

Логические элементы

Вычислительная техника



Логика

упорядоченная система

мышления, которая создает

взаимосвязи между заданными

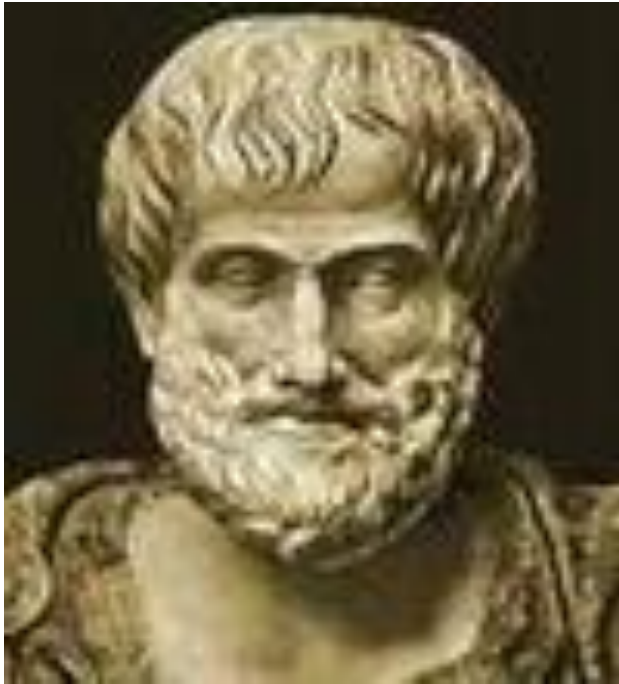
условиями и позволяет делать

умозаключения, основываясь на

предпосылках и

предположениях

Аристотель



384 — 322 до н. э.

Древнегреческий
философ

Основоположник
логики

Исследовал
различные формы
рассуждений , ввел
понятие

силлогизма

Рене Декарт



1596 – 1650

Французский
философ,
математик, механик,
физик и физиолог

Рекомендовал в
логике использовать
математические
методы

Готфрид Вильгельм Лейбниц

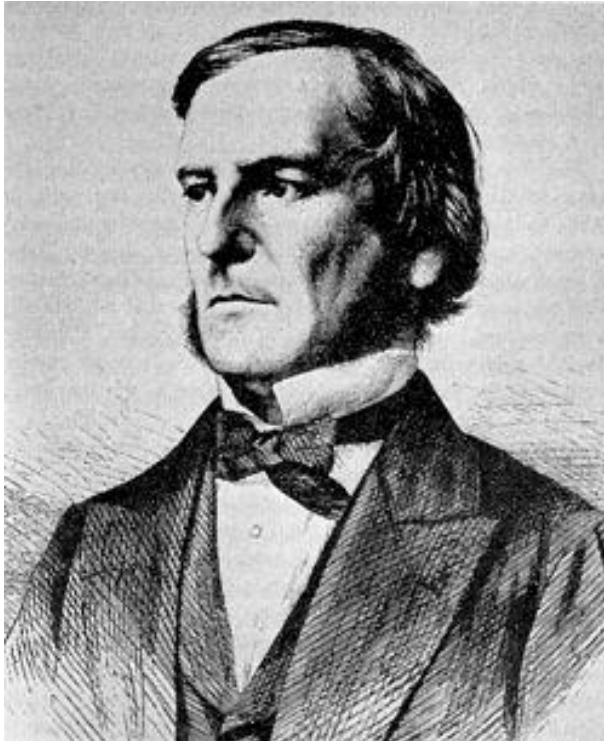


1646 – 1716

Немецкий философ,
логик, математик,
механик, физик, юрист,
историк, дипломат,
языковед и изобретатель

Предложил в логике
использовать двоичную
систему счисления и
математическую
символику

Джордж Буль



1815 – 1864

Английский
математик и логик

Основоположник
математической
логики

«Математический
анализ логики»
1847

Математическая логика

- математизированная
ветвь формальной логики

- *«Логика по предмету,
математика по методу»*

И.Н. Бродский

Пауль Эренфест



1880 – 1933

Австрийский и
нидерландский физик-
теоретик

Член Нидерландской
королевской АН,
член-корреспондент
АН СССР,
иностраннный
член Датской АН

Михаил Гаврилов



1903 – 1979

Советский учёный,
стоявший у истоков
отечественных
информатики и
кибернетики

Создал теорию
релейно-контактных
схем

Логический элемент (вентиль)

- электрическая схема, выполняющая какую-либо логическую операцию (операции) над входными данными, заданными в виде уровней напряжения, и возвращающая результат операции в виде выходного уровня напряжения

Логический элемент

Реализация

```
graph TD; A[Реализация] --> B[КОНТАКТНО-РЕЛЕЙНЫЕ]; A --> C[ЭЛЕКТРОННЫЕ]; B --- D[СХЕМЫ]; C --- D;
```

**КОНТАКТНО-
РЕЛЕЙНЫЕ**

**ЭЛЕКТРОНН
ЫЕ**

**СХЕМ
Ы**

Логический элемент

- электрическая схема, выполняющая какую-либо **логическую операцию** (операции) над **входными данными**, заданными в виде уровней напряжения, и возвращающая **результат операции** в виде выходного уровня напряжения

Логическая операция (функция)

Истинностные значения

- Истина – 1
- Ложь – 0

На входе – набор из 0 и 1

На выходе – 0 или 1

Логический элемент

- Входные данные – в виде **высокого** и **низкого** уровней напряжения на входах

Значения определяются электрическими параметрами схемы и одинаковы как для **ВХОДНЫХ** и для **ВЫХОДНЫХ СИГНАЛОВ**

Положительная логика

- Высокий уровень (замкнутый ключ, светящийся индикатор) = Истина = 1
- Низкий уровень (разомкнутый ключ, не светящийся индикатор) = Ложь = 0

Отрицательная логика –
наоборот

Таблица истинности

Все возможные комбинации входных сигналов и соответствующий каждой комбинации выходной сигнал

Вход X	Вход Y	Выход
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Таблица истинности

$$\begin{array}{c} \text{Количество} \\ \text{о столбцов} \end{array} = \begin{array}{c} \text{Количество} \\ \text{входов} \end{array} + \begin{array}{c} \text{Количество} \\ \text{выходов} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{Количество} \\ \text{о строк} \end{array} = 2 \begin{array}{c} \text{количество} \\ \text{входов} \end{array}$$

Логические элементы

- **НЕ** – инвертирование
- **И** – логическое умножение
- **ИЛИ** – логическое сложение

Инвертор

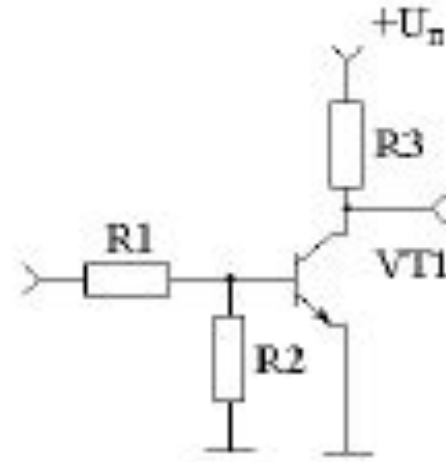
- изменяет значение входного сигнала на прямо противоположное значение

$$F(x) = \bar{x} = \neg x$$

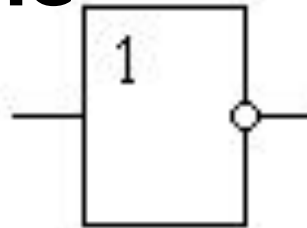
Вход	Выход
0	1
1	0

Инвертор (НЕ)

Реализация



Условно-графическое изображение



Логическое умножение

- **Конъюнктор**

$$F(x, y) = x \wedge y = x \& y = x \cdot y$$

Вход X	Вход Y	Выход
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

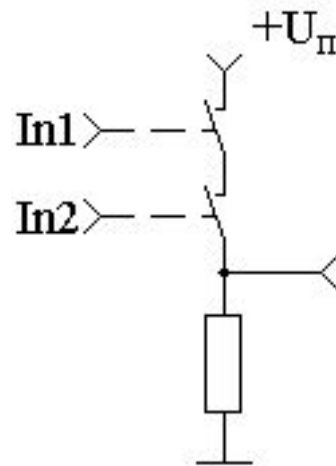
Активный логический уровень

однозначно задает состояние на выходе элемента независимо от логических уровней на остальных входах

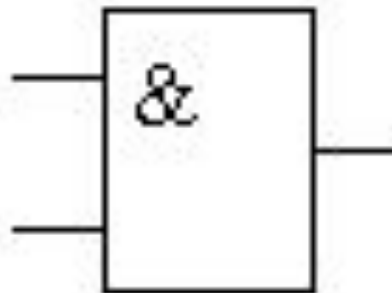
Вход X	Вход Y	Выход
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Логическое умножение (2И)

Реализация



Условно-графическое изображение
(УГО)



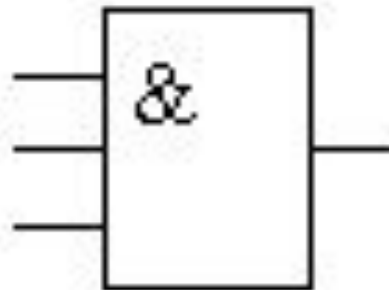
Логическое умножение 3И

$$F(x, y, z) = x \wedge y \wedge z$$

Вход X	Вход Y	Вход Z	Выход
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

Логическое умножение 3И

Условно-графическое изображение



Логическое сложение

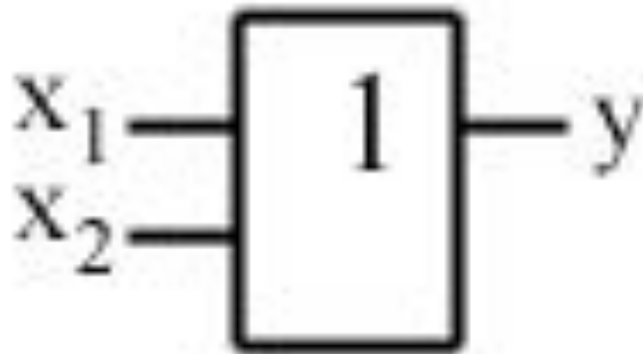
- Дизъюнктор

$$F(x, y) = x \vee y = x + y$$

Вход X	Вход Y	Выход
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Логическое сложение (2ИЛИ)

Условно-графическое
изображение (УГО)



Элемент 2И-НЕ

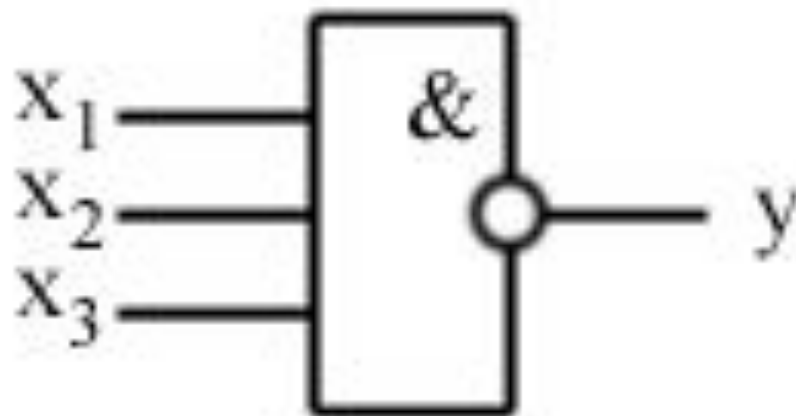
Штрих

Шеффера

$$F(x, y) = \neg(x \wedge y)$$

Вход X	Вход Y	Выход
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Элемент **НИ-НЕ**



3И-НЕ

Элемент 2ИЛИ-НЕ

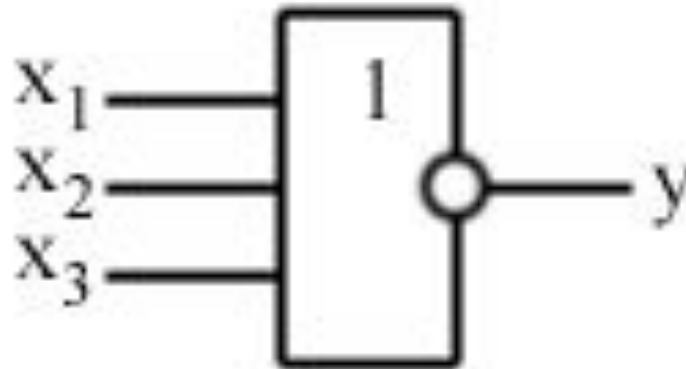
Стрелка

Пирса

$$F(x, y) = \neg(x \vee y)$$

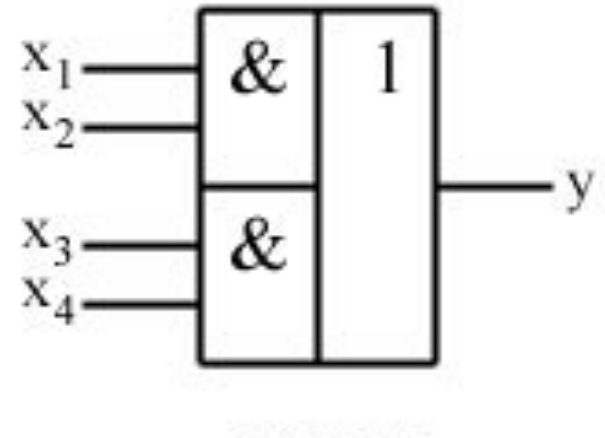
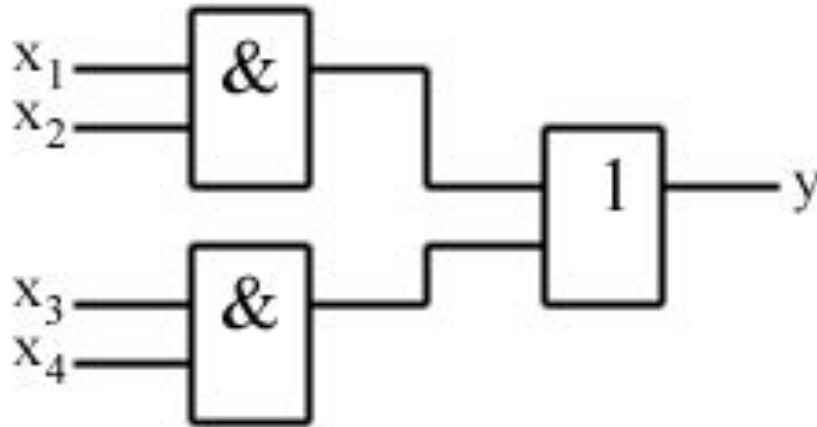
Вход X	Вход Y	Выход
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Элемент **И** ИЛИ-НЕ



ИЛИ-НЕ

Комбинационные элементы

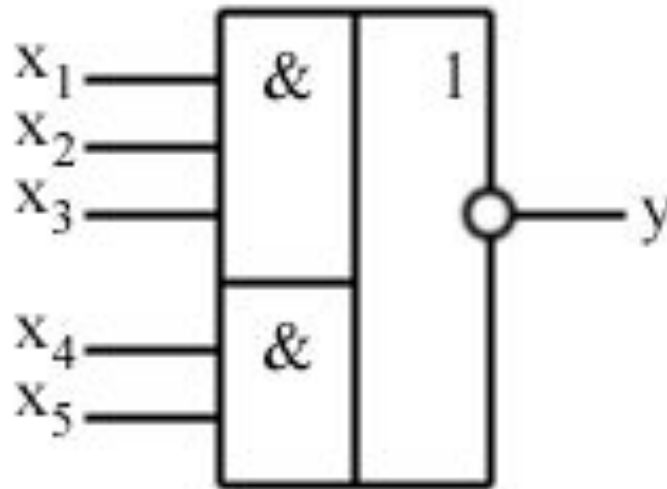


2И-

ИЛИ

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 \cdot x_2 \vee x_3 \cdot x_4$$

Комбинационные элементы



**3-2И-ИЛИ-
НЕ**

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \neg(x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \vee x_4 \cdot x_5)$$

Функционально полная система

Система простых логических функций, на основе которой можно получить **любую** логическую функцию

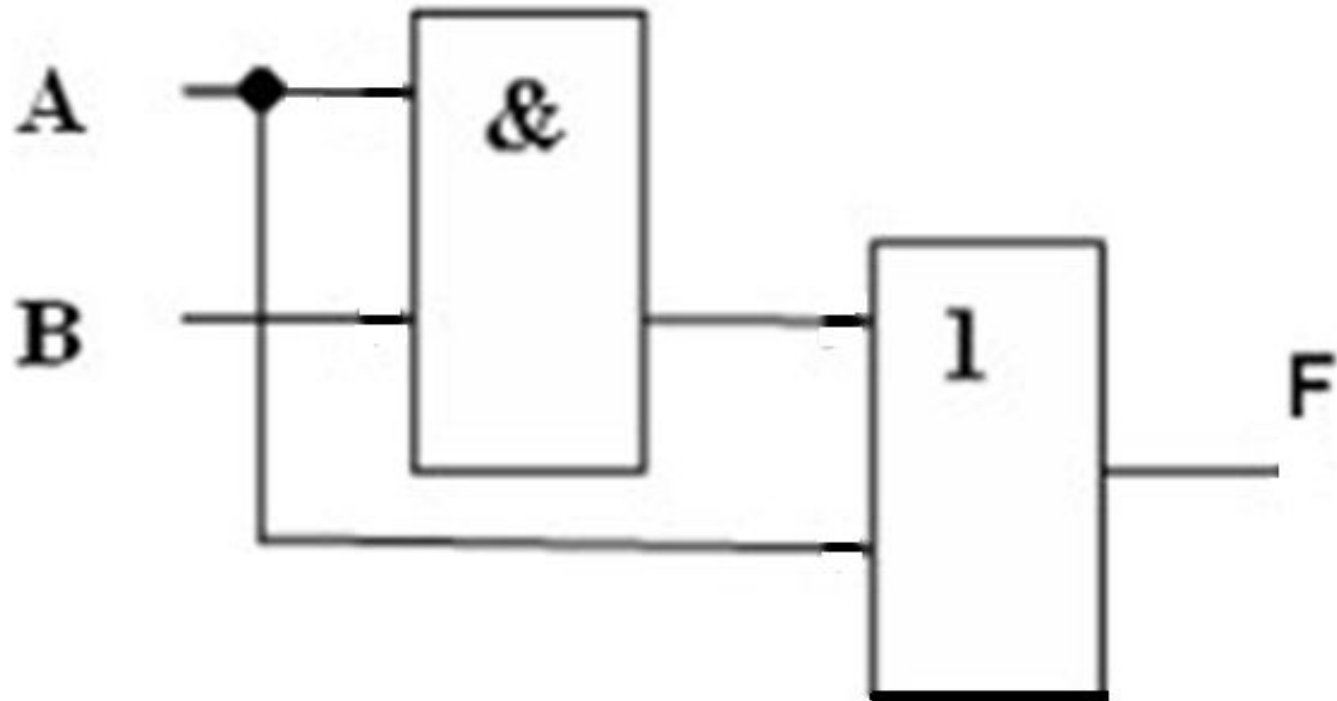
Функционально полные системы

- 2И, 2ИЛИ, НЕ
- 2И, НЕ
- 2ИЛИ, НЕ
- 2И–НЕ
- 2ИЛИ–НЕ



**РЕАЛИЗАЦИЯ
ЦИФРОВЫХ
УСТРОЙСТВ ПО
ЗАДАННЫМ
ФОРМУЛАМ**

$$F = (A \cdot B) \vee A$$



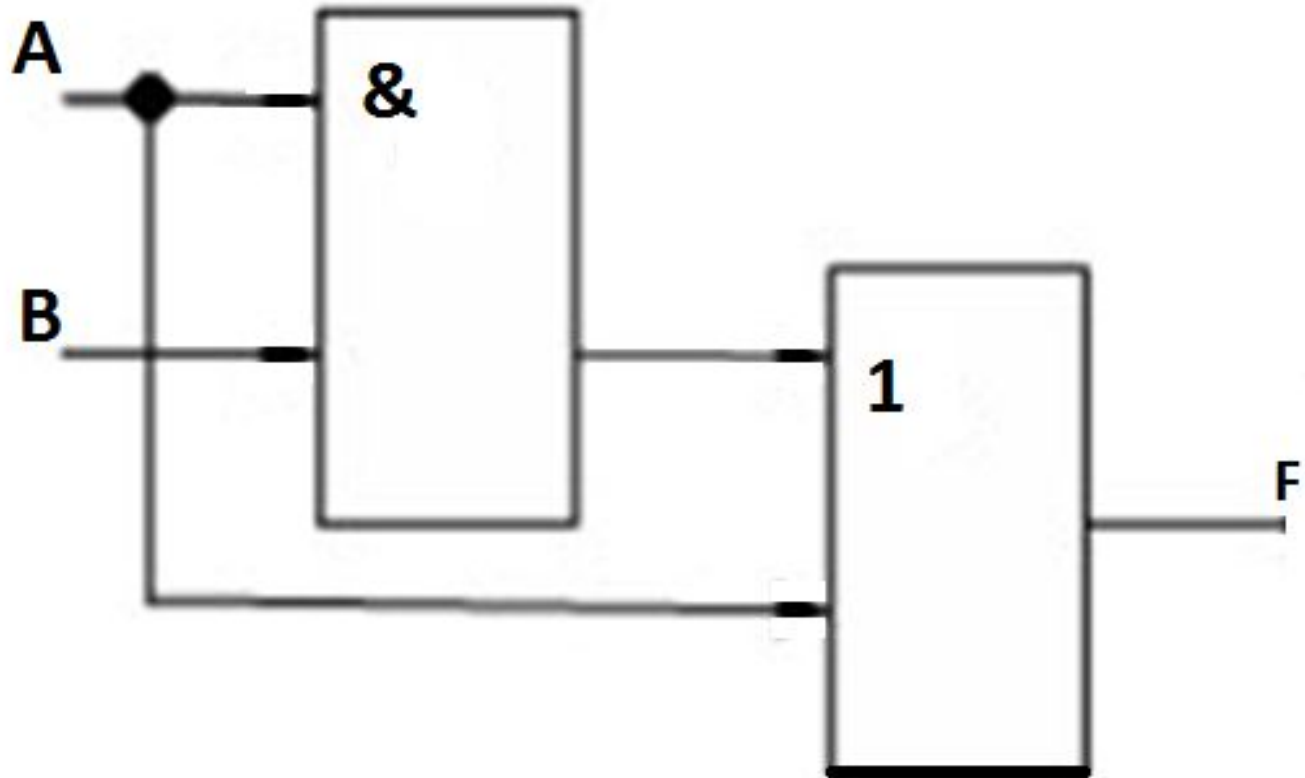
Построение таблиц истинности

1. Определяем количество входов
2. Количество строк в таблице

$$2^{\text{количество входов}}$$

3. Определяем количество действий
4. Количество столбцов в таблице =
количество входов + количество
действий
5. Заполняем таблицу

$$F = (A \cdot B) \vee A$$



$$F = (A \cdot B) \vee A$$

A	B	A·B	F

$$F = (A \cdot B) \vee A$$

A	B	A·B	F
0	0		
0	1		
1	0		
1	1		

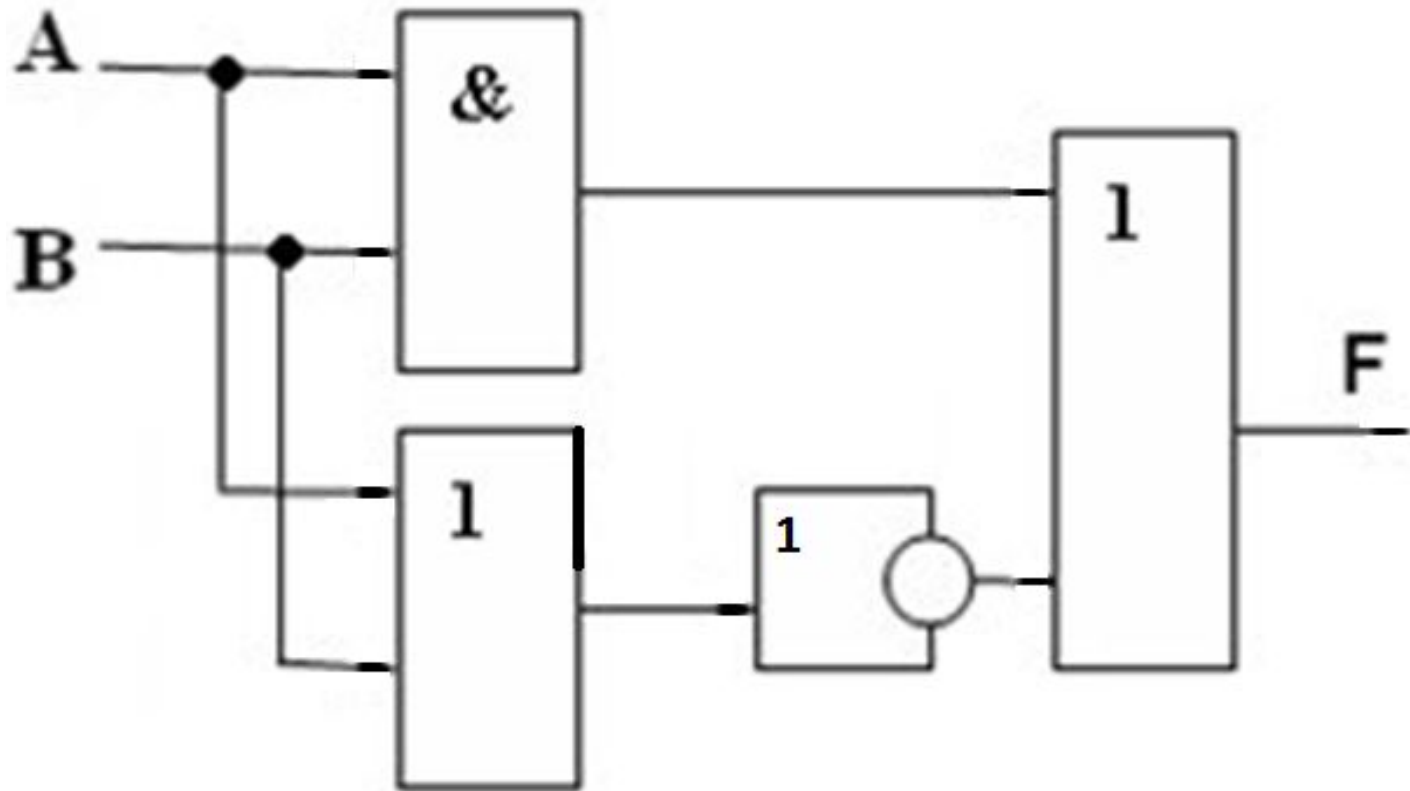
$$F = (A \cdot B) \vee A$$

A	B	A·B	F
0	0	0	
0	1	0	
1	0	0	
1	1	1	

$$F = (A \cdot B) \vee A$$

A	B	A·B	F
0	0	0	0
0	1	0	0
1	0	0	1
1	1	1	1

$$F = (A \cdot B) \vee \neg(A \vee B)$$



$$F = (A \cdot B) \vee \neg(A \vee B)$$

A	B	A·B	A∨B	¬(A∨B)	F

$$F = (A \cdot B) \vee \neg(A \vee B)$$

A	B	A·B	A∨B	¬(A∨B)	F
0	0				
0	1				
1	0				
1	1				

$$F = (A \cdot B) \vee \neg(A \vee B)$$

A	B	A·B	A∨B	¬(A∨B)	F
0	0	0			
0	1	0			
1	0	0			
1	1	1			

$$F = (A \cdot B) \vee \neg(A \vee B)$$

A	B	A·B	A∨B	¬(A∨B)	F
0	0	0	0		
0	1	0	1		
1	0	0	1		
1	1	1	1		

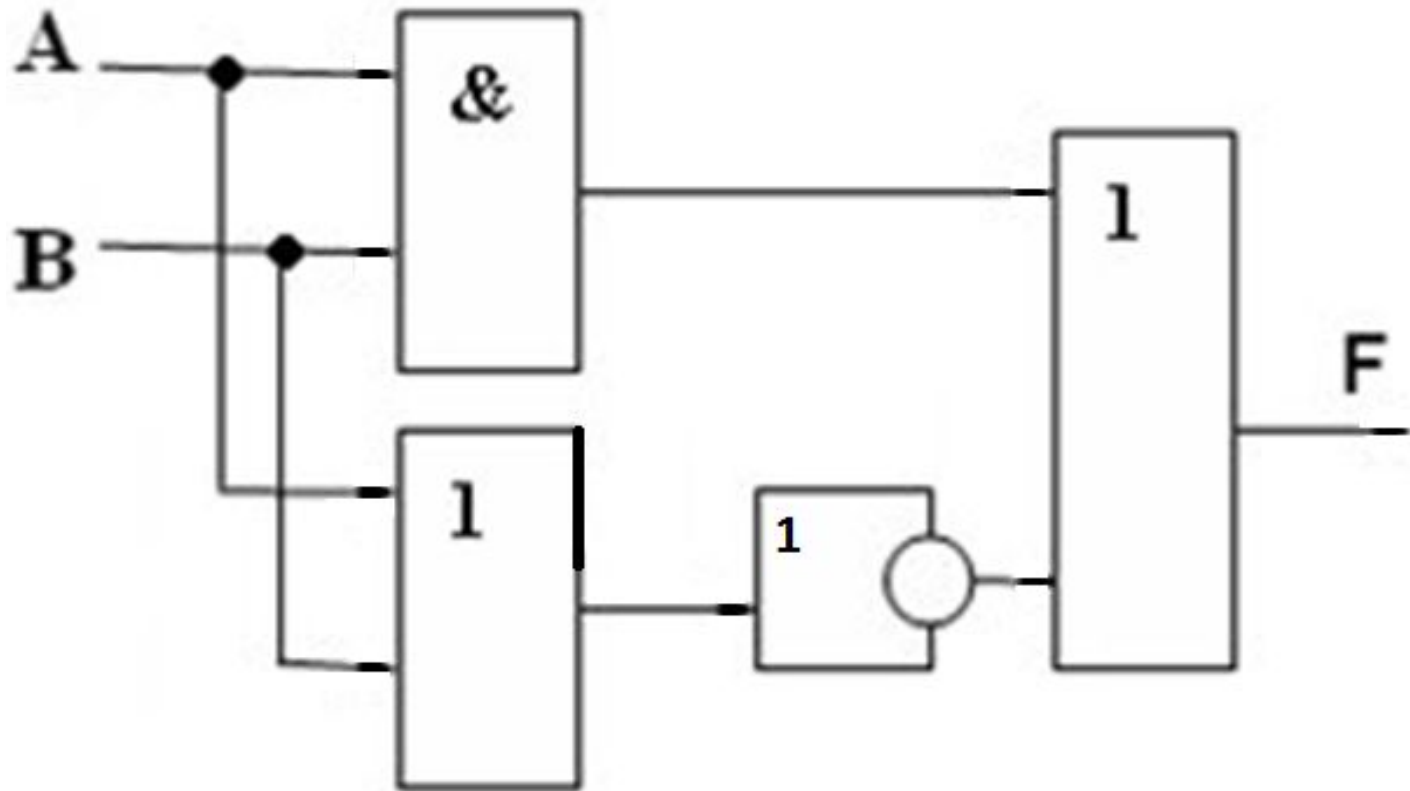
$$F = (A \cdot B) \vee \neg(A \vee B)$$

A	B	A·B	A∨B	¬(A∨B)	F
0	0	0	0	1	
0	1	0	1	0	
1	0	0	1	0	
1	1	1	1	0	

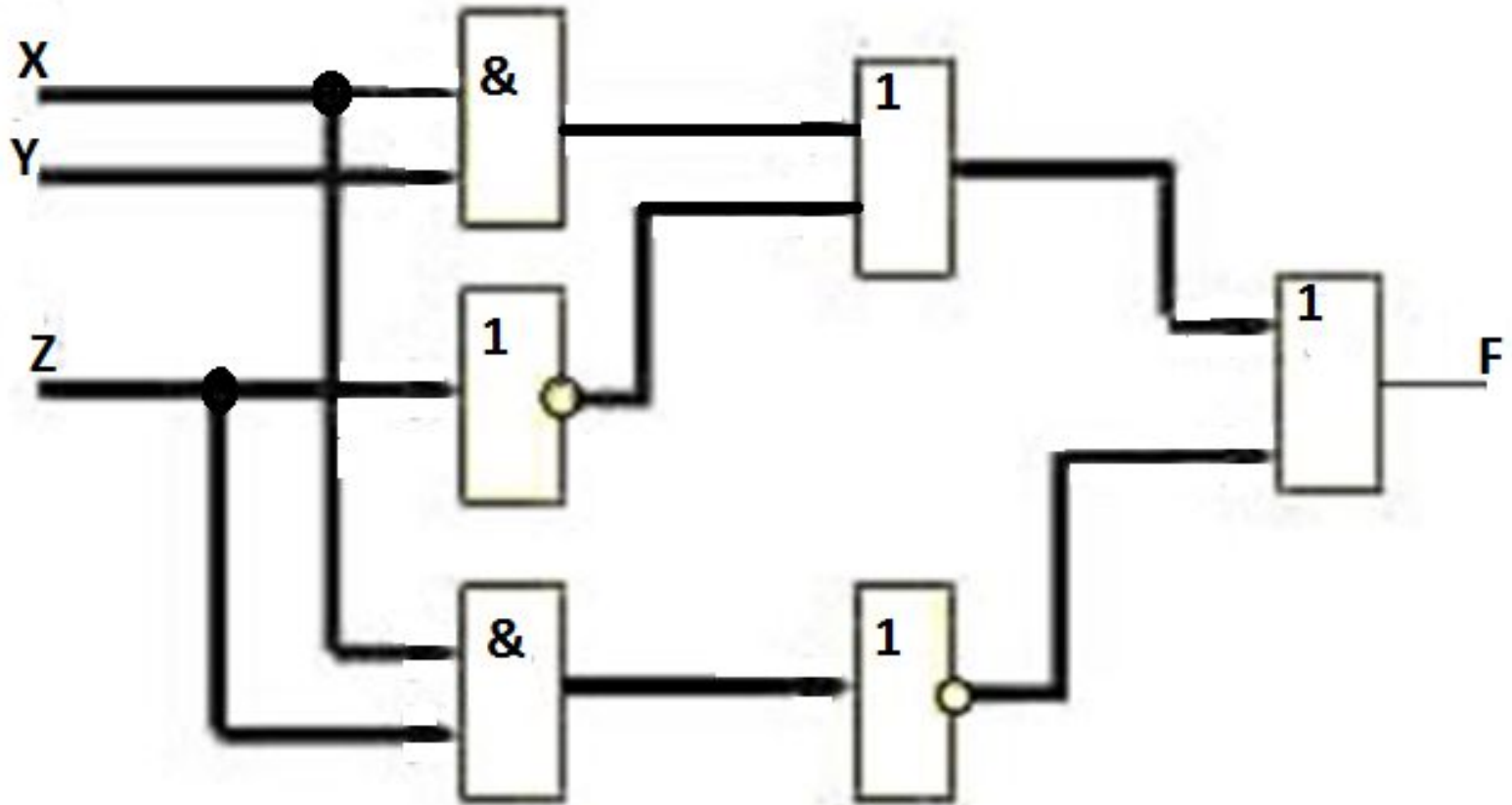
$$F = (A \cdot B) \vee \neg(A \vee B)$$


A	B	A·B	A∨B	¬(A∨B)	F
0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	0	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	0	1

$$F = (A \cdot B) \vee \neg(A \vee B)$$




$$F = (X \cdot Y) \vee \bar{Z} \vee \neg(X \cdot Z)$$






X	Y	Z	XY	He Z	X Z	He XZ	5	F
0	0	0						
0	0	1						
0	1	0						
0	1	1						
1	0	0						
1	0	1						
1	1	0						
1	1	1						




X	Y	Z	XY	He Z	X Z	He XZ	5	F
0	0	0	0					
0	0	1	0					
0	1	0	0					
0	1	1	0					
1	0	0	0					
1	0	1	0					
1	1	0	1					
1	1	1	1					

X	Y	Z	XY	He Z	X Z	He XZ	5	F
0	0	0	0	1				
0	0	1	0	0				
0	1	0	0	1				
0	1	1	0	0				
1	0	0	0	1				
1	0	1	0	0				
1	1	0	1	1				
1	1	1	1	0				




X	Y	Z	XY	He Z	X Z	He XZ	5	F
0	0	0	0	1	0			
0	0	1	0	0	0			
0	1	0	0	1	0			
0	1	1	0	0	0			
1	0	0	0	1	0			
1	0	1	0	0	1			
1	1	0	1	1	0			
1	1	1	1	0	1			



X	Y	Z	XY	He Z	X Z	He XZ	5	F
0	0	0	0	1	0	1		
0	0	1	0	0	0	1		
0	1	0	0	1	0	1		
0	1	1	0	0	0	1		
1	0	0	0	1	0	1		
1	0	1	0	0	1	0		
1	1	0	1	1	0	1		
1	1	1	1	0	1	0		

X	Y	Z	XY	He Z	X Z	He XZ	5	F
0	0	0	0	1	0	1	1	
0	0	1	0	0	0	1	0	
0	1	0	0	1	0	1	1	
0	1	1	0	0	0	1	0	
1	0	0	0	1	0	1	1	
1	0	1	0	0	1	0	0	
1	1	0	1	1	0	1	1	
1	1	1	1	0	1	0	1	



X	Y	Z	XY	He Z	X Z	He XZ	5	F
0	0	0	0	1	0	1	1	1
0	0	1	0	0	0	1	0	1
0	1	0	0	1	0	1	1	1
0	1	1	0	0	0	1	0	1
1	0	0	0	1	0	1	1	1
1	0	1	0	0	1	0	0	0
1	1	0	1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	0	1	0	1	1



**РЕАЛИЗАЦИЯ
ЦИФРОВЫХ
УСТРОЙСТВ ПО
ЗАДАННЫМ
ТАБЛИЦАМ
ИСТИННОСТИ**

Синтез схем



СДНФ

СКНФ

совершенна

я

ДИЗЪЮНКТИВНА

КОНЪЮНКТИВНА

я

нормальная

я

форма

по

по «НОЛЯМ»

«единицам»

Алгоритм (СДНФ)


1. Выбираем наборы переменных, при которых выходное значение равно **1**.
2. Для каждого такого набора записываем **КОНЪЮНКЦИИ** всех переменных, если переменная имеет значение **0**, берём её в инвертированном виде.
3. Полученные конъюнкции объединяем операцией **ДИЗЪЮНКЦИИ**

Алгоритм (СКНФ)

1. Выбираем наборы переменных, при которых выходное значение равно **0**.
2. Для каждого такого набора записываем **ДИЗЪЮНКЦИИ** всех переменных, если переменная имеет значение **1**, берём её в инвертированном виде.
3. Полученные дизъюнкции объединяем операцией **КОНЪЮНКЦИИ**




ЗАДАЧА 1



A	B	C	f
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

A	B	C	f
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1



A	B	C	f
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

A	B	C	f	
0	0	0	0	
0	0	1	1	$\neg A \ \& \ \neg B \ \& \ C$
0	1	0	0	
0	1	1	0	
1	0	0	0	
1	0	1	1	$A \ \& \ \neg B \ \& \ C$
1	1	0	0	
1	1	1	1	$A \ \& \ B \ \& \ C$

Формула

$$\begin{aligned} & (\neg A \ \& \ \neg B \ \& \ C) \ \vee \\ & \vee (A \ \& \ \neg B \ \& \ C) \ \vee \\ & \vee (A \ \& \ B \ \& \ C) \end{aligned}$$

Совершенная дизъюнктивная
нормальная форма (**СДНФ**)

Формула

$$\begin{aligned} & (\neg A \ \& \ \neg B \ \& \ C) \vee \\ & \vee (A \ \& \ \neg B \ \& \ C) \vee \\ & \vee (A \ \& \ B \ \& \ C) \end{aligned}$$

Совершенная дизъюнктивная
нормальная форма

Формула

$$\begin{aligned} & (\neg A \ \& \ \neg B \ \& \ C) \vee \\ \vee & (A \ \& \ \neg B \ \& \ C) \vee \\ & \vee (A \ \& \ B \ \& \ C) \end{aligned}$$

Совершенная **ДИЗЪЮНКТИВНАЯ**
нормальная форма

A	B	C	f
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

A	B	C	f	
0	0	0	0	$A \vee B \vee C$
0	0	1	1	
0	1	0	0	$A \vee \neg B \vee C$
0	1	1	0	$A \vee \neg B \vee \neg C$
1	0	0	0	$\neg A \vee B \vee C$
1	0	1	1	
1	1	0	0	$\neg A \vee \neg B \vee C$
1	1	1	1	

$$\begin{aligned} & (A \vee B \vee C) \& \\ & \& (A \vee \neg B \vee C) \& \\ & \& (A \vee \neg B \vee \neg C) \& \\ & \& (\neg A \vee B \vee C) \& \\ & \& (\neg A \vee \neg B \vee C) \end{aligned}$$

Совершенная конъюнктивная
нормальная форма (**СКНФ**)

$$\begin{aligned} & (A \vee B \vee C) \& \\ & \& (A \vee \neg B \vee C) \& \\ & \& (A \vee \neg B \vee \neg C) \& \\ & \& (\neg A \vee B \vee C) \& \\ & \& (\neg A \vee \neg B \vee C) \end{aligned}$$


Совершенная конъюнктивная
нормальная форма

$$\begin{aligned} & (A \vee B \vee C) \& \\ & \& (A \vee \neg B \vee C) \& \\ & \& (A \vee \neg B \vee \neg C) \& \\ & \& (\neg A \vee B \vee C) \& \\ & \& (\neg A \vee \neg B \vee C) \end{aligned}$$

Совершенная
КОНЪЮНКТИВНАЯ нормальная
форма



ЗАДАЧА



In0	In1	In2	In3	Out0	Out1
0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	1	0
0	0	1	0	0	0
0	0	1	1	0	0
0	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	1
0	1	1	0	1	0
0	1	1	1	0	0
1	0	0	0	0	0
1	0	0	1	0	1
1	0	1	0	0	0
1	0	1	1	0	0
1	1	0	0	1	0
1	1	0	1	0	0
1	1	1	0	0	0
1	1	1	1	0	1

In0	In1	In2	In3	Out0	Out1
0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	1	0
0	0	1	0	0	0
0	0	1	1	0	0
0	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	1
0	1	1	0	1	0
0	1	1	1	0	0
1	0	0	0	0	0
1	0	0	1	0	1
1	0	1	0	0	0
1	0	1	1	0	0
1	1	0	0	1	0
1	1	0	1	0	0
1	1	1	0	0	0
1	1	1	1	0	1

In0	In1	In2	In3	Out0	Out1
0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	1	0
0	0	1	0	0	0
0	0	1	1	0	0
0	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	1
0	1	1	0	1	0
0	1	1	1	0	0
1	0	0	0	0	0
1	0	0	1	0	1
1	0	1	0	0	0
1	0	1	1	0	0
1	1	0	0	1	0
1	1	0	1	0	0
1	1	1	0	0	0
1	1	1	1	0	1

Формула для Out0

$$\begin{aligned} & (\neg x_1 \cdot \neg x_2 \cdot \neg x_3 \cdot x_4) \vee \\ & \vee (\neg x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \neg x_4) \vee \\ & \vee (x_1 \cdot x_2 \cdot \neg x_3 \cdot \neg x_4) \end{aligned}$$

Совершенная дизъюнктивная
нормальная форма (**СДНФ**)

Формула для Out0

$$\begin{aligned} & (\neg x_1 \cdot \neg x_2 \cdot \neg x_3 \cdot x_4) \vee \\ \vee & (\neg x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \neg x_4) \vee \\ \vee & (x_1 \cdot x_2 \cdot \neg x_3 \cdot \neg x_4) \end{aligned}$$

Совершенная дизъюнктивная
нормальная форма (**СДНФ**)

Формула для Out0

$$\begin{aligned} & (\neg x_1 \cdot \neg x_2 \cdot \neg x_3 \cdot x_4) \vee \\ \vee & (\neg x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \neg x_4) \vee \\ \vee & (x_1 \cdot x_2 \cdot \neg x_3 \cdot \neg x_4) \end{aligned}$$

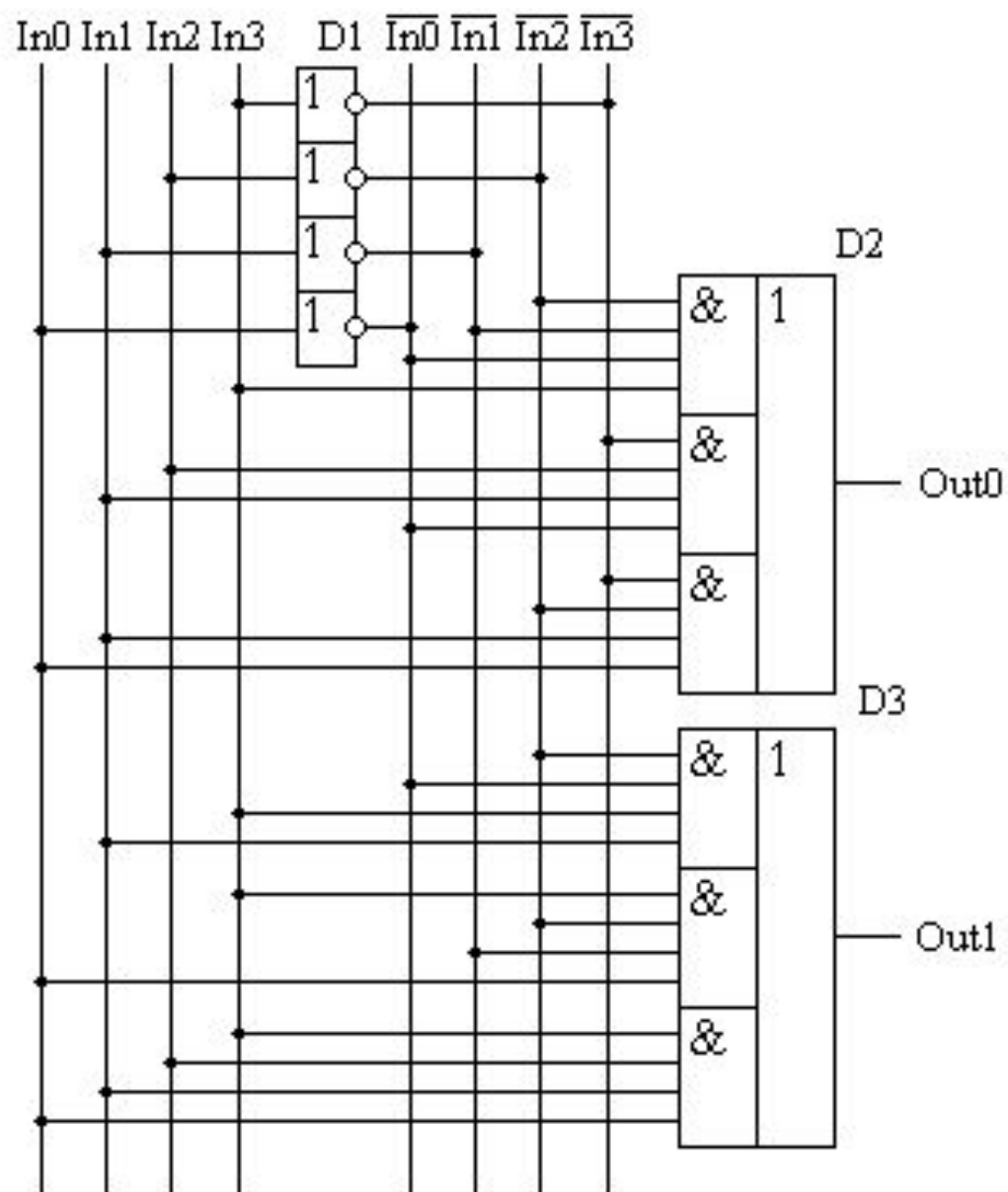
Совершенная **ДИЗЪЮНКТИВНАЯ**
нормальная форма (**СДНФ**)


In0	In1	In2	In3	Out0	Out1
0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	1	0
0	0	1	0	0	0
0	0	1	1	0	0
0	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	1
0	1	1	0	1	0
0	1	1	1	0	0
1	0	0	0	0	0
1	0	0	1	0	1
1	0	1	0	0	0
1	0	1	1	0	0
1	1	0	0	1	0
1	1	0	1	0	0
1	1	1	0	0	0
1	1	1	1	0	1

Формула для Out1


$$\begin{aligned} & (\neg x_1 \cdot x_2 \cdot \neg x_3 \cdot x_4) \vee \\ \vee & (x_1 \cdot \neg x_2 \cdot \neg x_3 \cdot x_4) \vee \\ & \vee (x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4) \end{aligned}$$

Совершенная дизъюнктивная
нормальная форма (**СДНФ**)





8	4	2	1	a	b
0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	1	0
0	0	1	0	0	0
0	0	1	1	0	0
0	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	1
0	1	1	0	1	0
0	1	1	1	0	0
1	0	0	0	0	0
1	0	0	1	0	1
1	0	1	0	0	0
1	0	1	1	0	0
1	1	0	0	1	0
1	1	0	1	0	0
1	1	1	0	0	0
1	1	1	1	0	1



8	4	2	1	a	b
0	0	0	0	1	1
0	0	0	1	0	1
0	0	1	0	1	1
0	0	1	1	1	1
0	1	0	0	0	1
0	1	0	1	0	1
0	1	1	0	1	0
0	1	1	1	0	0
1	0	0	0	0	0
1	0	0	1	0	1
1	0	1	0	0	0
1	0	1	1	0	0
1	1	0	0	1	0
1	1	0	1	0	0
1	1	1	0	0	0
1	1	1	1	0	1