Средние величины

План лекции:

- 5.1. Сущность и значение средней величины
- 5.2. Виды средних величин
- 5.3. Средняя арифметическая
- 5.4. Средняя гармоническая
- 5.5. Средняя геометрическая
- 5.6. Средняя квадратическая
- 5.7. Степенные средние
- 5.8. Структурные средние (мода и медиана)

Средняя величина

- представляет собой обобщенную количественную характеристику признака в статистической совокупности в конкретных условиях места и времени.

Категорию средней можно раскрыть через понятие ее определяющего свойства.

- Эту величину можно представить в виде функции:
- **$f\ (X1,\ X2,\ .....,\ Xn\ )$**

- Если в приведенной выше функции все величины Х1, Х2.......Хп заменить их средней величиной Х, то значение этой функции должно остаться прежним:

$f\ (X1,\ X2,\ ......\ Xn\ ) = f\ (X,\ X,\ ......,\ X)$

исходное соотношение средней (ИСС)

- На практике определить среднюю во многих случаях можно через **исходное соотношение средней** (ИСС) или ее логическую формулу:

$$\text{ИСС} = \frac{\text{Суммарное значение или объем усредняемого признака}}{\text{Число единиц или объем совокупности.}}$$

формы средней величины:

- средняя арифметическая,
- средняя гармоническая,
- средняя геометрическая,
- средняя квадратическая, кубическая и.т.д.
- Перечисленные средние объединяются в общей формуле **средней степенной** (при различной величине k):

$$\overline{X} = \sqrt[K]{\frac{\sum x^K f_i}{\sum f_i}}$$

Средняя арифметическая простая (невзвешенная).

- Эта форма средней используется в тех случаях, когда расчет осуществляется по несгруппированым данным.

Торговый центр	А	Б	В	Г	Д
Товарооборот (млн.сум)	130	142	125	164	127

Для того, чтобы определить средней месячный товарооборот в расчете на один центр, необходимо воспользоваться следующим исходным соотношением:

$$ИСС = \frac{\text{Общий объем товарооборота (млн. сум.)}}{\textbf{Число торговых центров}}$$

Запишем формулу данной средней

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + Xn}{n} = \frac{\sum X_i}{n}$$

С учетом имеющихся данных получим:

$$\overline{X} = \frac{130 + 142 + 125 + 164 + 127}{5} =$$ 137,6 млн. сум

Рассмотрим следующий пример:**Продажа акций АО "Дока-хлеб" на торгах фондовой биржы (данные условные)**

Сделка	Количество проданных акции, шт	Курс продажи
1	500	1080
2	300	1050
3	1100	1145

ИСС= Общая сумма сделок (сум)

- Количество проданных акций (шт)

$$\overline{X} = \frac{\sum x_i f_i}{\sum f_i}$$

$$\overline{X} = \frac{1080 \times 500 + 1050 \times 300 + 1145 \times 1100}{500 + 300 + 1100} = \frac{2114500}{1900} = 1112.9$$

Расчет средней в интервальном ряду

Возраст (лет)	Число менеджеров (чел).
до 25 25-30 30-40 40-50 50-60 60-и более	7 13 38 42 16 5
Итого	121

$$\overline{X} = \frac{\sum x_i f_i}{\sum f_i}$$

$$\overline{X} = \frac{22.5\times 7 + 27.5\times 13 + 35\times 38 + 45\times 42 + 55\times 16 + 65\times 5}{7+13+38+42+16+5} = 41$$

Свойства средней арифметической

1. Произведение средней на сумму частот равно сумме произведений отдельных вариантов на соответствующим им частоты:

$$\overline{X}\sum f_i = \sum X_i f_i$$

- 2. Сумма отклонений индивидуальных значений признака от средней арифметической равна нулю:

$$\sum (X_i - \overline{X}) f_i = 0$$

- **Сумма квадратов отклонений индивидуальных значений признака от средней арифметической меньше, чем сумма квадратов их отклонений от любой другой произвольной величины С:**

$$\sum (X_i - C)^2 f_i = \sum (X_i - \overline{X} - C)^2 f = \sum \left[(X_i - \overline{X}) + (\overline{X} - C) \right]^2 f_i =$$

$$= \sum \left[(X_i - \overline{X})^2 + 2(X_i - \overline{X})(\overline{X} - C) + (\overline{X} - C)^2 \right] f_i = \sum (X_i - \overline{X})^2 f_i +$$

$$+2 \quad (\overline{X} - C) \sum (X_i - \overline{X}) f_i + \sum (\overline{X} - C)^2 f_i$$

- Следовательно сумма квадратов отклонений индивидуальных значений признака от произвольной величины С больше суммы квадратов их отклонений от своей средней на величину

$$\sum(\overline{X}-C)^2 f_i \quad или (\overline{X}-C)^2 \sum f_i$$

- **Если все усредняемые варианты уменьшить или увеличить на постоянное число, А, то средняя арифметическая соответственно уменьшится или увеличится на ту же величину:**

$$\frac{\sum (X_i + A) f_i}{\sum f_i} = \frac{\sum X_i f_i}{\sum f_i} \pm \frac{\sum A f_i}{\sum f_i} = \overline{X} \pm A$$

- **Если все варианты значений признака уменьшит или увеличить в А раз, то средняя также соответственно увеличится или уменьшится А раз:**

$$\frac{\sum \frac{X_i}{A} f_i}{\sum f_i} = \frac{\frac{1}{A} \sum X_i f_i}{\sum f_i} = \frac{1}{A} \overline{X}$$

- **Если все веса уменьшить или увеличить в А раз, то средняя арифметическая от этого не изменится:**

$$\frac{\sum X_i \frac{f_i}{A}}{\sum \frac{f_i}{A}} = \frac{\frac{1}{A}\sum X_i f_i}{\frac{1}{A}\sum f_i} = \overline{X}$$

Средняя гармоническая взвешенная.

- Данная форма используется, когда известен числитель исходного соотношения средней, но неизвестен его, знаменатель.

$$\overline{X} = \frac{\sum \omega_i}{\sum \frac{\omega_i}{X_i}}$$

Средняя гармоническая невзвешенная

- Эта форма средней, используемая значительно реже, имеет следующий вид:

$$\overline{X} = \frac{n}{\sum \frac{1}{X_i}}$$

Средняя геометрическая.

- Еще одной формулой, по которой может осуществляться расчет среднего показателя, является средняя геометрическая:

$$\overline{X} = \sqrt[K]{X_1 \bullet X_2 \bullet X_3 \bullet \ldots . \bullet X_K} = \sqrt[K]{\prod X_i}$$

$$X = \sqrt[\sum m]{X_1^{m1} \bullet X_2^{m2} \bullet X_3^{m3} \bullet \ldots \bullet X_K^{mi}} = \sqrt[\sum m]{\prod X_i^{mi}}$$

Средняя квадратическая.

- В основе вычислений ряда сводных статистических показателей лежит средняя квадратическая.

$$\overline{X} = \sqrt{\frac{\sum X_i^2}{n}}$$

$$\overline{X} = \sqrt{\frac{\sum X_i^2 f_i}{\sum f_i}}$$

Структурные средние

- **Мода** представляет собой значение изучаемого признака, повторяющееся и наибольшей частотой.
- **Медианой** называется значение признака, приходящееся на середину ранжированной (упорядоченной) совокупности.

Главное свойство медианы

- заключается в том, что сумма абсолютных отклонений значений признака от медианы меньше, чем от любой другой величины:

$$\sum \left| X_i - Me \right| = \min$$

Определение моды и медианы по **интервальным рядам**

- Мода

$$M_o = X_o + I \times \frac{(f_{Mo} - f_{Mo-1})}{(f_{Mo} - f_{Mo-1}) + (f_{Mo} - f_{Mo+1})}$$

где Хо — нижняя граница модального интервала (модальным наывается интервал, имеющий наибольшую частоту)

i- величина модального интервала:

fMo - частота модального интервала,

fMo1 - частота интервала, предществующего модальному:

fMo+1- частота интервала, следующего за модальным.

- Медиана.

$$Me = X_o + I \times \frac{\frac{1}{2}\sum f_i - S_{Me-1}}{f_{Me}}$$

где Xo - нижняя граница медианного интервала (медианным называется первый интервал, накопленная частота которого превышает половину общей суммы частот);

I - величина медианного интервала:

Sme-1 - накопленная частота интервала, предшествующего медианному;

fme - частота медианного интервала.