Замена переменных в интеграле по фигуре от скалярной функции

Общий случай замены переменной в двойном и тройном интегралах

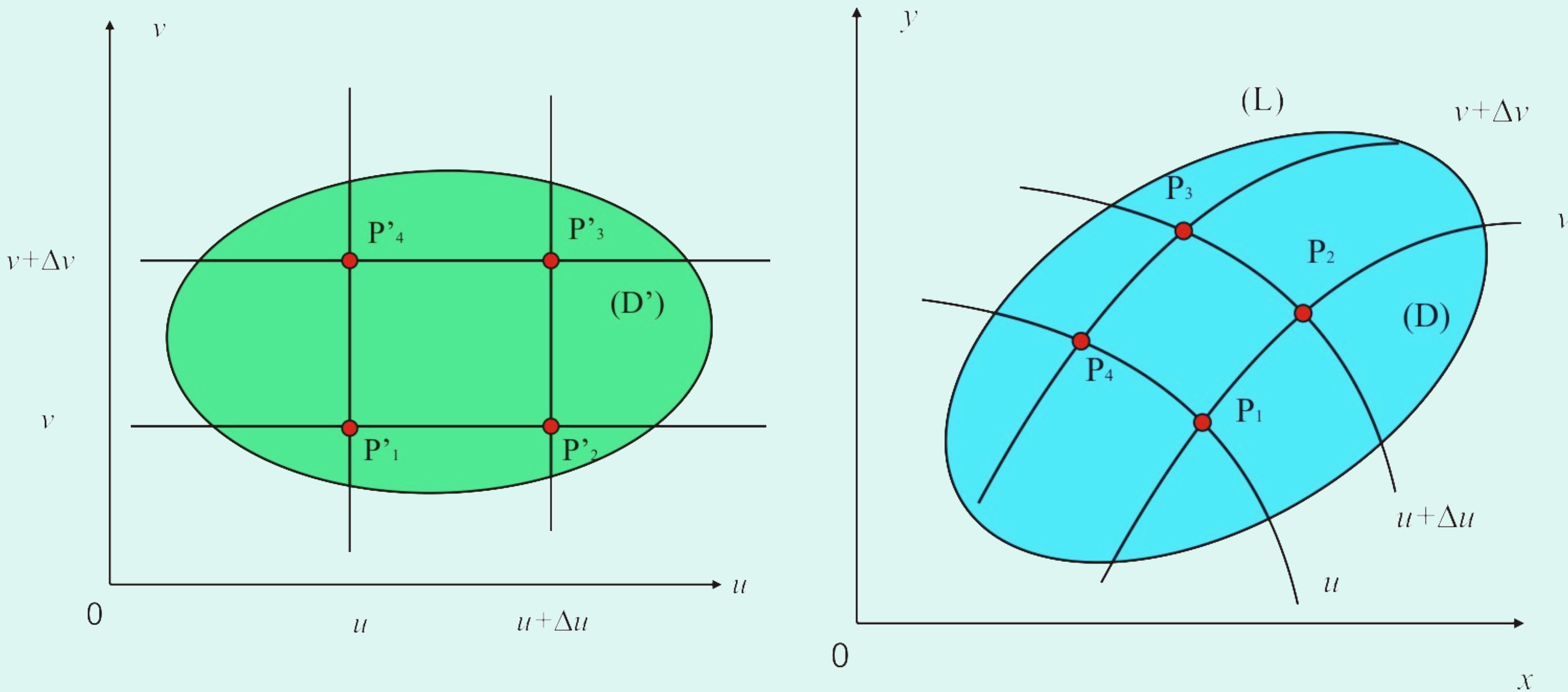
Замена переменных в двойном интеграле

Пусть в плоскости Oxy задана область (D), ограниченная линией (L). Предположим, что осуществляется замена переменных

$$x = x(u,v), \quad y = y(u,v) \qquad (*)$$

причем функции $x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$ взаимно однозначны и дифференцируемы в области (D).

Формулы $(*)$ устанавливают взаимно однозначное соответствие между точками $(x,y) \in D$ и $(u,v) \in (D')$



V. Khudenko

Разобьем область (D') прямыми $u = const$,

$v = const$ на прямоугольные площадки.

Тогда область (D) соответствующими кривыми линиями разобьется на криволинейные четырехугольники $P_1'P_2'P_3'P_4'$. Площадь элементарной фигуры

на плоскости $O'uv$ $\Delta S' = \Delta u \Delta v$ Найдем площадь соответствующей ей фигуры $P_1P_2P_3P_4$ достаточно малого четырехугольника координаты вершин которого

$P_1(x_1, y_1)$ $\quad x_1 = x(u, v),$

$P_2(x_2, y_2)$ $\quad x_2 = x(u+\Delta u, v),$ $\quad y_2 = y(u+\Delta u, v)$

$P_3(x_3, y_3)$ $\quad x_3 = x(u+\Delta u, v+\Delta v),$ $\quad y_3 = y(u+\Delta u, v+\Delta v)$

$P_4(x_4, y_4)$ $\quad x_4 = x(u, v+\Delta v),$ $\quad y_4 = y(u, v+\Delta v)$

Заменим приращения функций дифференциалами

$$x_1 = x(u, v), \qquad y_1 = y(u, v)$$

$$x_2 = x(u, v) + \frac{\partial x}{\partial u}\Delta u, \qquad y_2 = y(u, v) + \frac{\partial y}{\partial u}\Delta u$$

$$x_3 = x(u, v) + \frac{\partial x}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial x}{\partial v}\Delta v, \quad y_3 = y(u, v) + \frac{\partial y}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial y}{\partial v}\Delta v$$

$$x_4 = x(u, v) + \frac{\partial x}{\partial v}\Delta v, \qquad y_4 = y(u, v) + \frac{\partial y}{\partial v}\Delta v$$

Полученные выражения дают основание считать четырехугольник параллелограммом со сторонами

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \left\{ \frac{\partial x}{\partial u}\Delta u; \frac{\partial y}{\partial u}\Delta u; \right\} \qquad \overrightarrow{P_1P_4} = \left\{ \frac{\partial x}{\partial v}\Delta v; \frac{\partial y}{\partial v}\Delta v; \right\}$$

$$\Delta S = \left| \overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_4} \right| \approx \mathrm{mod} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial x}{\partial u}\Delta u & \frac{\partial y}{\partial u}\Delta u & 0 \\ \frac{\partial x}{\partial v}\Delta v & \frac{\partial y}{\partial v}\Delta v & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \mathrm{mod} \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \Delta u \Delta v$$

Введем обозначение
$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = I$$

Определитель *I* называется *функциональным определителем функций* $x(u,v)$ и $y(u,v)$ или *якобианом* .

Имеет место равенство: $|I| = \lim\limits_{d\to 0}\left(\dfrac{\Delta S}{\Delta S'}\right)$

Тогда формула замены переменных для двойного интеграла примет вид

$$\iint\limits_{(D)} f(x,y)ds = \iint\limits_{(D)} f_1(u,v)|I|dudv$$

Замечание

Переход к полярным координатам в двойном интеграле является частным случаем при $u=r$ и $v=\varphi$. Тогда

$$x = x(r,\varphi) = r\cos\varphi, \qquad y = y(r,\varphi) = r\sin\varphi$$

$$I = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r$$

Вычисление тройного интеграла в цилиндрических координатах

Якобиан для случая трех переменных

$$I = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial x}{\partial w} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial w} \\ \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

Формула замены переменных для тройного интеграла примет вид

$$\iiint\limits_{(V)} f(x, y, z)dv = \iiint\limits_{(V)} f_1(u, v, w)|I|dudvdw$$

V. Khudenko

В случае перехода к цилиндрическим координатам $u=r,\quad v=\varphi,\quad w=z$

связь между декартовыми и цилиндрическими координатами:

$$\begin{cases} x = x(u,v,w) = r\cos\varphi, \\ y = y(u,v,w) = r\sin\varphi, \\ z = z(u,v,w) = z. \end{cases}$$

Тогда определитель Якоби

$$I = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r$$

а формула замены переменных при переходе к цилиндрическим координатам примет вид

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)dv = \iiint\limits_{(V)} f_1(r,\varphi,z)r\,dr\,d\varphi\,dz$$

Таким образом интеграл, после расстановки пределов интегрирования запишется в виде

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)dv = \iiint\limits_{(V)} f_1(r,\varphi,z)\,r\,dr\,d\varphi\,dz = \int\limits_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int\limits_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} r\,dr \int\limits_{z_1(r,\varphi)}^{z_2(r,\varphi)} f_1(r,\varphi,z)dz$$

Пример

Расставить пределы интегрирования в тройном интеграле $\iiint\limits_{(V)} f(P)\,dv$

и вычислить его значение в случае

$f(P) = y$ Область ограничена поверхностями:

$y = 0,\ y = \sqrt{2x - x^2},\ z = 0,\ z = a$

Учтем характер области:

$$y = \sqrt{2x - x^2} \Rightarrow x^2 + y^2 = 2x \Rightarrow r = 2\cos\varphi$$

Следовательно, область (V) задана неравенствами:

$$0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2} \qquad 0 \le r \le 2\cos\varphi \qquad 0 \le z \le a$$

Тогда

$$\iiint\limits_{(V)} f(P)dv = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{2\cos\varphi} r\,dr \int\limits_0^a f_1(P)dz$$

С учетом того, что $f(P) = y$ имеем

$$\iiint\limits_{(V)} y\,dv = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{2\cos\varphi} r\,dr \int\limits_0^a r\sin\varphi\,dz = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{2\cos\varphi} \sin\varphi \cdot r^2 \left(z\Big|_0^a \right) dr =$$

$$= \frac{a}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi \left(r^3\Big|_0^{2\cos\varphi} \right) d\varphi = \frac{8a}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\varphi \sin\varphi\, d\varphi = -\frac{2a}{3}\cos^4\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2a}{3}.$$

Вычисление тройного интеграла в сферических координатах

Положим $u=\rho$, $v=\varphi$, $w=\theta$. Зависимость между декартовыми и сферическими координатами

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi\sin\theta, \\ y = \rho\sin\varphi\sin\theta, \\ z = \rho\cos\theta. \end{cases}$$

определитель Якоби

$$I = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \rho\cos\theta\cos\varphi & -\rho\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \rho\cos\theta\cos\varphi & \rho\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\varphi & -\rho\sin\theta & 0 \end{vmatrix} = \rho^2\sin\theta.$$

V. Khudenko

формула замены переменных применительно к сферическим координатам примет вид

$$\iiint\limits_{(V)} f(x, y, z)dv = \iiint\limits_{(V)} f_1(\rho, \theta, \varphi)\rho^2 \sin\theta \, d\rho \, d\theta \, d\varphi$$

V. Khudenko

Получаем формулу

$$\iiint\limits_{(V)} f_1(\rho,\theta,\varphi)\rho^2 \sin\theta \, d\rho \, d\theta \, d\varphi = \int\limits_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int\limits_{\theta_1}^{\theta_2} \sin\theta d\theta \int\limits_{\rho_1(\varphi,\theta)}^{\rho_2(\varphi,\theta)} f_1(\rho,\varphi,\theta)\rho^2 d\rho$$

Пример

Расставить пределы интегрирования в тройном интеграле, если область (V) представляет собой часть пространства. Ограниченную поверхностями

$$x^2 + y^2 + z^2 = R_1^2, \quad x^2 + y^2 + z^2 = R_2^2, \quad z = 0.$$

Причем $R_2 > R_1, \quad z > 0$ а также вычислить

$$\iiint\limits_{(V)} f(P)dv \qquad f(P) = z + 2$$

Уравнение сфер: $\rho = R_1$, $\rho = R_2$ тогда

$$\iiint\limits_{(V)} f(P)dv = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin\theta d\theta \int_{R_1}^{R_2} f(P)\rho^2 d\rho$$

$$\iiint\limits_{(V)} (z+2)dv = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin\theta d\theta \int_{R_1}^{R_2} (\rho\cos\theta + 2)\rho^2 d\rho =$$

$$= 2\pi \int_0^{\pi/2} \sin\theta \left(\frac{\rho^4}{4}\cos\theta + \frac{2\rho^3}{3} \right)\Bigg|_{R_1}^{R_2} d\theta =$$

V. Khudenko

$$= 2\pi \int_0^{\pi/2} \sin\theta \left(\frac{R_2^4 - R_1^4}{4} \cos\theta + \frac{2\left(R_2^3 - R_2^3\right)}{3} \right) d\theta =$$

$$= 2\pi \left(\frac{\left(R_2^4 - R_1^4\right)}{4} \left(\frac{\cos^2\theta}{2} \right) \Bigg|_{\pi/2}^{0} - \frac{2}{3}\left(R_2^3 - R_1^3\right) \cos\theta \Big|_0^{\pi/2} \right) =$$

$$= 2\pi \left(\frac{R_2^4 - R_1^4}{8} + \frac{2\left(R_2^3 - R_1^3\right)}{3} \right)$$