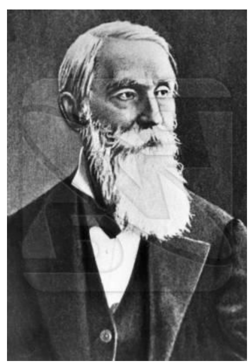
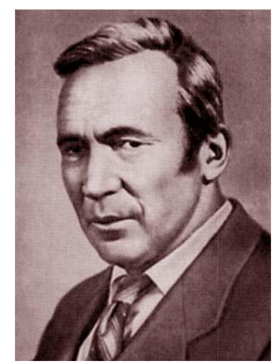
# Теория вероятностей (ТВ)

Изучает закономерности массовых случайных явлений

В современном мире автоматизации производства теория вероятности (Т.В) необходима специалистам для решения задач, связанных с выявлением возможного хода процессов, на которые влияют случайные факторы(например, ОТК: сколько бракованных изделий будет изготовлено). Возникла Т.В. в 17 веке в переписке Б. Паскаля и П. Ферма, где они производили анализ азартных игр. Советские и русские ученые также принимали участие в развитии этого раздела математики: П.Л. Чебышев, А.А. Марков, А.М. Ляпунов, А.Н. Колмогоров.





Под ***случайным событием*** понимается всякое явление, о котором имеет смысл говорить, что оно происходит или не происходит.

# Основные понятия и термины ТВ

- *Наблюдения, опыты и измерения*
- *Испытание* - осуществление каждого отдельного наблюдения, опыта или измерения
- *Комплекс условий* - совокупность условий, при которых выполняется каждое отдельное испытание

# Основные понятия и термины ТВ

- Результат испытания называется *событием*
- <u>*Событие*</u> - любой факт, который может произойти в результате испытания
- События обозначают начальными заглавными буквами латинского алфавита:
- $A, B, C, \ldots$ *или* $A_1, A_2, A_3, \ldots$

# Основные понятия и термины ТВ

- Каждое событие обладает *объективной возможностью наступления*

***Достоверным*** назовем событие которое обязательно произойдет при выполнении определенного количества условий

***Невозможным*** назовем событие которое не происходит при выполнении определенного количества условий

Два события называются ***несовместными***, если появление одного из них исключает появление другого. В противном случае события называются – ***совместными.***

Примеры:

1) При подбрасывании монеты появление цифры исключает одновременное появление герба:

$$\left.\begin{array}{l} A-\textit{появление} \quad \textit{герба} Г, \\ B-\textit{появление} \quad \textit{решки} P, \end{array}\right\} \textit{несовместные} \quad \textit{события}.$$

2) Есть билет лотереи «Русское лото»:

$$\left.\begin{array}{l} A-\textit{билет} \quad \textit{выиграшный}, \\ B-\textit{билет} \quad \textit{невыигрышный}, \end{array}\right\} \textit{несовместные} \quad \textit{события}.$$

# Основные понятия и термины ТВ

- В любом опыте имеется определенное множество возможных исходов ω*i*, *(i = 1, 2,…n)* называемых ***<u>элементарными исходами</u>*** <u>или</u> ***<u>элементарными событиями</u>***
- Все возможные исходы опыта образуют ***<u>пространство</u> Ω элементарных событий (элеметарных исходов)*** этого опыта

# Основные понятия и термины ТВ

- Например, $\Omega_1 = \{\omega_1, \omega_2\} = \{Г, Ц\}$
- - пространство элем. исходов опыта, связанного с подбрасыванием <u>одной</u> монеты;

$$\Omega_2 = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\} = \{ГГ, ГЦ, ЦГ, ЦЦ\}$$

- - пространство элем. исходов опыта, связанного с подбрасыванием <u>двух</u> монет

# Основные понятия и термины ТВ

- Событие

$$A = \{\textit{выпадение "герба"}\} = \{\omega_1\} = \{Г\}$$

- \- подпространство пространства $\Omega_1$
- Событие

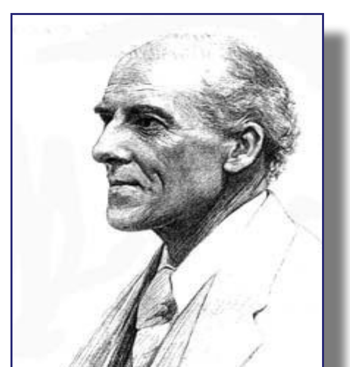
$$B = \{\textit{хотя бы один "герб"}\} = \{\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3\} = \{ГГ,\ ГЦ,\ ЦГ\}$$

- \- подпространство пространства $\Omega_2$

Оказывается, что при многократном повторении опыта частота события принимает значения, близкие к некоторому постоянному числу. Например, при многократном бросании игральной кости частота выпадения каждого из чисел очков от 1 до 6 колеблется около числа $\frac{1}{6}$.

Многократно проводились опыты бросания однородной монеты, в которых подсчитывали число появления «герба», и каждый раз, когда число опытов достаточно велико, частота события «выпадения герба» незначительно отличалась от $\frac{1}{2}$.

для наглядности рассмотрим таблицу результатов, полученных в 18 веке французским естествоиспытателем *Жоржем Луи Леклерк Бюффоном*(1707 – 1788) и в начале 20 века – английским статистиком *Карлом Пирсоном*(1857 – 1936).



| Экспериментатор | Число бросаний | Число выпадений герба | Частота |
|---|---|---|---|
| Ж. Бюффон | 4040 | 2048 | 0,5080 |
| К. Пирсон | 12000 | 6014 | 0,5016 |
| К. Пирсон | 24000 | 12012 | 0,5006 |

# Виды событий в ТВ

- В зависимости от объективной возможности наступления:
- *1. Достоверное*

$$A = U$$

- *2. Невозможное*

$$A = V$$

- *2. Случайное*

$$A, B, C, \ldots$$ или $$A_1, A_2, \ldots, A_n$$

# Виды случайных событий

- *1. <u>Простое</u>* - не может быть разложено на составляющие.
- Например:
- Событие $A = \{\quad\}$ - при бросании монеты;
- Событие $B = \{2\}$ - при бросании игральной кости;
- Событие $C = \{\Delta > 0\}$ - при измерениях ( $\Delta$ - случайная ошибка измерений)

# Виды случайных событий

- *2. <u>Сложное</u> (составное) событие* - описывается несколькими простыми событиями.
- Например: событие

$$C = \{\textit{нечетная цифра}\} = \{1, 3, 5\}$$

- - при бросании игральной кости

# Виды сложных событий

- а) *<u>Логическая сумма</u>* *(объединение)* простых событий – сложное событие, которое заключается в наступлении *<u>хотя бы одного</u>* из нескольких событий.
- Например:
- 1) $S_1 = \{\text{четная цифра}\} = \{2,4,6\}$
- 2) $S_2 = \left\{\begin{matrix}\text{появление хотя бы одной} \\ \text{положительной случайной} \\ \text{ошибки при двух измерениях}\end{matrix}\right\}$

# Виды сложных событий

- Общепринятая запись суммы (объединения) *двух* событий:

$$\boxed{S = A_1 \cup A_2} \quad \text{или} \quad S = A_1 + A_2$$

- что означает:

$$S = \{A_1, \text{или } A_2, \text{или } A_1 \text{ и } A_2\}$$

- $\cup$ *- символ логического сложения.*

# Виды сложных событий

- Сумма (объединение) *трех* событий:
- $S = A_1 \cup A_2 \cup \grave{A}_3$ или $S = A_1 + A_2 + A_3$ ,
- что означает:

$$S = \left\{ \begin{array}{l} \grave{e}\ddot{e}\grave{e}\ \grave{A}_1, \grave{e}\ddot{e}\grave{e}\ \grave{A}_2, \grave{e}\ddot{e}\grave{e}\ \grave{A}_3, \grave{e}\ddot{e}\grave{e}\ \grave{A}_1\grave{e}\grave{A}_2, \\ \grave{e}\ddot{e}\grave{e}\ \grave{A}_1\grave{e}\grave{A}_3, \grave{e}\ddot{e}\grave{e}\ \grave{A}_2\grave{e}\grave{A}_3, \grave{e}\ddot{e}\grave{e}\ \grave{A}_1\grave{e}\grave{A}_2\grave{e}\grave{A}_3 \end{array} \right\}$$

# Виды сложных событий

- б) *Логическое произведение* *(пересечение)* простых событий - сложное событие, которое заключается *в совместном наступлении одновременно или последовательно друг за другом* нескольких событий.

# Виды сложных событий

- Например, событие

$$П_1 = \{выпадение\ цифры\ 6\ на\ обеих\ костях\}$$

- - при бросании двух игральных костей.

- Или событие

$$П_2 = \left\{\begin{matrix} появление\ двух\ положительных \\ случайных\ ошибок \\ при\ двух\ измерениях \end{matrix}\right\}$$

# Виды сложных событий

- Общепринятая запись произведения (пересечения):
- $\boxed{\ddot{I} = A_1 \boxtimes A_2 \boxtimes \grave{A}_3}$ или $\boldsymbol{П = A_1 A_2 A_3}$ ,
- что означает:
- $$\boldsymbol{П = \left\{ и A_1, и A_2, и A_3 \right\}}$$ ;
- $\boxtimes$ *- символ логического умножения.*

# Виды случайных событий (продолжение)

- 3. *Равновозможные события* – имеют одинаковую объективную возможность наступления при данном комплексе условий.
- Например, события:

$$\left.\begin{aligned} A &= \{\quad\} \\ B &= \{\quad\} \end{aligned}\right\} - \text{равновозможны}$$

при бросании монеты

# Виды случайных событий

- События

$$\left.\begin{array}{l} A_1 = \{1\} \\ A_2 = \{2\} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ A_6 = \{6\} \end{array}\right\} - \text{равновозможны}$$

при бросании игральной кости ;

# Виды случайных событий

- События
- $C=\{\Delta>0\}$ и $D=\{\Delta<0\}$ ,

- где $\Delta$ - случ. ошибка измерений, - равновозможны при однократном измерении некоторой величины.

# Виды случайных событий

- *4. <u>Единственно возможные</u> события* – такие, когда в результате испытания может произойти <u>одно и только одно</u> из этих событий
- Так, в предыдущих примерах события $A_i$ единственно возможны, равно как и события *C* и *D*
- Система единственно возможных событий данного опыта образует *<u>пространство</u>* $\Omega$ *<u>элементарных событий</u>* этого опыта

# Виды случайных событий

- *5. <u>Независимые и зависимые</u> события* – такие, у которых объективная возможность появления не зависит или зависит от того, появилось или нет другое событие.

# Виды случайных событий

- <u>Система</u> единственно возможных несовместных событий называется *<u>полной группой</u> событий*.
- Так события
- $A=\{Г\}$ и $B=\{Ц\}$ при одном бросании монеты составляют полную группу событий,
- равно как и события $A_1, A_2, ..., A_6$
- при бросании игральной кости.

# Виды случайных событий

- 6. *Противоположные события* – два простых или сложных события, образующих полную группу.

- Событие, противоположное событию ***A*** обозначается $\overline{A}$

# Виды случайных событий

- Так, противоположны события:
- $A = \{Г\}$ и $\overline{A} = \{Ц\}$ ;
- $A = \{2, 4, 6\}$ и $\overline{A} = \{1, 3, 5\}$ ;
- $A = \{3\}$ и $\overline{A} = \{1, 2, 4, 5, 6\}$

- Конечное число несовместных равновозможных событий, образующих полную группу, называются *случаями, шансами, элементарными исходами* опыта.
- Например, при бросании монеты возможны только два элементарных исхода: **Г** - “*герб”* и **Ц** *- “цифра*”, а при бросании игральной кости – шесть, а именно: ***1, 2, 3, 4 , 5, 6***.

- Про опыт говорят, что он сводится или не сводится к схеме случаев (шансов, элементарных исходов).
- Элементарный исход называется *благоприятствующим* данному событию, если его осуществление влечет за собой наступление этого события.

- Например, в опыте

$$\Omega_1 = \{\omega_1, \omega_2\} = \{\text{Г}, \text{Ц}\}$$

- выпадению герба благоприятствует один исход (Г);
- В опыте

$$\Omega_2 = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\} = \{\text{ГГ}, \text{ГЦ}, \text{ЦГ}, \text{ЦЦ}\}$$

- выпадению хотя бы одного герба благоприятствуют три исхода (ГГ,ГЦ,ЦГ)

- Численная мера объективной возможности появления события называется ***<u>вероятностью</u>*** события.

- Вероятность – важнейшая характеристика случайного события.

- Существует несколько определений вероятности, мы рассмотрим два из них: классическое и статистическое.

# Классическое определение вероятности

- Оно не связано с проведением опытов, т.е. вероятность события определяется исходя лишь *из условий опыта*.
- Но при этом необходимо, чтобы возможные исходы опыта составляли схему случаев, т.е. были бы все равновозможны, несовместны, образовывали полную группу и их число должно быть конечным.

# Классическое определение вероятности

- Тогда вероятность события может быть получена по формуле

$$\boxed{P = \frac{M}{N}} \qquad (I)$$

- где ***N*** – общее число возможных элементарных исходов опыта;
- ***M*** – число исходов опыта, благоприятствующих наступлению интересующего нас события.

# Классическое определение вероятности

- Согласно формулы *( I ),*
- *При одном бросании монеты:*
  - *P(Г) = 1/2.*
- *При одном бросании игральной кости:*
- *P(6) = 1/6;*
- *P{четная цифра} = 3/6 = 1/2.*

# Классическое определение вероятности

- В формуле (I) $M \leq N$
- или $0 \leq M \leq N$,
- т.е.

$$\boxed{0 \leq P \leq 1}$$

- Т.о. предельное числовое значение вероятности вообще есть ***единица***.

# Классическое определение вероятности

- При $M = N$ имеем $\boxed{P(\Omega) = 1}$
- *- вероятность достоверного события равна единице.*

- При $M = 0$ имеем $\boxed{P(V) = 0}$
- *- вероятность невозможного события равна нулю.*

- При $0 < M < N$ имеем $\boxed{0 \leq P < 1}$
- - вероятность случайного события может изменяться в пределах от нуля до единицы, не достигая их.

# Классическое определение вероятности

- Обозначим $P(A) = p$ и , $P(\bar{A}) = q$
- Тогда $\boxed{p + q = 1}$ , т.к.
- $$\frac{M}{N} + \frac{N-M}{N} = 1$$ ,
- т.е. сумма вероятностей <u>противоположных</u> событий равна единице.

# Классическое определение вероятности

- ***Недостаток:*** опыты редко сводятся к схеме случаев и чаще всего нарушается требование равновозможности исходов.
- Поэтому формула ***( I )*** имеет ограниченное (но достаточно широкое ) применение.

# Статистическое определение вероятности

- Связано с проведением опытов и с понятием *относительной частоты* **Q** – *частости*- появления интересующего нас события в опытах:
- $$\boxed{Q = \frac{k}{n}}\quad,$$
- где ***n*** – число испытаний;
- ***k*** – число появлений события в этих испытаниях (абсолютная частота).

# Статистическое определение вероятности

- Свойство устойчивости относительной частоты в опытах отражено в теореме Бернулли:

$$P\left\{\left|\frac{k}{n}-p\right|<\varepsilon\right\}=1-\delta$$

- где $\varepsilon$ и $\delta$ - бесконечно малые числа.
- Или

$$\lim_{n\to\infty}\frac{k}{n}=p$$

# Статистическое определение вероятности

- На основании теоремы Бернулли : *вероятность – это* *<u>предел</u>**, к которому стремится относительная частота* ***Q*** *события при неограниченном увеличении числа испытаний.*

# Статистическое определение вероятности

- Практически статистическая вероятность может быть найдена *по* *<u>приближенной</u>* формуле

$$\boxed{P \approx \frac{k}{n}} \quad \text{(II)}$$

# Статистическое определение вероятности

- <u>Недостаток</u> - необходимость выполнения бесконечного числа опытов или достаточно большого их числа, что не всегда возможно, а чаще вообще невозможно.

- Формулы ***( I )*** и ***( II )*** выражают *прямые* способы определения вероятностей случайных событий.
- Они являются главными, но не основными.
- Основными следует считать *косвенные способы*.

# Косвенные способы вычисления вероятностей

- Позволяют по известным вероятностям одних событий вычислять вероятности других, с ними связанных.
- Это сводит необходимый эксперимент к минимуму.
- Вся ТВ есть система таких косвенных способов.

# Косвенные способы вычисления вероятностей

- К ним относятся:
- - теоремы (аксиомы) ТВ;
- - формула полной вероятности;
- - формула Байеса;
- - формула Бернулли;
- - формула использования вероятности противоположного события и др.

# Задачи по теме:
# «Вероятность. Понятие события и вероятности события»

**1.** В урне 3 белых и 9 черных шаров. Из урны наугад вынимается 1 шар. Какова вероятность того, что вынутый шар окажется белым?

***<u>Решение:</u>***

Количество всех возможных результатов $n=3+9=12$.

Опытов, в результате которых может быть вынут белый шар $m=3$.

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}<1.$$

Ответ: 0, 25

**2.** Брошена игральная кость. Какова вероятность событий:
***А***- выпало 1 очко; ***В***- выпало 2 очка?

***<u>Решение:</u>***

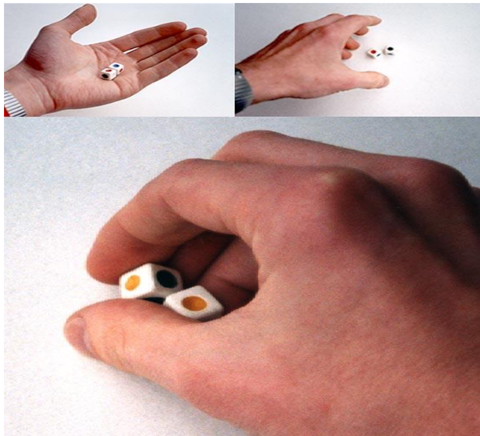
Количество всех возможных результатов *n=6* (все грани).

а) Количество граней, на которых всего 1 очко *m=1:*

$$P(A)=\frac{1}{6}<1,$$

б) количество граней, на которых всего 2 очка *m=1:*

$$P(B)=\frac{1}{6}<1.$$

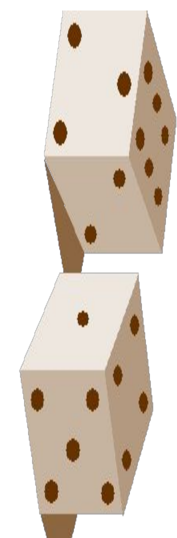


Ответ: $\frac{1}{6}$ и $\frac{1}{6}$

**3.** Брошены 2 игральные кости. Какова вероятность событий: ***А***- выпадения в сумме не менее 9 очков; ***В***- выпадения 1 очка по крайней мере на одной кости?

***Решение:***

| I<br>II | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | |
| 2 | | | | | | |
| 3 | | | | | | |
| 4 | | | | | | |
| 5 | | | | | | |
| 6 | | | | | | |



Получили, что возможно *n=36* результатов испытаний

Для события ***A*** получаем:

| I<br>II | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | |
| 2 | | | | | | |
| 3 | | | | | | |
| 4 | | | | | | |
| 5 | | | | | | |
| 6 | | | | | | |

*m=10:* $$P(A) = \frac{10}{36} = \frac{5}{18} < 1,$$

Для события ***B*** получаем:

| I<br>II | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | |
| 2 | | | | | | |
| 3 | | | | | | |
| 4 | | | | | | |
| 5 | | | | | | |
| 6 | | | | | | |

*m=11:*

$$P(B) = \frac{11}{36} < 1.$$

Ответ: $\frac{5}{18}$ ; $\frac{11}{36}$.

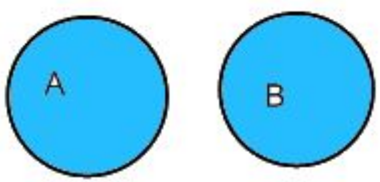
# Основные теоремы ТВ

- Используются для вычисления вероятностей сложных событий.
- Их две – теорема сложения вероятностей и теорема умножения вероятностей.
- Строго могут быть доказаны только для событий, сводящихся к <u>схеме случаев</u>.
- Для других событий применяются как <u>*аксиомы, принципы, постулаты*</u>.

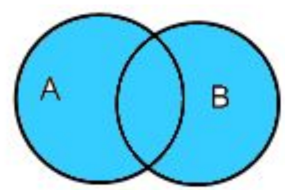
# Теорема сложения вероятностей

- Суммой событий называется сложное событие, состоящее в наступлении хотя бы одного из этих событий.

$$S = A \cup B$$




Сумма двух несовместных событий



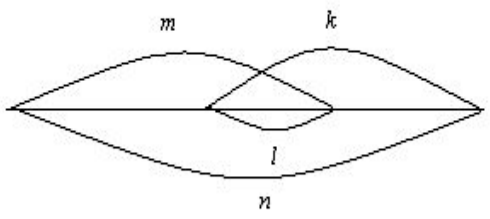

Сумма двух совместных событий

# Теорема сложения вероятностей

- <u>Теорема</u>: *Вероятность суммы двух или нескольких совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления,* т.е.

$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)}$$

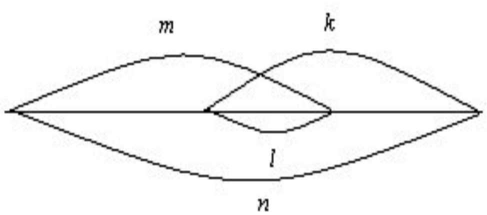
# Теорема сложения вероятностей




- Доказательство:
- ***n*** – общее число всех возможных исходов опыта;
- ***m -*** благоприятствуют наступлению события ***A***;
- ***k*** –благоприятствуют наступлению события ***B***;
- ***l*** исходов благоприятствуют одновременно событиям ***A*** и ***B.***

# Теорема сложения вероятностей

- Очевидно, что событию $A \cup B = A + B$ благоприятствуют все $n = m + k - l$ исходов.




Запишем вероятности этих событий:

$$P(A) = \frac{m}{n}, \quad P(B) = \frac{k}{n},$$

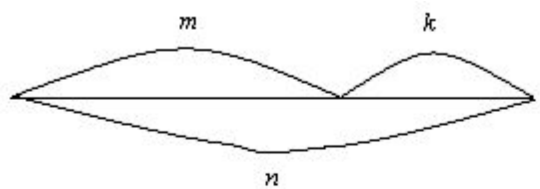
$$P(AB) = \frac{l}{n}, \quad P(A \cup B) = \frac{m + k - l}{n}$$

Или

$$P(A \cup B) = \frac{m}{n} + \frac{k}{n} - \frac{l}{n} = P(A) + P(B) - P(AB)$$

Ч.т.д.

# Теорема сложения вероятностей




- Для несовместных событий $l = 0$.
- В этом случае

$$\boxed{P(A+B)=P(A)+P(B)}$$

т.е. вероятность суммы несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий.

Следствие. Сумма вероятностей событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$, образующих полную группу, равна единице - как вероятность достоверного события:

$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = P(U) = 1$$

# Теорема сложения вероятностей

- <u>Задача 1. </u>В лотерее 1000 билетов. На один билет падает выигрыш в 500 рублей, на 10 по 100 рублей, на 50 – по 20 рублей и на 100 – по 5 рублей. Какова вероятность выиграть на один билет:
- а) не менее 20 рублей;
- б) любую сумму денег?

# Теорема сложения вероятностей

- <u>Решение:</u> Обозначим события:

$$A_1 = \{\text{âûèãðûø 500 ð.í àî äèí áèëåò}\};$$

$$A_1 = \{\text{âûèãðûø 100 ð.í àî äèí áèëåò}\};$$

$$A_1 = \{\text{âûèãðûø 20 ð.í àî äèí áèëåò}\};$$

$$A_1 = \{\text{âûèãðûø 5 ð.í àî äèí áèëåò}\}.$$

- Найдем вероятности этих простых событий по формуле $P = \dfrac{M}{N}$

# Теорема сложения вероятностей

$$P(A_1)=\frac{1}{1000}=0.001;\quad P(A_2)=\frac{10}{1000}=0.010;$$

$$P(A_3)=\frac{50}{1000}=0.050;\quad P(A_4)=\frac{100}{1000}=0.100.$$

# Теорема сложения вероятностей

- Введем обозначения для интересующих нас событий:

$$\hat{A} = \left\{ \text{âû èãðû ø í å ì åí åå 20 ð.} \right\} = \grave{A}_1 \,\square\, \grave{A}_2 \,\square\, \grave{A}_3 = \grave{A}_1 + \grave{A}_2 + \grave{A}_3$$

- \- сумма 3-х несовместных событий;

$$\tilde{N} = \left\{ \text{âû èãðû ø ëp áî é ñõî ì û} \right\} = \left\{ A_1 \,\square\, A_2 \,\square\, A_3 \,\square\, A_4 \right\} =$$

$$= A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = B + A_4$$

- \- сумма 4-х несовместных событий.

# Теорема сложения вероятностей

- Вычислим вероятности этих событий по тереме сложения вероятностей несовместных событий:

$$P(B) = P(A_1 + A_2 + A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) =$$

$$= 0.001 + 0.010 + 0.050 = 0.061;$$

$$P(C) = P(A_1 + A_2 + A_3 + A_4 =$$

$$= P(B) + P(A_4) = 0.061 + 0.100 = 0.161.$$

# Условие независимости событий

- Два события называются ***независимыми***, если вероятность появления одного из них не зависит от того, произошло или нет другое событие.

# Условие независимости событий

- Вероятность события, вычисленная в предположении, что одно или несколько событий к этому моменту уже произошли, называется *условной вероятностью* этого события и обозначается:
- $P(A/B)$ условная вероятность события ***A*** относительно события ***B***;
- $P(\hat{A}/\grave{A})$ - условная вероятность события ***B*** относительно события ***A***.

# Условие независимости событий

- События ***A*** и ***B*** независимы, если их условные вероятности равны “безусловным”,т.е. тот факт, что событие ***B*** произошло к моменту вычисления вероятности события ***A***, <u>*не изменил*</u> вероятности последнего события.

# Условие независимости событий

- Аналитическая запись *условия независимости событий*:

$$P(A/B) = P(A)$$

или

$$P(B/A) = P(B)$$

# Условие независимости событий

- Условная вероятность события может быть получена по формуле

$$P(A/B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

- Ясно, что если событие ***A*** не зависит от события ***B,*** то и событие ***B*** не зависит от ***A*** и наоборот.

# Условие независимости событий

- <u>Задача</u> . Из колоды карт в 36 листов берут наугад одну карту. Рассмотреть события:

$$\text{À} = \left\{\text{ïîÿâëåíèå òóçà}\right\}$$

$$\text{Â} = \left\{\text{ïîÿâëåíèå êàðòû ÷åðíîé ìàñòè}\right\}$$

$$\text{Ñ} = \left\{\text{ïîÿâëåíèå òóçà ïèê}\right\}$$

- Определить их парную независимость (или зависимость).

# Условие независимости событий

- <u>Решение</u>. Вычислим “безусловные” вероятности событий:

$$P(A)=\frac{4}{36}=\frac{1}{9};\quad P(B)=\frac{18}{36}=\frac{1}{2};\quad P(C)=\frac{1}{36}.$$

- Вычислим необходимые условные вероятности:

$$P(A/B)=\frac{2}{18}=\frac{1}{9};\ P(A/C)=1;\ P(B/C)=1.$$

# Условие независимости событий

- <u>Выводы:</u>
- 1. $P(A/B) = P(A)$ , следовательно, события ***A*** и ***B*** независимы.
- 2. $P(A/\tilde{N}) \neq P(A)$ , следовательно, события ***A*** и ***C*** зависимы.
- 3. $P(\hat{A}/\tilde{N}) \neq P(\hat{A})$ , следовательно, события ***B*** и ***C*** зависимы.

# Условие независимости событий

- Задача . Зависимы или нет противоположные события?
- *Решение*. Запишем условие независимости для противоположных событий:

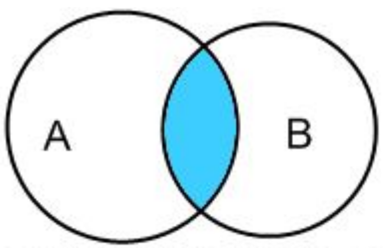
$$P(A/\overline{A}) = P(A).$$

- А - случайное событие.
- Его вероятность $P(A) = p \neq 0.$
- Но $P(A/\overline{A}) = 0$ т.к. $A$ и $\overline{A}$ не совместны в одном испытании.
- Вывод: события зависимы, т.к. $P(A/\overline{A}) \neq P(A)$

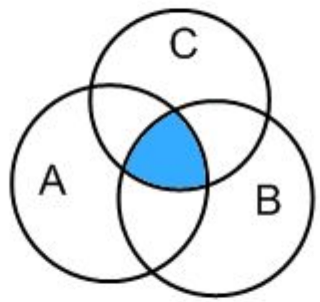
# Теорема умножения вероятностей

- Произведением двух или нескольких событий называется сложное событие, состоящее в совместном появлении *одновременно или последовательно одно за другим* всех этих событий.

$$\Pi = A \cap B$$




Произведение двух событий



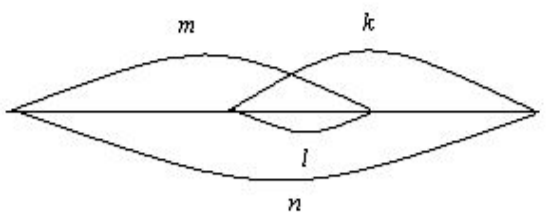

Произведение трех событий

# Теорема умножения вероятностей

- <u>Теорема. </u>Вероятность произведения двух зависимых событий равна произведению безусловной вероятности одного из них на условную вероятность другого т.е.

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A)P(B/A).}$$

# Теорема умножения вероятностей




- Доказательство:
- ***n*** – общее число всех возможных исходов опыта;
- ***m -*** благоприятствуют наступлению события ***A***;
- ***k*** –благоприятствуют наступлению события ***B***;
- ***l*** исходов благоприятствуют одновременно событиям ***A*** и ***B.***

# Теорема умножения вероятностей

- Запишем вероятности этих событий:

$$P(A)=\frac{m}{n},\quad P(B)=\frac{k}{n},\quad P(AB)=\frac{l}{n}.$$

- Условная вероятность события ***B***:

$$P(B/A)=\frac{l}{m}$$

- Подставив все эти вероятности в доказываемую формулу, получим тождество:

$$\frac{l}{n}=\frac{m}{n}\frac{l}{m};\quad \frac{l}{n}=\frac{l}{n},$$

- что и подтверждает правильность доказываемой формулы.

# Теорема умножения вероятностей

- Аналогично для трех и более событий:
- а) $P(ABC) = P(A)P(B/A)P(C/AB)$
- б) $P(A_1A_2...A_n) = P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1A_2)...$

  $...P(A_n/A_1A_2A_3...A_{n-1})$

- Для независимых событий ***А*** и ***В:*** $P(B/A) = P(B)$ **-** по условию независимости событий.
- Поэтому для *независимых* событий

$$\boxed{P(AB) = P(A)P(B).}$$

# Теорема умножения вероятностей

- Задача. На карточках написаны буквы ***Т, Т, С*** и ***О.*** Карточки перемешаны и перевернуты, а затем вскрываются по одной.
- Определить вероятность того, что в порядке появления букв получится слово *ТОСТ.*

# Теорема умножения вероятностей

- *Решение.*
- Событие $\hat{A} = \{\grave{O}\hat{I}\tilde{N}\grave{o}\}$ по определению есть *произведение* событий.
- Вскрытые карточки обратно не возвращаются, поэтому элементарные события, образующие событие ***В*** <u>зависимы</u> (изменяются условия опыта).

# Теорема умножения вероятностей

- ***(Т, Т, С , О)***
- Поэтому для решения задачи применим теорему умножения вероятностей зависимых событий:

$$P(\text{Â}) = P\left\{\text{ÒÎ ÑÒ}\right\} = P(T)P(O\,/\,T)P(C/TO)P(T/TOC)$$

- Тогда

$$P(B) = P(TOCT) = \frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{12} \approx 0.083$$

# Формула полной вероятности

- Является следствием обеих теорем
  – сложения и умножения
  вероятностей.

# Формула полной вероятности

- Пусть требуется определить вероятность события А, которое может произойти вместе с одним из событий
  - $H_1, H_2, \ldots, H_n,$
- образующих полную группу и называемых *гипотезами*.

# Формула полной вероятности

- A – событие
- $\underbrace{H_1, H_2, \ldots, H_n}$
- *гипотезы*

# Формула полной вероятности

- Тогда вероятность события **A** вычисляется как

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A/H_i)$$

- т.е.как сумма произведений вероятности каждой гипотезы на вероятность события при этой гипотезе.

# Формула полной вероятности

- <u>Доказательство.</u>
- Так как гипотезы $H_i \ (i = 1, 2, \ldots, n)$ образуют полную группу, то событие ***A*** может появиться только в комбинации с какой-либо из этих гипотез:

$$A = H_1 \cap A \cup H_2 \cap A \cup \ldots \cup H_n \cap A =$$

$$= H_1 A + H_2 A + \ldots + H_n A$$

# Формула полной вероятности

- Так как гипотезы $H_i \ (i = 1, 2, ..., n)$ несовместны, то и комбинации $H_1A, \ H_2A, \ ..., \ H_nA$ - тоже несовместны

- Тогда по теореме сложения вероятностей:

$$P(A) = P(H_1A) + P(H_2A) + ... + P(H_nA) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(H_iA)$$

# Формула полной вероятности

- Применяя к событиям $H_iA \quad (i = 1, 2, ..., n)$ теорему умножения зависимых событий, получим

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A/H_i)$$

- ,
- что и требовалось доказать.

# Формула полной вероятности

- **<u>Задача.</u>** Имеются три одинаковые с виду урны. В первой - ***a*** белых и ***b*** черных шаров, во второй – ***c*** белых и ***d*** черных, а в третьей – только белые шары.
- Некто подходит к одной из урн и вынимает из нее один шар.
- Найти вероятность того, что этот шар белый.

# Формула полной вероятности

- *Решение.*
- Событие $A = \{\text{ïîÿâëåíèå áåëîãî øàðà}\}$
- Обозначим события-гипотезы:
- 1-я урна 2-я урна 3-я урна
- $H_1$ $H_2$ $H_3$
- Т.к. выбор урны происходит случайно, наугад, то вероятность каждой гипотезы

$$P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = \frac{1}{3}$$

# Формула полной вероятности

- Найдем вероятность вынуть белый шар из 1-й урны, т.е.

$$P(A/H_1) = \frac{a}{a+b}$$

- затем – из 2-й:

$$P(A/H_2) = \frac{c}{c+d}$$

- и, наконец, из 3-й: $P(A/H_3) = 1$

# Формула полной вероятности

- По формуле полной вероятности найдем

$$P(A)=\frac{1}{3}\frac{a}{a+b}+\frac{1}{3}\frac{c}{c+d}+\frac{1}{3}\cdot 1=$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{a}{a+b}+\frac{c}{c+d}+1\right)$$

# Формула Байеса (теорема гипотез)

- Является следствием теоремы умножения вероятностей и формулы полной вероятности.

# Формула Байеса (теорема гипотез)

- *Пусть имеется полная группа несовместных гипотез:*
- $H_1, H_2, \ldots, H_n$

- *Пусть вероятности этих гипотез до опыта известны и равны*

$$P(H_1), P(H_2), \ldots, P(H_n)$$

- *Пусть проведен опыт, в результате которого наступило некоторое событие* ***A***

# Формула Байеса (теорема гипотез)

- <u>*Вопрос:*</u> *как следует изменить вероятности гипотез в связи с наступлением этого события?*

- По существу нужно найти «новую» (условную) вероятность

$$P(H_i / \grave{A})$$

- для каждой гипотезы.

# Формула Байеса
# (теорема гипотез)

- По теореме умножения вероятностей имеем:
- $$P(A/H_i) = P(A)P(H_i/A) = P(H_i)P(A/H_i)$$
- или
- $$P(A)P(H_i/A) = P(H_i)P(A/H_i)$$
- откуда
- $$P(H_i/A) = \frac{P(H_i)P(A/H_i)}{P(A)} \quad (i = 1, 2, ..., n)$$

# Формула Байеса (теорема гипотез)

- Выражая *P(A)* с помощью формулы полной вероятности, имеем

$$\boxed{P(H_i/A)=\frac{P(H_i)P(A/H_i)}{\sum\limits_{i=1}^{n}P(H_i)P(A/H_i)}}\qquad (i=1,2,\ldots,n)$$

- Формула Байеса дает возможность *«пересмотреть»* вероятности гипотез с учетом наблюдавшегося результата опыта

# Формула Байеса (теорема гипотез)

- *Задача.* Два стрелка стреляют в одну мишень, делая каждый по одному выстрелу.
- Вероятность попадания в мишень для первого стрелка равна 0.8, а для второго 0.4.
- После стрельбы в мишени обнаружена пробоина.
- Найти вероятность того, что эта пробоина принадлежит первому стрелку.

# Формула Байеса (теорема гипотез)

- *Решение.* $p_1 = 0.8$, $p_2 = 0.4$
- До опыта возможны следующие гипотезы:

$$H_1 = (--)$$

$$H_2 = (++)$$

- . Их вер-ти:

$$H_3 = (+-)$$

$$H_4 = (-+)$$

$$P(H_1) = 0.2 \cdot 0.6 = 0.12$$

$$P(H_2) = 0.8 \cdot 0.4 = 0.32$$

$$P(H_3) = 0.8 \cdot 0.6 = 0.48$$

$$P(H_4) = 0.2 \cdot 0.4 = 0.08$$

# Формула Байеса (теорема гипотез)

- Условные вероятности наблюденного события
  - ***A*** = {*пробоина*}
- при этих гипотезах равны:

$$P(A/H_1)=0; \quad P(A/H_2)=0;$$

$$P(A/H_3)=1; \quad P(A/H_1)=1$$

# Формула Байеса (теорема гипотез)

- После опыта гипотезы $H_1$ и $H_2$ становятся невозможными.
- Вероятности гипотез $H_3$ и $H_4$ будут равны:

$$P(H_3/A) = \frac{0.48 \cdot 1}{0.48 \cdot 1 + 0.08 \cdot 1} = \frac{6}{7}$$

$$P(H_4/A) = \frac{0.08 \cdot 1}{0.48 \cdot 1 + 0.08 \cdot 1} = \frac{1}{7}$$

# Формула Байеса (теорема гипотез)

- Следовательно, вероятность того, что пробоина принадлежит первому стрелку, равна $\frac{6}{7}$.

# Испытания Бернулли. Формула Бернулли

- Испытания Бернулли – это повторные многократные, независимые испытания с двумя возможными исходами и с вероятностью успеха, не меняющейся от испытания к испытанию.
- Классический пример – многократное бросание монеты.