Испытания Бернулли. Формула Бернулли

- В условиях этих испытаний представляют интерес два вопроса:
- *1. Какова вероятность того, что наблюдаемое событие наступит ровно **k** раз в **n** испытаниях?*
- *2. Сколько раз вероятнее всего наступит наблюдаемое событие?*

Испытания Бернулли. Формула Бернулли

- Ответ на 1-й вопрос дает формула Бернулли:

$$\boxed{P_{k(n)} = C_n^k p^k q^{n-k}}$$

- $P_{k(n)}$ - вероятность наступления события *k* раз в *n* испытаниях;
- *p* - вероятность наступления события в одном испытании;
- *q = 1 – p* - вероятность не наступления события в одном испытании;

Число сочетаний

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Испытания Бернулли. Формула Бернулли

- При ответе на 2-й вопрос по существу требуется определить *наивероятнейшее число* $\boldsymbol{k_0}$ появлений события в $\boldsymbol{n}$ испытаниях, т.е. такое число $\boldsymbol{k_0}$, которому соответствует максимальная вероятность:

$$\begin{cases} P_{k_0(n)} \geq P_{k_0+1(n)} \\ P_{k_0(n)} \geq P_{k_0-1(n)} \end{cases}$$

Испытания Бернулли. Формула Бернулли

- Можно показать, что эти условия приводят к неравенству

$$\boxed{np - q \le k_0 \le np + p}$$

- ***Замечания:***
- ***1.*** $\boldsymbol{k_0}$ – целое число;
- 2. Может быть несколько наивероятнейших целых чисел, тогда – им соответствует одинаковая *в точности* максимальная вероятность.

Испытания Бернулли. Формула Бернулли

- <u>*Задача.*</u> Монета брошена 5 раз. Какова вероятность того, что герб появится ровно 3 раза? Сколько раз вероятнее всего появится герб?
- <u>*Решение:*</u> 1. По формуле Бернулли с учетом $n = 5$, $k = 3$, $p = q = ½$:

$$P_{3(5)} = C_5^3 p^3 q^{5-3} = \frac{5!}{3!\,2!}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 1\cdot 2}\left(\frac{1}{2}\right)^5 = 10\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{10}{32} \approx 0.31.$$

Испытания Бернулли. Формула Бернулли

- 2. Найдем k_0 из неравенства

$$np - q \leq k_0 \leq np + p$$

- с учетом $n = 5$ и $p = q = 1/2$:

$$5\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \leq k_0 \leq 5\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

$$2 \leq k_0 \leq 3$$

Испытания Бернулли. Формула Бернулли

- Т.о. имеем два наивероятнейших числа:

$$k_0 = 2 \text{ и } k_0 = 3$$

- Поэтому должно быть $P_{2(5)} = P_{3(5)}$
- Убедимся в этом:

$$P_{2(5)} = C_5^2 p^2 q^{5-2} = \frac{5!}{2!\,3!}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^3 = 10\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{10}{32} = 0.3125$$

$$P_{3(5)} = C_5^3 p^3 q^{5-3} = \frac{5!}{3!\,2!}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 10\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{10}{32} = 0.3125$$

Использование противоположного события

- При независимых многократных испытаниях для вычисления вероятности суммы событий вместо теоремы сложения вероятностей удобнее использовать вероятность противоположного события, особенно, когда число слагаемых $n > 2$.

Использование противоположного события

- Пусть $A_i \ (i = 1, 2, ..., n)$ – наступление события *A* в ***i***-м испытании.
- По определению, сумма событий – наступление события хотя бы один раз:

$$B = A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n$$

- Противоположное событие
- $$\overline{B} = \overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap ... \cap \overline{A}_n$$

Использование противоположного события

- Противоположные события составляют полную группу, поэтому сумма их вероятностей равна единице, т. е.

$$P(B)+P(\overline{B})=1$$

- Отсюда

$$P(B)=1-P(\overline{B})=1-P\left(\overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot \ldots \cdot \overline{A}_n\right)$$

Использование противоположного события

- По теореме умножения вероятностей независимых событий

$$P(B)=1-P(\bar{B})=1-P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)\ldots P(\bar{A}_n)=1-q_1q_2\ldots q_n$$

- где $q_i=P(\bar{A}_i)\quad(i=1,2,\ldots n)$.
- Итак,

$$\boxed{P(B)=1-q_1q_2\ldots q_n}$$

Использование противоположного события

- *Задача*. Три стрелка стреляют в цель с вероятностью успеха

$$p_1 = 0.6, \quad p_2 = 0.7, \quad p_3 = 0.8.$$

- Найти вероятность поражения мишени.
- *Решение*. Введем обозначения событий:

$$A_1 = \{\text{попадение в мишень 1-го стрелка}\}$$

$$A_2 = \{\text{попадение в мишень 2-го стрелка}\}$$

$$A_3 = \{\text{попадение в мишень 3-го стрелка}\}$$

Использование противоположного события

- Событие

$$B = \begin{Bmatrix} \textit{поражение мишени} \\ \textit{или отсутствие промаха} \end{Bmatrix} = A_1 \cup A_2 \cup A_3$$

- Вычислим вероятности противоположных событий:

$$q_1 = 1 - p_1 = 0.4,$$

$$q_2 = 1 - p_2 = 0.3,$$

$$q_3 = 1 - p_3 = 0.2.$$

Использование противоположного события

- Тогда вероятность события ***B:***

$$P(B) = 1 - q_1 q_2 q_3 =$$

$$= 1 - 0.3 \cdot 0.4 \cdot 0.2 = 0.986$$

Распределения дискретных случайных величин

- Все процессы, происходящие в природе, делятся на непрерывные и дискретные.
- Например, такие величины, как количество человек в студенческой группе, число солнечных дней в году, высота горы, уровень интеллекта являются дискретными величинами, потому что имеют конкретный количественный признак, который некоторое время не изменяется

Рассмотрим вероятностное пространство (Ω, σ, P), то *есть*

- *пространство элементарных исходов Ω,*
- σ *-алгебру событий* (определенную нами на пространстве путем введения замкнутых операций),
- *вероятность P (как меру нашего множества).*

- ***Случайной величиной ξ*** *(кси)* ***называется произвольная функция,*** *ставящая в соответствие каждому элементарному исходу (событию) ω число $\xi = \xi(\omega)$*

Распределение дискретной случайной величины ξ

ξ	X1	X2	....	Xк	.....
P	p1	p2	......	Pк	......

где $p_k = P\{\omega : \xi(\omega) = x_x\} = P\left\{\xi = x_k\right\}.$

Пример

Два игрока играют в “орлянку” на следующих условиях: если при подбрасывании монеты выпадает “орел”, то первый игрок платит второму $1, если “решка”, то второй игрок платит первому $2. Опишем случайную величину ξ, равную выигрышу первого игрока в этой игре (при одном подбрасывании монеты).

Решение

- **Пространство элементарных исходов (событий) Ω состоит из двух исходов: ω_1 – выпадение "орла" и ω_2 – "решки".**

σ-Алгебра событий насчитывает 4 события: $\varnothing$, $\{\omega_1\}$, $\{\omega_2\}$, Ω .

Найдем вероятности всех событий из множества алгебры событий: $P(\varnothing) = 0$, $P(\omega_1) = 1/2$, $P(\omega_2) = 1/2$, $P(\Omega) = 1$. Вероятностное пространство – определено

Значения случайной величины

Элементарные исходы	ω_1	ω_2	$\varnothing$	Ω
$\xi(\omega)$	-1	2		
P(ω)	½	½	0	1

Функция распределения случайной величины

- ***Функцией распределения (вероятностей) случайной величины ξ*** *называется функция F(x), значение которой в точке x равно вероятности события {**ξ** < x }, т.е. события, состоящего из тех и только тех элементарных исходов **ω**, для которых **ξ** (**ω**)<x:*

$$F(x) = P\{\boldsymbol{\xi} < x\}.$$

Свойства функции распределения

1. Функция F(x) является ограниченной, то есть ее значения лежат в интервале от 0 до 1.

$$\mathbf{0 \le F(x) \le 1.}$$

2. Функция F(x) является неубывающей. Если $x_2 > x_1$, *то* $F(x_2) \ge F(x_1)$, **так как вероятность любого события неотрицательна**.

Свойства функции распределения

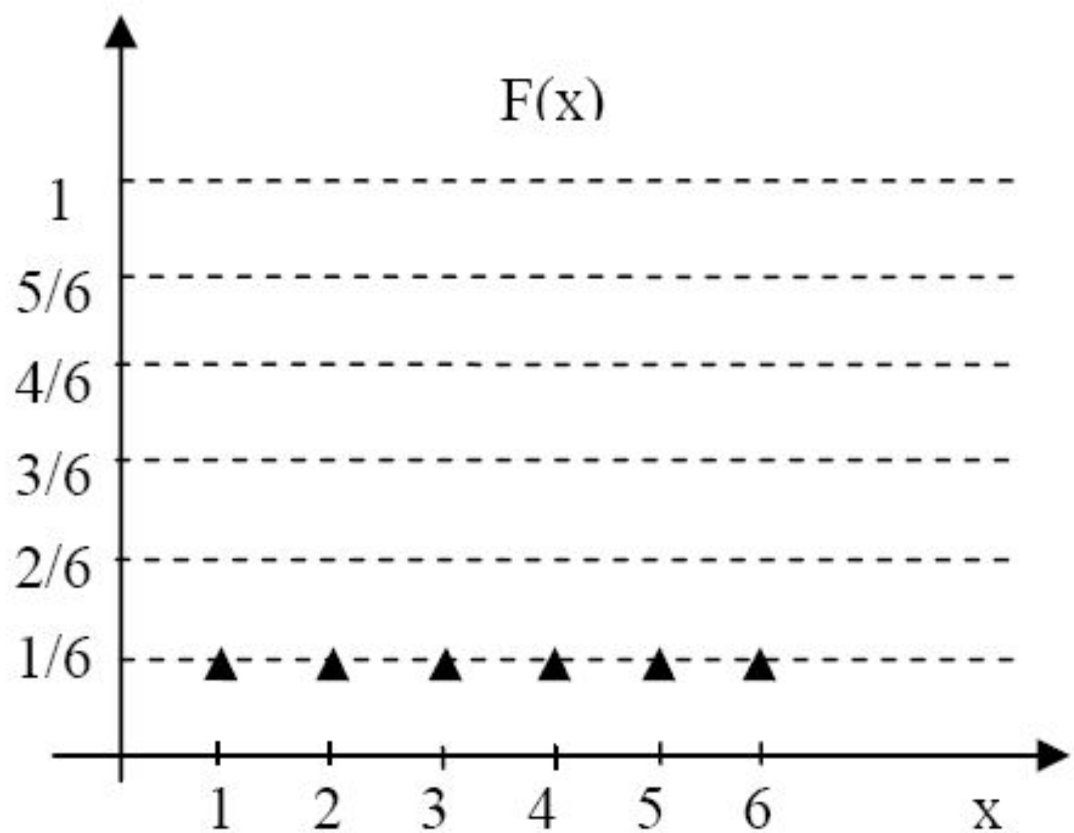
3. Вероятность попадания случайной величины ξ на отрезок **(x_1, x_2) определяется формулой:**

$$\mathbf{P\{x_1 \le \xi \le x_2\} = F(x_2) - F(x_1).}$$

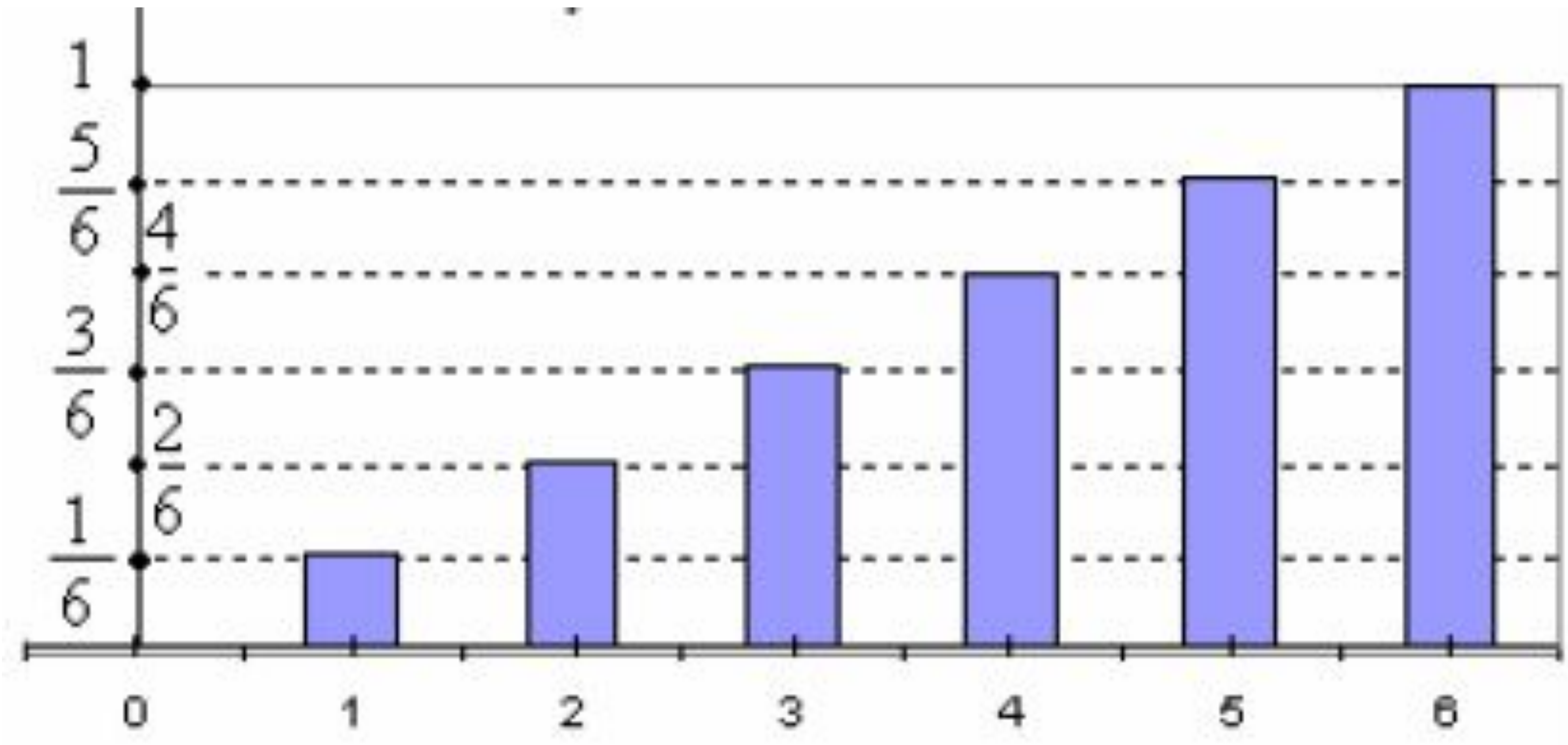
Ряд распределения дискретной случайной величины числа выпавших очков при бросании кости

Значения x_i:	0	1	2	3	4	5	6
Вероятности $p(x_i)$	0	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Функция распределения вероятностей выпадения очков при бросании кости



Кумулятивная вероятность распределения числа очков при бросании кости



Пример

В неком обществе организована лотерея. Разыгрываются две вещи стоимостью по $10 и одна стоимостью $30. Составить закон распределения суммы чистого выигрыша для субъекта, который приобрел один билет за $1; всего продано 50 билетов.

Решение

Искомая случайная величина X может принимать три значения:

- -1, (если субъект не выиграет, а проиграет $1, уплаченный за билет);
- $9,
- $29.

Первому результату благоприятны 47 случаев из 50, второму – 2 из 50, третьему – 1 из 50.

Закон распределения X имеет вид

Сумма выигрыша	-1	9	29
Вероятность	0,94	0,04	0,02

Виды распределений

Биноминальное распределение

- является распределением числа успехов μ в n испытаниях Бернулли с вероятностью успеха *p* *и неудачи* $q = 1 – p$.

Схема Бернулли

Рассмотрим последовательность независимых одинаковых испытаний: появление или не появление некоторого наблюдаемого события в каждом испытании не будет зависеть от исходов предыдущих испытаний

Результат каждого опыта можно записать в виде последовательности УНН...У, “У” – успех, “Н” – неудача.

Пространство элементарных исходов Ω состоит из 2^n исходов, каждый из которых отождествляется с определенной последовательностью УНУ... (σ-алгебра событий включает ***2^{2^n} событий).***

В силу независимости испытаний сопоставим каждому элементарному исходу ω = УННУ...У

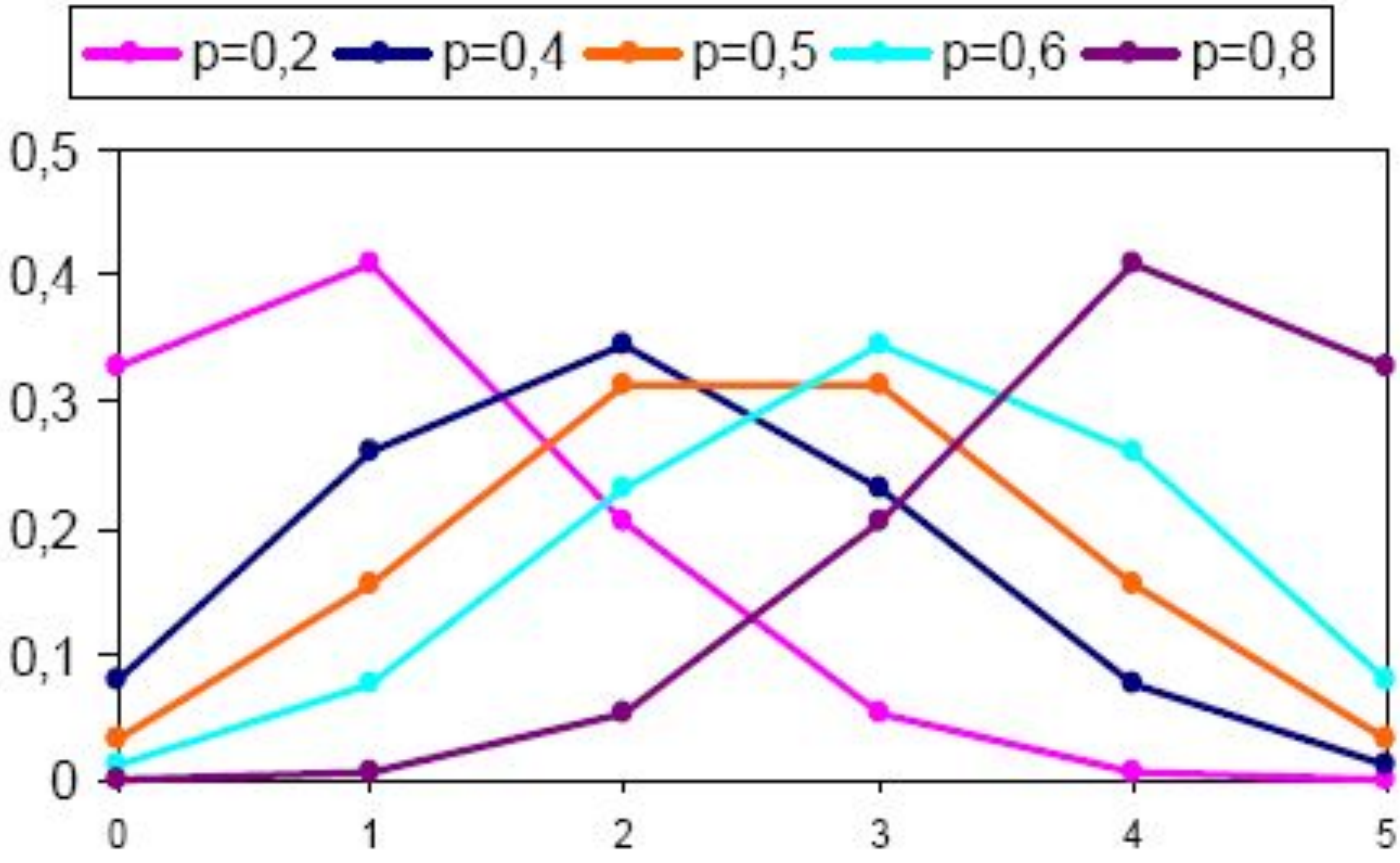
вероятность $P(\omega)$ = P(УННУ...У)= *pqqp...p, p – повторяется столько раз, сколько раз произошел* успех, а *q – сколько раз была неудача.*

Вероятность *Pn(m) получить в n испытаниях ровно m успехов.*

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m} \quad (m = 0, 1, 2, \ldots, n).$$

Данное выражение носит также название биноминального закона, поскольку *Pn(m) можно получить как коэффициент при* z^m бинома $(pz+q)^n$:

Биноминальное распределение для n=5



Пример

- Монета брошена 2 раза. Определить закон распределения случайной величины X – числа выпадений герба.

- При бросании монеты герб может появиться или 2 раза или 1 раз или совсем не появиться. Найдем вероятности этих событий по формуле Бернулли.

$$P_2(2) = C_2^2 p^2 = (\frac{1}{2})^2.$$

$$P_2(1) = C_2^1 pq = 2(\frac{1}{2})(\frac{1}{2}) = 0,5; \quad P_2(0) = C_2^0 q^2 = (\frac{1}{2})^2 = 0,25.$$

X	2	1	0
P	*0,25*	*0,5*	*0,25*

Пример

- На зачете студент получил $n = 4$ задачи. Вероятность решить правильно каждую задачу $p = 0,8$. Определим ряд распределения и построим функцию распределения случайной величины μ – числа правильно решенных задач

- В данном случае мы имеем дело с биноминальным законом:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}.$$

Ряд биноминального распределения для задачи 2

μ	0	1	2	3	4
P	0.0016	0.0256	0.1536	0.4096	0.4096

Пуассоновское распределение

- Распределение Пуассона моделирует случайную величину, представляющую собой число событий, произошедших за фиксированное время, при условии, что данные события происходят с фиксированной средней интенсивностью и независимо друг от друга

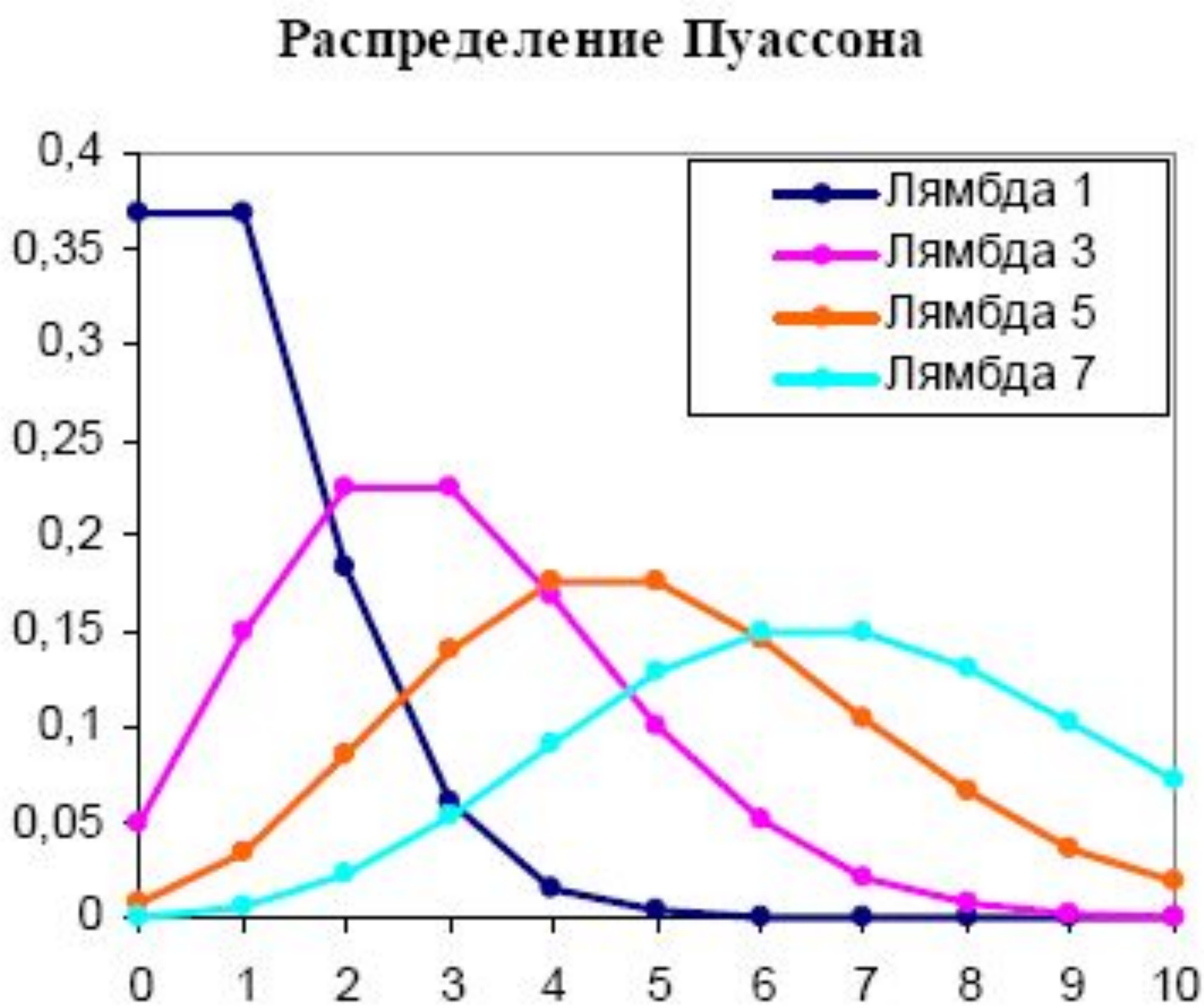
Пуассоновское распределение

ξ	0	1	2	...	k	...
P	$e^{-\lambda}$	$\lambda e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^2}{2!}e^{-\lambda}$	...	$\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$	...

Параметр пуассоновского распределения $\lambda>0$ определяет интенсивность поступления событий и определяется формулой:

$\lambda = n*p$, где n – общее число испытаний, а P – вероятность благоприятного исхода испытания.

- Распределение Пуассона носит также название закона редких событий, поскольку оно всегда появляется там, где производится большое число испытаний, в каждом из которых с малой вероятностью происходит “редкое” событие. По закону Пуассона распределены, например, число вызовов, поступивших на телефонную станцию; число метеоритов, упавших в определенном районе; число распавшихся нестабильных частиц и т. д.


Распределение Пуассона
0,4
0,35
0,3
0,25
0,2
0,15
0,1
0,05
0
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
Лямбда 1
Лямбда 3
Лямбда 5
Лямбда 7

Формула Пуассона

- Формула Пуассона применяется тогда, когда наряду с большим значением числа испытаний *n “мала” вероятность успеха p.*
- Она относится к приближенным формулам для вычисления *Pn(m) при больших n.*

$$P_n(m) \approx \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda} \quad (m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Пример

- Завод отправил на базу 5000 доброкачественных изделий. Вероятность того, что в пути изделие повредится равно 0,0002. Найти вероятность того, что на базу прибудут 3 негодных изделия.

- По условию $n = 5000$, $p = 0{,}0002$, $k = 3$.
- Найдем λ= np =5000*0.0002=1
- По формуле Пуассона искомая вероятность равна

$$P_{5000}(3) = \frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!};$$

$$P_{5000}(3) = \frac{1^3}{e \cdot 3!} = 0{,}061.$$

Пример

- Среднее число вызовов, поступающих на АТС в одну минуту, равно – 2. Найти вероятности того, что за 5 минут поступит:
- А) 2 вызова;
- б); не менее 2 вызовов.

по условию λ=2, t=5, m=4.

По формуле Пуассона:

$$P_n(m) \approx \frac{\lambda t^m}{m!} e^{-\lambda t}.$$

А) Вероятность, что за 5 минут поступят 2 вызова:

$$P_5(2) \approx \frac{10^2}{2!} e^{-10} = 0{,}00225$$

Это событие практически невозможно.

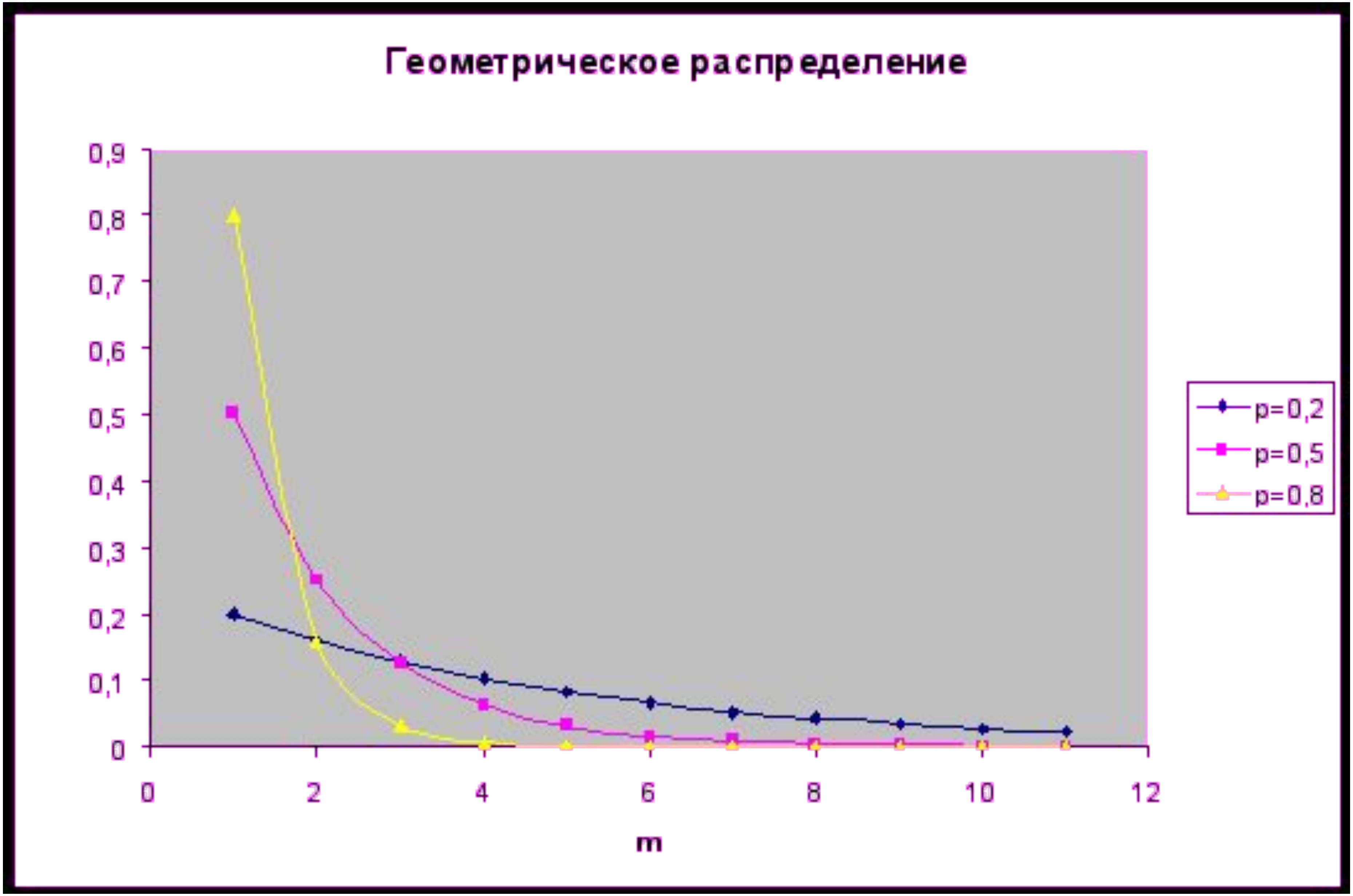
Б) События «не поступило не одного вызова» и «поступил 1 вызов» – несовместны, поэтому по теореме сложения вероятностей: вероятность того, что за 5 минут поступят менее 2 вызовов, равна

$$P_5(m < 2) = \frac{10^2}{2!}e^{-10} = 0{,}00225.$$

Геометрическое распределение

ξ	0	1	2	...	k	...
P	p	qp	$q^2 p$	...	$q^{k-1} p$	...

Пусть ξ – число испытаний, которое необходимо провести, прежде чем появится первый успех. Тогда ξ – дискретная случайная величина, принимающая
значения 0, 1, 2, ..., *n*, ...


Геометрическое распределение
0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0
0
2
4
6
8
10
12
m
p=0,2
p=0,5
p=0,8

Пример

- Из орудия производится стрельба по цели до первого попадания. Вероятность попадания в цель p=0,6. Найти вероятность того, что попадание произойдет при третьем выстреле.

- По условию, p=0,6, q=0,4, k=3. Искомая вероятность определяется по формуле:

$$p = q^{k-1}p = 0,4^{2} * 0,6 = 0,096.$$

Продолжение примера

- Производится стрельба по мишени до первого попадания (число патронов не ограничено). Требуется составить ряд распределения числа сделанных выстрелов.
- Определить вероятность того, что для поражения цели потребуется не более трёх патронов.

- Случайная величина *X* – *число сделанных вы*стрелов – имеет геометрическое распределение с параметром *p=0,6. Ряд распределения X имеет вид:*

x_i	1	2	3	...	k	...
p_i	0,6	0,24	0,096	...	$0,6\cdot 0,4^{k-1}$	...

Вероятность того, что для поражения цели потребуется не более трёх патронов равна

$P(X\leq 3)=P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)=0,6+0,24+0,096=0,936.$

Гипергеометрическое распределение

- Дискретная случайная величина *X* *имеет гипергеометрическое распределение, если она принимает значения 0,*1, 2, ..., *min {n, M} с вероятностями*

$$P(X=m)=\frac{C_M^m \cdot C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n},$$

где $m=1, 2, ..., \min \{n, M\}$, $m \le N$, $n \le N$; n, N, M – *натуральные числа*.

- N – общее количество объектов в генеральной совокупности;
- M – количество объектов с определенным свойством в генеральной совокупности;
- n – объем выборки;
- m – количество деталей с определенным свойством.

- Гипергеометрическое распределение широко используется в практике статистического приёмочного контроля качества промышленной продукции, в задачах, связанных с организацией выборочных обследований, и некоторых других областях.

Пример

- В национальной лотерее "6 из 45" денежные призы получают участники, угадавшие от трёх до шести чисел из случайно отобранных 6 из 45 (размер выигрыша увеличивается с увеличением числа угаданных чисел). Найти закон распределения.
- Какова вероятность получения денежного приза?

- Случайная величина *X* – *число угаданных чисел* среди случайно отобранных шести – имеет гипергеометрическое распределение с параметрами *n=6, N=45, M=6. Ряд рас*пределения *X, рассчитанный по формуле:*

$$P(X=m)=\frac{C_M^m \cdot C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}, где\_m=0,1,2\ldots6.$$

Гипергеометрическое распределение

x_i	0	1	2	3	4	5	6
p_i	0,40056	0,42413	0,15147	0,02244	0,00137	0,00003	0,0000001

Вероятность получения денежного приза

$$P(3 \leq X \leq 6) = P(X=3) + P(X=4) + P(X=5) + P(X=6)$$

$$P(3 \leq X \leq 6) = 0{,}02244 + 0{,}00137 + 0{,}00003 + 0{,}0000001 \approx 0{,}024.$$