

---

# Логическое следование формул

---

Определение. Формула  $\Phi$  называется *логическим следствием* формул  $\Phi_1, \dots, \Phi_m$ , если при любой подстановке в эти формулы вместо их переменных  $X_1, \dots, X_n$  конкретных высказываний  $A_1, \dots, A_n$  из истинности высказываний  $\Phi_1(A_1, \dots, A_n), \dots, \Phi_m(A_1, \dots, A_n)$  следует истинность высказывания  $\Phi(A_1, \dots, A_n)$ .

Символическое обозначение  $\Phi_1, \dots, \Phi_m \models \Phi$  - называется *логическим следованием*.

Формулы  $\Phi_1, \dots, \Phi_m$  называются *посылками* и формула  $\Phi$  – *следствием* логического следования  $\Phi_1, \dots, \Phi_m \models \Phi$ .

Определение. Множество формул  $\Phi_1, \dots, \Phi_m$  называется *противоречивым*, если из него логически следует любая (в том числе и тождественно ложная) формула  $\Phi$ . Символически это записывается  $\Phi_1, \dots, \Phi_m \models$ .

В противном случае множество формул  $\Phi_1, \dots, \Phi_m$  называется *выполнимым*.

Лемма (Транзитивность логического следования). Если  $\Phi_1, \dots, \Phi_m \models \Phi$  и для любого значения  $1 \leq i \leq m$  выполняется  $\Psi_1, \dots, \Psi_k \models \Phi_i$ , то  $\Psi_1, \dots, \Psi_k \models \Phi$ .

Лемма (Критерии логического следования).

Условие  $\Phi_1, \dots, \Phi_m \models \Phi$  равносильно каждому из следующих условий:

a)  $\Phi_1 \wedge \dots \wedge \Phi_m \models \Phi,$

b)  $\models \Phi_1 \wedge \dots \wedge \Phi_m \Rightarrow \Phi,$

c)  $\Phi_1, \dots, \Phi_m, \neg \Phi \models$ .

В частности,  $\Phi \models \Psi$  равносильно  $\models \Phi \Rightarrow \Psi$ .

Отсюда также следует, что  $\Phi = \Psi$  равносильно тому, что  $\Phi \models \Psi$  и  $\Psi \models \Phi$ .

## Основные правила логического следования:

- 1) *правило отделения* (или *правило модус поненс* – от латинского *modus ponens*)

$$\Phi, \Phi \Rightarrow \Psi \models \Psi ;$$

- 2) *правило контрапозиции*

$$\Phi \Rightarrow \Psi \models \neg \Psi \Rightarrow \neg \Phi ;$$

- 3) *правило цепного заключения*

$$\Phi_1 \Rightarrow \Phi_2, \Phi_2 \Rightarrow \Phi_3 \models \Phi_1 \Rightarrow \Phi_3 ;$$

- 4) *правило перестановки посылок*

$$\Phi_1 \Rightarrow (\Phi_2 \Rightarrow \Phi_3) \models \Phi_2 \Rightarrow (\Phi_1 \Rightarrow \Phi_3) .$$

---

Вывод: Следующие задачи равносильны:

а) проверка тождественной истинности формул;

б) проверка логического следования формул;

в) проверка тождественной ложности формул;

г) проверка противоречивости множества формул.

---

# Методы проверки тождественной истинности формул

---

## **Основные методы проверки тождественной истинности формул:**

1. Прямой метод.
  2. Алгебраический метод.
  3. Алгоритм Квайна.
  4. Алгоритм редукции.
  5. Метод семантических таблиц.
  6. Метод резолюций.
-



---

# Метод резолюций в алгебре высказываний

---

---

## Следующие задачи равносильны:

- а) проверка тождественной истинности формул;
  - б) проверка логического следования формул;
  - в) проверка тождественной ложности формул;
  - г) проверка противоречивости множества формул;
  - д) **проверка противоречивости множества ДИЗЬЮНКТОВ.**
-

Определение. Пусть для некоторой переменной  $X$  дизъюнкты  $D_1, D_2$  представимы в виде  $D_1 = D'_1 \vee X$ ,  $D_2 = D'_2 \vee \neg X$ . Тогда дизъюнкт  $D'_1 \vee D'_2$  называется *резольвентой дизъюнктов*  $D_1, D_2$  по переменной  $X$  и обозначается  $\text{Res}_X(D_1, D_2)$ .

Резольвента дизъюнктов  $D_1, D_2$  по некоторой переменной  $X$  называется *резольвентой дизъюнктов*  $D_1, D_2$  и обозначается  $\text{Res}(D_1, D_2)$ . По определению  $\text{Res}(X, \neg X) = 0$ .

Свойство. Если  $D_1 = D'_1 \vee X$ ,  $D_2 = D'_2 \vee \neg X$  выполнимы, то выполнима  $\text{Res}_X(D_1, D_2)$ .

Определение. Резолютивным выводом формулы  $\Phi$  из множества дизъюнктов  $S = \{D_1, \dots, D_m\}$  называется такая последовательность формул  $\Phi_1, \dots, \Phi_n$ , что:

- 1)  $\Phi_n = \Phi$ ;
- 2) каждая из формул  $\Phi_i$  ( $i=1, \dots, n$ ) либо принадлежит множеству  $S$ , либо является резольвентой  $\Phi_i = \text{Res}(\Phi_j, \Phi_k)$  предыдущих формул  $\Phi_j, \Phi_k$  при некоторых  $1 \leq j, k \leq i$ .

Теорема. Множество дизъюнктов  $S = \{D_1, \dots, D_m\}$  противоречиво в том и только том случае, если существует резолютивный вывод значения 0 из множества  $S$ .

Так как по критерию логического следования соотношение

$$\Phi_1, \dots, \Phi_m \models \Phi$$

равносильно условию

$$\Phi_1, \dots, \Phi_m, \neg \Phi \models$$

то справедлив следующий результат.

Следствие (Проверка логического следования формул).

Пусть для формул  $\Phi_1, \dots, \Phi_n, \Phi$  формула  
 $\Psi = \Phi_1 \wedge \dots \wedge \Phi_n \wedge \neg \Phi$  имеет КНФ  
 $\Psi = D_1 \wedge \dots \wedge D_m.$

Тогда логическое следование  $\Phi_1, \dots, \Phi_n \models \Phi$   
равносильно существованию резолютивного  
вывода значения 0 из множества дизъюнктов  
 $S = \{D_1, \dots, D_m\}.$

Алгоритм проверки логического следования формул  $\Phi_1, \dots, \Phi_n \models \Phi$  :

1. Составить формулу

$$\Psi = \Phi_1 \wedge \dots \wedge \Phi_n \wedge \neg \Phi$$

и найти ее КНФ

$$\Psi = D_1 \wedge \dots \wedge D_m.$$

2. Найти резолютивный вывод значения 0 из множества  $S = \{D_1, \dots, D_m\}$ .

3. Если такой вывод существует, то выполняется  $\Phi_1, \dots, \Phi_n \models \Phi$ .

Пример. Методом резолюций проверим логическое следование:

$$(\neg X \Rightarrow Z), (Y \Rightarrow W), ((W \wedge Z) \Rightarrow V), \neg V \models X \vee \neg Y.$$

Данное соотношение равносильно условию

$$(\neg X \Rightarrow Z), (Y \Rightarrow W), ((W \wedge Z) \Rightarrow V), \neg V, \neg(X \vee \neg Y) \models,$$

т.е. условию противоречивости формулы

$$\Psi = (\neg X \Rightarrow Z) \wedge (Y \Rightarrow W) \wedge ((W \wedge Z) \Rightarrow V) \wedge \neg V \wedge \neg(X \vee \neg Y).$$



---

Найдем КНФ этой формулы:

$$\begin{aligned}\Psi &= (X \vee Z) \wedge (\neg Y \vee W) \wedge (\neg(W \wedge Z) \vee V) \wedge \neg V \wedge (\neg X \wedge Y) = \\ &= (X \vee Z) \wedge (\neg Y \vee W) \wedge (\neg W \vee \neg Z \vee V) \wedge \neg V \wedge \neg X \wedge Y.\end{aligned}$$

Рассмотрим множество дизъюнктов

$$S = \{X \vee Z, \neg Y \vee W, \neg W \vee \neg Z \vee V, \neg V, \neg X, Y\}.$$

Построим резолютивный вывод значения 0 из этого множества  $S$ :

---

$$\Phi_1 = \text{Res}_X(X \vee Z, \neg X) = Z,$$

$$\Phi_2 = \text{Res}_Y(\neg Y \vee W, Y) = W,$$

$$\Phi_3 = \text{Res}_Z(\neg W \vee \neg Z \vee V, Z) = \neg W \vee V,$$

$$\Phi_4 = \text{Res}_W(\Phi_2, \Phi_3) = V,$$

$$\Phi_5 = \text{Res}(\Phi_4, \neg V) = 0.$$

Таким образом, множество дизъюнктов формулы  $\Psi$  противоречиво и, значит, выполняется исходное логическое следование.

Алгоритм проверки тождественной истинности формулы  $\Phi$  :

1. Рассмотреть формулу

$$\Psi = \neg\Phi$$

и найти ее КНФ

$$\Psi = D_1 \wedge \dots \wedge D_m.$$

2. Найти резолютивный вывод значения 0 из множества  $S = \{D_1, \dots, D_m\}$ .

3. Если такой вывод существует, то выполняется  $\models \Phi$ .