

Общие методы решения уравнений



Цели урока:

- *Рассмотреть общие методы решения уравнений.*
- *Научиться применять эти методы при решении уравнений.*
- *Формировать навыки применение наиболее рациональных способов решения уравнений.*

Рассмотрим уравнения:



1) $x^2 - 2x = 0;$

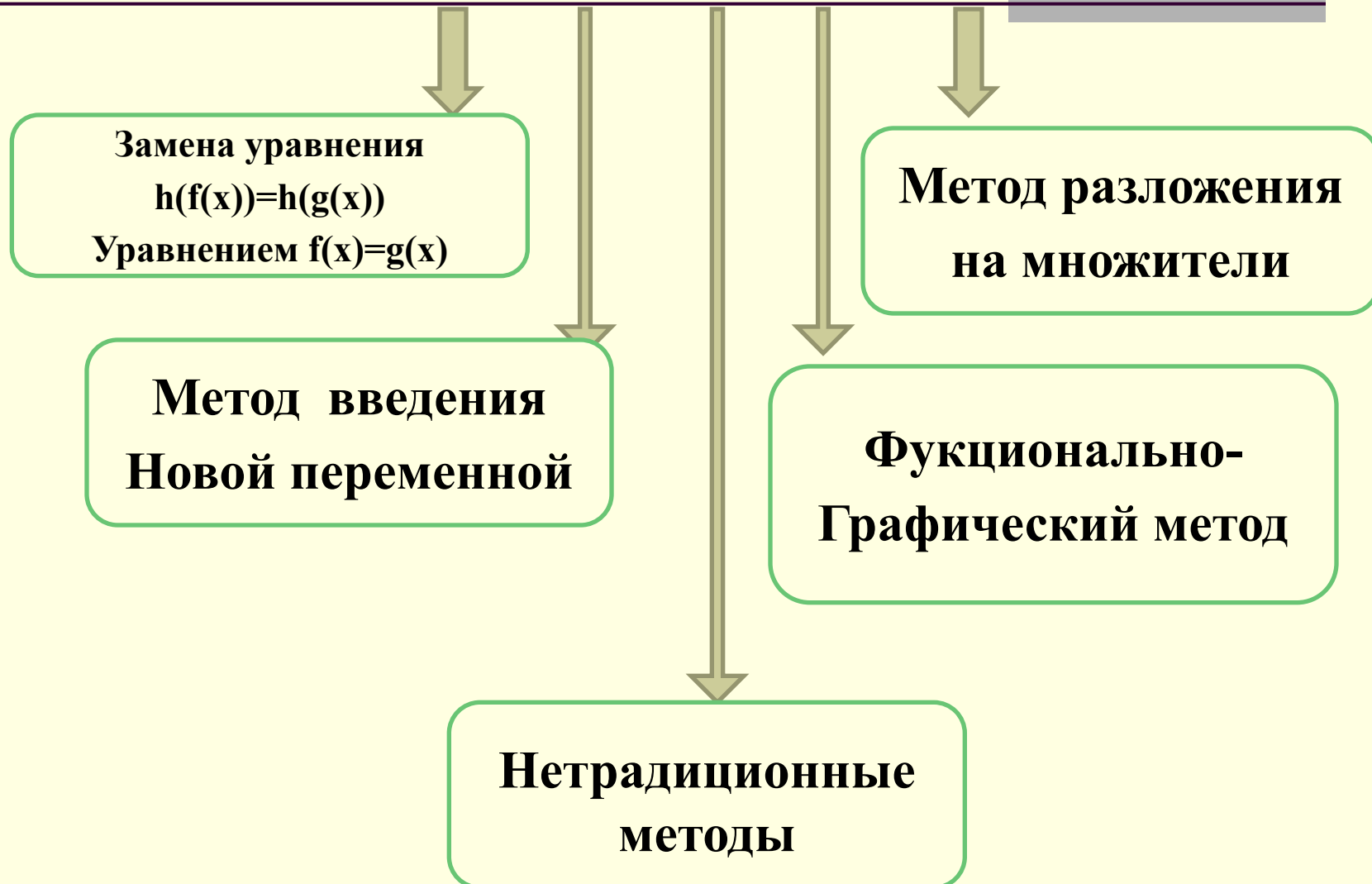
2) $\sin^2 x + \sin x = 0;$

3) $7^{x^2 + 5x} = 49;$

4) $\log^2_2 x - 4\log_2 x + 3 = 0;$

5) $\sqrt{x} = \frac{1}{x}$

■ Общие методы решения уравнений:



Замена уравнения более простым уравнением

Суть метода: от уравнения вида

$$h(f(x))=h(g(x))$$

осуществить переход к уравнению вида

$$f(x)=g(x)$$

Метод применяется:

- При решении показательных уравнений:

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \quad a \neq 1; a > 0$$

$$f(x) = g(x)$$

- При решении логарифмических уравнений:

$$\log_a f(x) = \log_a g(x) \quad a \neq 1; a > 0 \quad \begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$$

$$f(x) = g(x)$$

- При решении иррациональных уравнений:

$$\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{g(x)}$$

$$f(x) = g(x)$$

Метод применяется:

если функция монотонная

$$f(x)^{2k+1} = g(x)^{2k+1}$$
$$f(x) = g(x)$$

Например:

$$(2x+3)^3 = (5x-9)^3$$

$$2x+3 = 5x-9$$

$$x=4$$

Ответ: 4

Метод нельзя использовать:

- если функция периодическая

Например,

$$\sin(3x-1) = \sin(3x+4)$$

- если функция четная

Например,

$$(2x+7)^2 = (5x-12)^2$$



Пример 1:

Решить уравнение

$$5^{2x^2-3x+1} - 5 = 0$$

$$5^{2x^2-3x+1} = 5;$$

$$2x^2 - 3x + 1 = 1;$$

$$2x^2 - 3x = 0;$$

$$x = 0; x = 1,5.$$

Ответ: 0; 1,5.



Пример 2:

$$\log_3(x^2 - 3x - 5) = \log_3(7 - 2x);$$

$$x^2 - 3x - 5 = 7 - 2x;$$

$$x^2 - x - 12 = 0;$$

$$x_1 = 4, x_2 = -3.$$

Проверка :

$$\begin{cases} x^2 - 3x - 5 \geq 0, \\ 7 - 2x \geq 0. \end{cases}$$

$x = 4$ – посторонний
корень

Ответ : -3 .

2. Метод разложения на множители.

Уравнение $f(x)g(x)h(x) = 0$ можно заменить совокупностью уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} f(x) = 0; \\ g(x) = 0; \\ h(x) = 0. \end{array} \right.$$

Решив уравнения этой совокупности, нужно взять те их корни, которые принадлежат ОДЗ исходного уравнения, а остальные отбросить как посторонние.



Пример 3:

Решить уравнение

$$\left(\sqrt{x+2}-3\right)\left(2^{x^2+6x+5}-1\right)\ln(x-8)=0.$$

$$\left[\begin{array}{l} \sqrt{x+2}-3=0; \\ 2^{x^2+6x+5}=1; \\ \ln(x-8)=0. \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x+2=9; \\ x^2+6x+5=0; \\ x-8=1. \end{array}\right.$$



Пример 3:

$$\begin{cases} x_1 = 7; \\ x_2 = -1; x_3 = -5; \\ x_4 = 9. \end{cases}$$

Проверка : ОДЗ :

$$\begin{cases} x + 2 \geq 0, \\ x - 8 \leq 0. \end{cases}$$

Из найденных корней этой системе неравенств удовлетворяет только $x = 9$, остальные являются посторонними для данного уравнения.

Ответ: 9.

3. Метод введения новой переменной.

Если уравнение $f(x)=0$ удалось преобразовать к виду $p(g(x))=0$, то нужно ввести новую переменную $u=g(x)$, решить уравнение $p(u)=0$, а затем решить совокупность уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} g(x) = u_1; \\ g(x) = u_2; \\ \dots \\ g(x) = u_n \end{array} \right.$$

где $u_1, u_2, \dots, u_n$ - корни уравнения $p(u)=0$.



Пример 4:

Решить уравнение

$$\frac{1}{x^2 + 3x - 3} + \frac{2}{x^2 + 3x + 1} = \frac{7}{5}.$$

Введём новую переменную $y = x^2 + 3x$.

Получим:

$$\frac{1}{y - 3} + \frac{2}{y + 1} = \frac{7}{5}.$$

**Освободившись от знаменателей,
получим:**

$$7y^2 - 29y + 4 = 0;$$

Пример 4:

Найдём корни квадратного уравнения:

$$y_1 = 4; y_2 = \frac{1}{7}.$$

Выполним проверку корней на выполнение условия:

$$5(y - 3)(y + 1) \neq 0.$$

Оба корня удовлетворяют данному условию.

Пример 4:

Вернёмся к замене переменной и решим два уравнения:

$$x^2 + 3x = 4 \quad \text{и} \quad x^2 + 3x = \frac{1}{7}.$$

$$x_{1/2} = 1; -4.$$

$$x_{3/4} = \frac{-21 \pm \sqrt{469}}{14}.$$

Ответ: $1; -4; \frac{-21 \pm \sqrt{469}}{14}.$

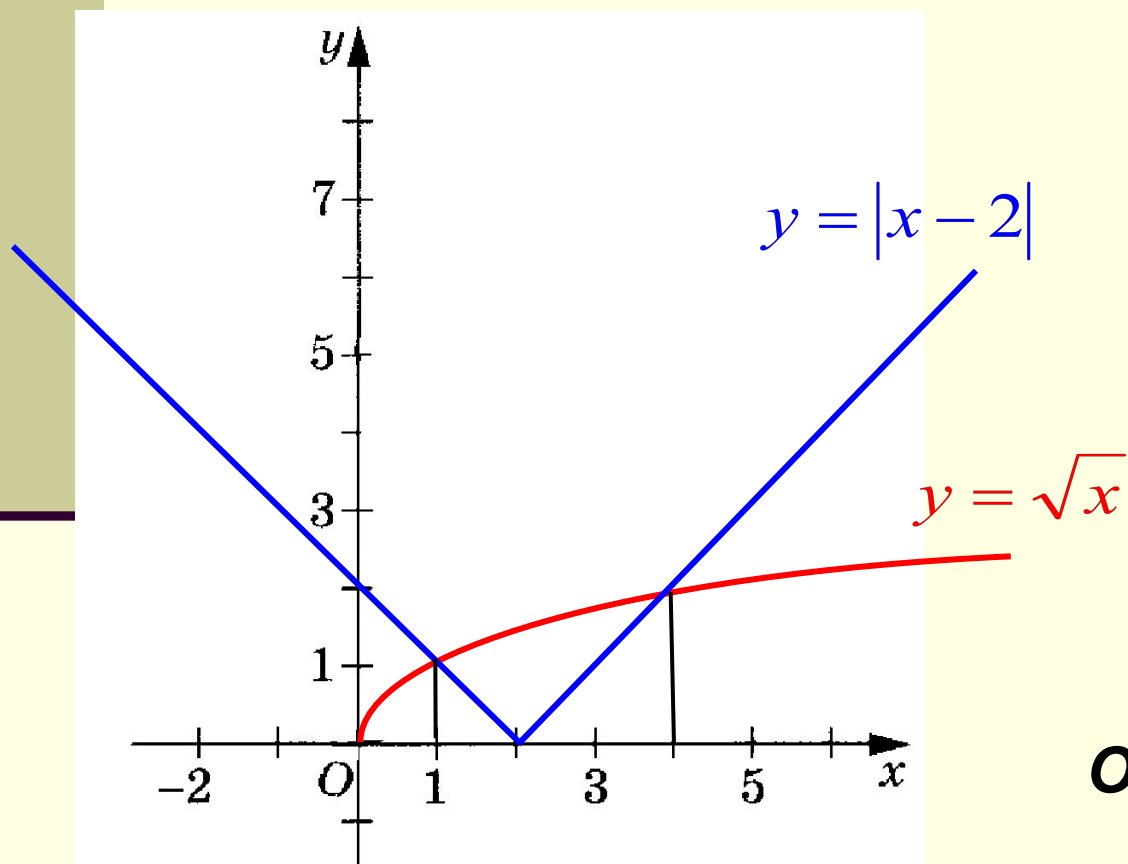
3. Функционально-графический метод.

Чтобы графически решить уравнение $f(x) = g(x)$ нужно построить графики функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$ и найти точки их пересечения. Корнями уравнения служат абсциссы этих точек.

1) Решить уравнение $\sqrt{x} = |x - 2|$ **Пример 5:**

1 шаг: построить графики функций $y = \sqrt{x}$ и $y = |x - 2|$

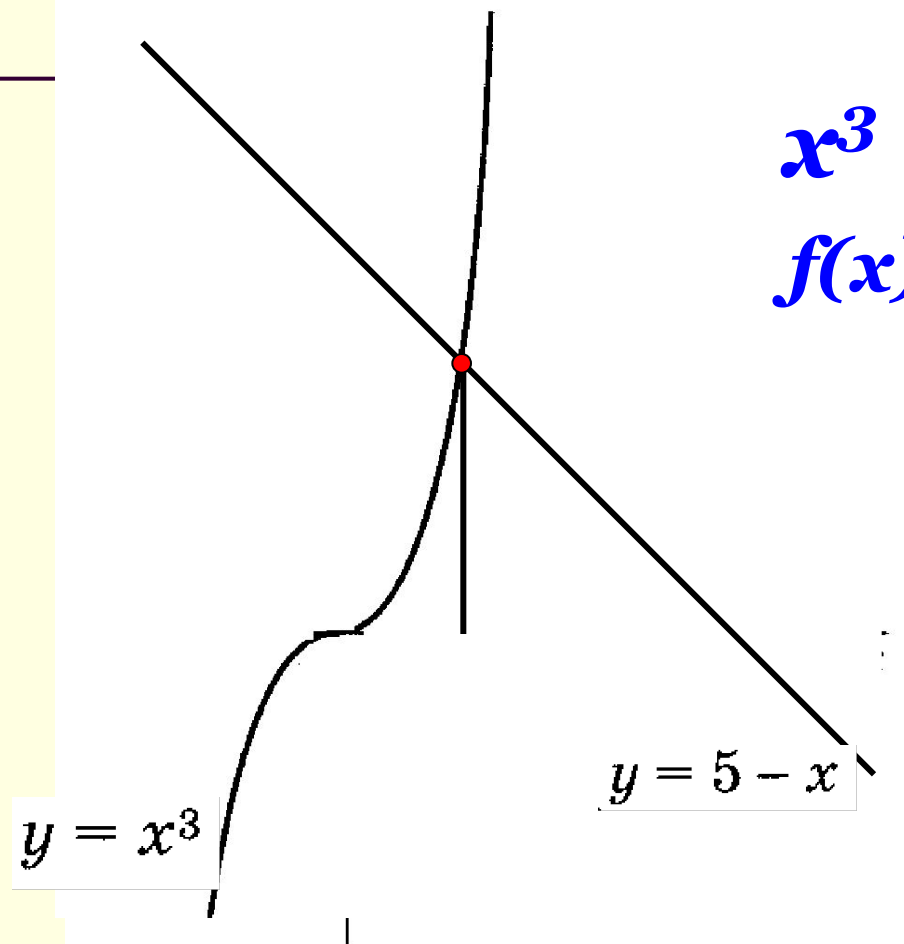
2 шаг: найти абсциссы точек (или точки) пересечения графиков



Ответ: $x_1 = 1$, $x_2 = 4$

2. $x^3 - 5 + x = 0$

Пример 6:



$$x^3 = 5 - x$$

$$f(x) = x^3 \quad g(x) = 5 - x$$

$$x \approx 1,5$$

Решением является абсцисса точки пересечения графиков левой и правой частей уравнения



Пример 7:

Решить уравнение

$$\cos 2\pi x = x^2 - 2x + 2.$$

**Рассмотрим функцию $y = x^2 - 2x + 2$.
Её графиком является парабола,
ветви которой направлены вверх.
В вершине параболы функция
достигает своего наименьшего
значения.**



Пример 7:

Найдём координаты вершины параболы.

$$x_0 = -\frac{b}{2a}; y_0 = y(x_0); \quad (1;1)$$

Для функции $y = x^2 - 2x + 2$ $y_{\text{наим.}} = 1$.

*Функция $y = \cos 2\pi x$ обладает
свойством: $y_{\text{наиб.}} = 1$.*



Пример 7:

Задача сводится к решению системы уравнений

$$\begin{cases} x^2 - 2x + 2 = 1, \\ \cos 2\pi x = 1. \end{cases}$$

**Решив 1 уравнение получили: $x = 1$.
Это значение удовлетворяет и 2
уравнению системы,
следовательно, является
единственным корнем заданного
уравнения. **Ответ: 1.****

13. а) Решите уравнение $7^{x^2-2x} + 7^{x^2-2x-1} = 56$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-1; 1]$.

■ 1. Задание 13 № [501689](#)

а) Решите уравнение

$$15^{\cos x} = 3^{\cos x} \cdot 5^{\sin x}.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку

$$\left[5\pi, \frac{13\pi}{2} \right].$$

13

а) Решите уравнение $(3\operatorname{tg}^2 x - 1)\sqrt{-5\cos x} = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$.

Решение.

а) Имеем $(3\operatorname{tg}^2 x - 1)\sqrt{-5\cos x} = 0$;
$$\begin{cases} \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{3}, \\ \cos x < 0, \end{cases}$$

откуда $\frac{5\pi}{6} + 2\pi n$ или $-\frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Ответ: а) $\pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{19\pi}{6}; -\frac{17\pi}{6}$.

13. а) Решите уравнение $\cos 2x + \sqrt{2} \sin x + 1 = 0$.

б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$.

Решение.

а) Преобразуем уравнение:

$$\cos 2x + \sqrt{2} \sin x + 1 = 0;$$

$$1 - 2 \sin^2 x + \sqrt{2} \sin x + 1 = 0;$$

$$2 \sin^2 x - \sqrt{2} \sin x - 2 = 0; \quad \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ или } \sin x = \sqrt{2}.$$

Уравнение $\sin x = \sqrt{2}$ не имеет решений. Из уравнения $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ находим:

$$x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \text{ и } x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: а) } -\frac{\pi}{4} + 2\pi k, -\frac{3\pi}{4} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}; \text{ б) } -\frac{11\pi}{4}, -\frac{9\pi}{4}.$$

13. а) Решите уравнение $\frac{(x-2)^2}{2} + \frac{18}{(x-2)^2} = 7\left(\frac{x-2}{2} - \frac{3}{x-2}\right) + 10$.

б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку $[-2; 2]$.

Решение.

а) Сделаем замену $t = \frac{x-2}{2} - \frac{3}{x-2}$. Тогда $t^2 = \frac{(x-2)^2}{4} + \frac{9}{(x-2)^2} - 3$.

Получаем уравнение

$$2(t^2 + 3) = 7t + 10; 2t^2 - 7t - 4 = 0,$$

откуда $t = -\frac{1}{2}$ или $t = 4$.

Если $t = -\frac{1}{2}$, то получаем

$$\frac{x-2}{2} - \frac{3}{x-2} = -\frac{1}{2}; (x-2)^2 - 6 = -(x-2); x^2 - 3x - 4 = 0,$$

откуда $x = -1$ или $x = 4$.

Если $t = 4$, то $\frac{x-2}{2} - \frac{3}{x-2} = 4$.

Аналогично получаем:

$$(x-2)^2 - 6 = 8(x-2); x^2 - 12x + 14 = 0,$$

откуда $x = 6 - \sqrt{22}$ или $x = 6 + \sqrt{22}$.

б) $0 < 6 - \sqrt{22} < 6 - 4 = 2$, а $6 + \sqrt{22} > 6 + 4 = 10 > 2$. Среди корней уравнения отрезку $[-2; 2]$ принадлежат только числа -1 и $6 - \sqrt{22}$.

Ответ: а) $-1; 4; 6 \pm \sqrt{22}$; б) $-1; 6 - \sqrt{22}$.

13. а) Решите уравнение $\cos x + \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2}} \cdot (\sin x + 1) = 0$.

б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{11\pi}{2}; -4\pi\right]$.

Решение.

а) Перейдем к системе

$$\begin{cases} \frac{2-\sqrt{2}}{2} \cdot (\sin x + 1) = \cos^2 x; \\ \cos x \leq 0, \end{cases}$$

Решим уравнение:

$$(2-\sqrt{2})(\sin x + 1) = 2\cos^2 x; \quad (2-\sqrt{2})\sin x + 2 - \sqrt{2} = 2 - 2\sin^2 x;$$

$$2\sin^2 x + (2-2\sqrt{2})\sin x - \sqrt{2} = 0; \quad \sin x = -1 \text{ или } \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Следовательно,

$$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \text{ или } x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad \frac{3\pi}{4},$$

$$\text{Ответ: а) } -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}; \quad \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}; \quad \text{б) } -\frac{21\pi}{4}; \quad -\frac{9\pi}{2}.$$

13

а) Решите уравнение $\frac{5\cos x + 3}{5\sin x - 4} = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[0; 2\pi]$.

Решение.

а) Имеем

$$\frac{5\cos x + 3}{5\sin x - 4} = 0; \quad \begin{cases} \cos x = -\frac{3}{5}, \\ \sin x \neq \frac{4}{5}, \end{cases}$$

откуда $x = -\arccos\left(-\frac{3}{5}\right) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ или $x = \pi + \arccos\left(\frac{3}{5}\right) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Ответ: а) $\pi + \arccos\left(\frac{3}{5}\right) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$; б) $\pi + \arccos\left(\frac{3}{5}\right)$.

а) Решите уравнение $\frac{2\cos^2 x - \sqrt{3}\cos x}{\log_4(\sin x)} = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\frac{3}{2}\pi\right]$.

Решение.

Перейдём к системе
$$\begin{cases} 2\cos^2 x - \sqrt{3}\cos x = 0; \\ \sin x \neq 1; \\ \sin x > 0. \end{cases}$$

Решаем уравнение системы $2\cos x \left(\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 0$.

Получаем
$$\begin{cases} \cos x = 0; \\ \cos x - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0. \end{cases}$$

С учётом всех ограничений $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{11\pi}{6}$.

а) Решите уравнение $8 \cdot 16^{\sin^2 x} - 2 \cdot 4^{\cos 2x} = 63$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{7\pi}{2}; 5\pi\right]$.

Решение.

Имеем $8 \cdot 16^{\sin^2 x} - 2 \cdot 4^{\cos 2x} = 63$; $8 \cdot 4^{2\sin^2 x} - 2 \cdot 4^{1-2\sin^2 x} = 63$.

Обозначим $a = 4^{2\sin^2 x}$, $a > 0$ при любом значении x . Тогда имеем

$8a - \frac{8}{a} = 63$, $8a^2 - 63a - 8 = 0$, $a_1 = -\frac{1}{8}$ и $a_2 = 8$. Так как $a > 0$, a_1 не

подходит. Получаем $4^{2\sin^2 x} = 8$; $2\sin^2 x = \frac{3}{2}$; $\sin x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$x = \frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, или $x = \frac{2\pi}{3} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{3} + \pi n$; $\frac{2\pi}{3} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$;

б) $\frac{11\pi}{3}$, $\frac{13\pi}{3}$, $\frac{14\pi}{3}$.

а) Решите уравнение $\frac{\log_2^2(\sin x) + \log_2(\sin x)}{2\cos x - \sqrt{3}} = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$.

Решение.

а) Перейдём к системе:

$$\begin{cases} \log_2(\sin x)(\log_2(\sin x) + 1) = 0, \\ 2\cos x - \sqrt{3} \neq 0. \end{cases}$$

Пусть $y = \log_2(\sin x)$.

Получаем $y(y+1) = 0$, откуда $y = 0$ или $y = -1$.

После обратной замены получаем $\log_2(\sin x) = 0$ или $\log_2(\sin x) = -1$, то есть

$$\sin x = 1 \text{ или } \sin x = \frac{1}{2} \text{ при условии } \cos x \neq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Если $\sin x = \frac{1}{2}$, то

$$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k \text{ или } x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, k, n \in \mathbb{Z}.$$

Числа $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$, не удовлетворяют

условию $\cos x \neq \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Если $\sin x = 1$, то $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$.

Ответ: а) $\frac{5\pi}{6} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi m, n, m \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{6}$.

а) Решите уравнение $\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{3}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)} + 2 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$.

Решение.

а) Преобразуем уравнение:

$$\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{3}{\cos x} + 2 = 0.$$

Сделаем замену $y = \frac{1}{\cos x}$. Получим

$$\begin{aligned} y^2 + 3y + 2 &= 0; \\ y &= -1 \text{ или } y = -2 \end{aligned}$$

Значит, $\cos x = -\frac{1}{2}$ или $\cos x = -1$.

Если $\cos x = -\frac{1}{2}$, то

$$x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

Если $\cos x = -1$, то

$$x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: а) $\pi + 2\pi n$; $\frac{2\pi}{3} + 2\pi m$; $-\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, $k, n, m \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{8\pi}{3}$; 3π .