad z_c = \frac{M_{xy}}{M} = \frac{\int\limits_{(\Phi)} z\rho(P)d\mu}{\int\limits_{(\Phi)} \rho(P)d\mu}$$

Пример

Найти центр масс однородного цилиндрического тела, ограниченного поверхностями

$$z = x^2 + y^2 + 1, z = 0, x^2 + y^2 = 1$$

Вследствие симметрии $x_c = y_c = 0,$

$$z_c = \frac{\iiint\limits_{(V)} z\,dv}{\iiint\limits_{(V)} dv}$$

Вычислим тройные интегралы в цилиндрической системе координат.

$$z = x^2 + y^2 + 1 \Rightarrow z = r^2 + 1, \quad x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow r = 1$$

Для области (V) имеем $0 \le \varphi \le 2\pi, 0 \le r \le 1, 0 \le z \le r^2 + 1$

$$\iiint\limits_{(V)} z\,dv = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r\,dr \int_0^{r^2+1} z\,dz = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r\left(r^2+1\right)^2 dr = \frac{7}{6}\pi;$$

$$\iiint\limits_{(V)} dv = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r\,dr \int_0^{r^2+1} dz = \frac{3}{2}\pi; \qquad z_c = \frac{7}{9}, \quad C\left(0, 0, \frac{7}{9}\right)$$

Моменты инерции

Определение *Моментом инерции* I_0 *материальной точки массой* m *относительно начала координат (относительно оси* Ox *-* I_x *, относительно плоскости* Oxy *-* I_{xy} *) называется произведение массы точки на квадрат расстояния до начала координат(соответственно оси* Ox*, плоскости* Oxy*)*

$$I_0 = md^2, \quad I_x = m\left(y^2 + z^2\right), \quad I_{xy} = mz^2$$

момент инерции плоской пластины (D) относительно координатных осей прямоугольной декартовой системы координат вычисляются по формулам

$$I_x = \int\limits_{(\Phi)} y^2 \rho(P)\,d\mu = \iint\limits_{(D)} y^2 \rho(x, y)\,dxdy, \quad I_y = \iint\limits_{(D)} x^2 \rho(x, y)\,dxdy$$

Моменты инерции тела относительно координатных плоскостей

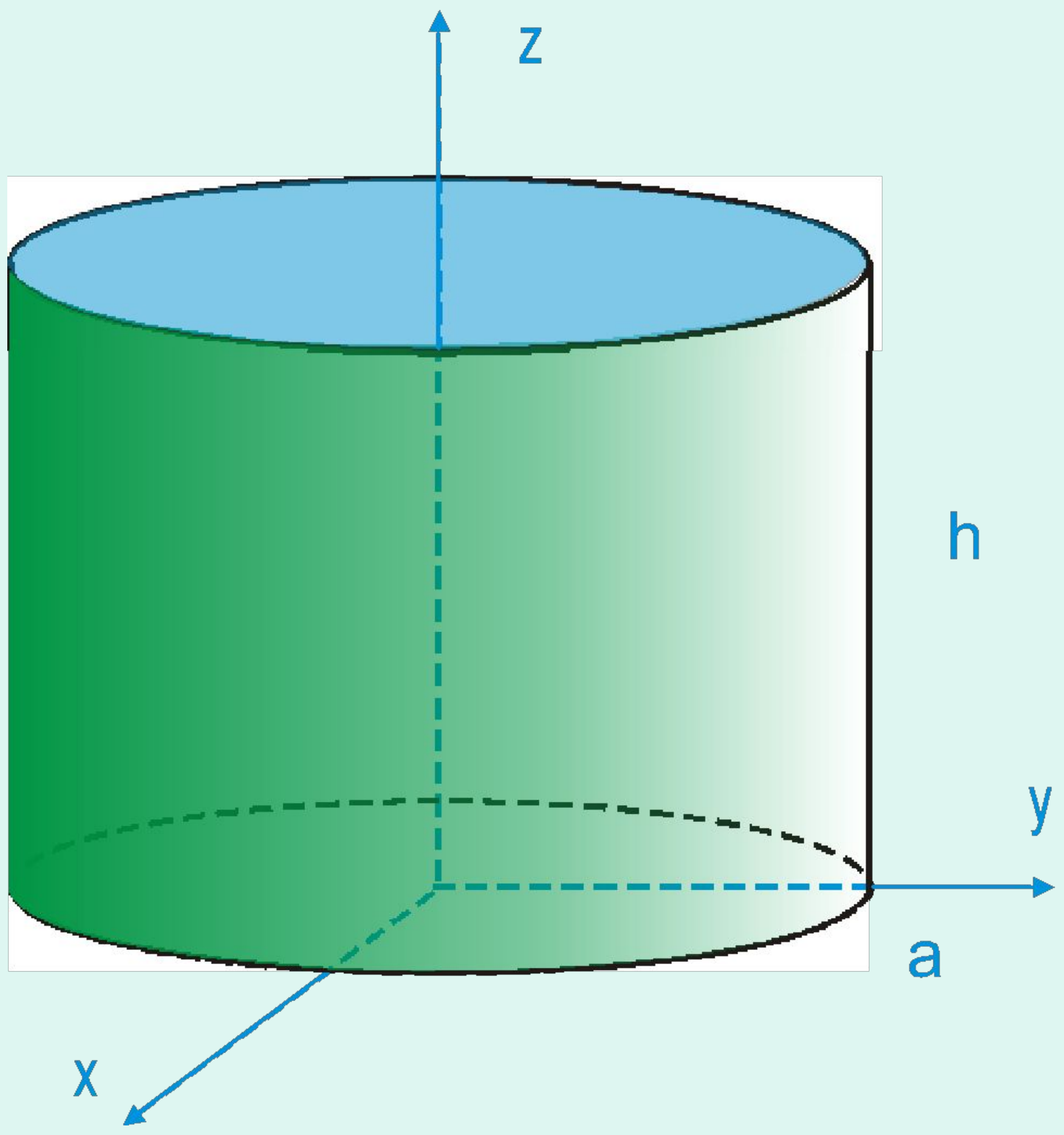
$$I_{xy} = \int\limits_{(\Phi)} z^2 \rho(P)\, d\mu = \iiint\limits_{(V)} z^2 \rho(x, y, z)\, dx dy dz$$

Пример

Найти момент инерции кругового цилиндра ,

высота которого h и радиуса a относительно оси,

служащей диаметром основания цилиндра .


z
h
y
a
x

Вычисления проведем в цилиндрических координатах, при этом уравнение цилиндра примет вид r = a

Пределы интегрирования

$$0 \le \varphi \le 2\pi, \; 0 \le r \le a, \; 0 \le z \le h.$$

Имеем:

$$I_x = \iiint\limits_{(V)} \left(y^2 + z^2\right) dv = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r\,dr \int_0^h \left(r^2 \sin^2\varphi + z^2\right) dz =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r\,dr \left(r^2 h \sin^2\varphi + \frac{h^3}{3}\right) = \int_0^{2\pi} \left(\frac{a^4}{4} h \sin^2\varphi + \frac{h^3}{3}\frac{a^2}{2}\right) d\varphi =$$

$$= \frac{ha^4}{4} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\left(1 - \cos 2\varphi\right) d\varphi + \frac{h^3 a^2}{3}\pi = \pi h a^2 \left(\frac{a^2}{4} + \frac{h^2}{3}\right).$$