Задача 16

Задача 16

Тип задания по кодификатору требований	Планиметрическая задача на нахождение геометрических величин (длин, углов, площадей).
Характеристика задания	Задача на вычисление длин, площадей, углов, связанных с плоскими фигурами.
Комментарий	Довольно сложная задача, либо с двумя вопросами (один из которых — на доказательство), либо требующая рассмотрения двух случаев и приводящая к двум разным ответам.

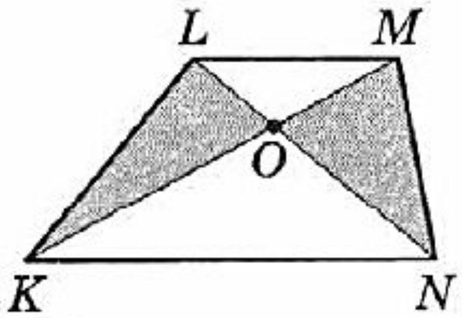
Задача 16

Пример задания Диагонали AC и BD трапеции $ABCD$ пересекаются в точке O. Площади треугольников AOD и BOC равны соответственно 49 и 36.

а) Докажите, что площади треугольников AOB и COD равны.

б) Найдите площадь трапеции.

РЕШЕНИЕ. а) В условии задачи не сказано, какие стороны трапеции являются её боковыми сторонами, а какие — основаниями. Докажем вначале, что площади двух треугольников, общая вершина которых находится в точке пересечения диагоналей, а основаниями служат боковые стороны трапеции, равны. Рассмотрим трапецию $KLMN$ с основаниями KN и LM, диагонали которой пересекаются в точке O (см. рисунок). Площади треугольников KLN и KMN равны, поскольку эти треугольники имеют общее основание KN и их высоты, проведённые к этому основанию, равны как высоты трапеции. Но тогда $S_{\triangle KOL} = S_{\triangle KLN} - S_{\triangle KON} = S_{\triangle KMN} - S_{\triangle KON} = S_{\triangle MON}$, что и требовалось.



По условию $S_{\triangle AOD} \neq S_{\triangle BOC}$, поэтому AD и BC являются не боковыми сторонами, а основаниями трапеции. Следовательно, треугольники AOB и COD являются треугольниками, общая вершина которых находится в точке пересечения диагоналей

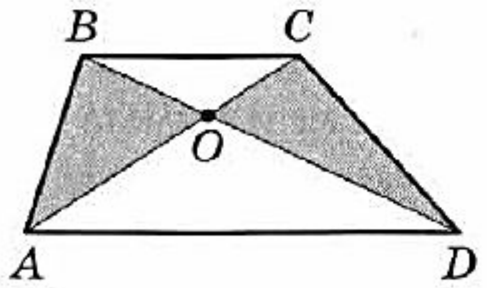
Задача 16

По условию $S_{\triangle AOD} \neq S_{\triangle BOC}$, поэтому AD и BC являются не боковыми сторонами, а основаниями трапеции. Следовательно, треугольники AOB и COD являются треугольниками, общая вершина которых находится в точке пересечения диагоналей данной трапеции, а основаниями служат её боковые стороны. Значит, их площади равны.

Задача 16

б) Треугольники AOD и BOC подобны по двум углам, и отношение их площадей равно квадрату коэффициента подобия k. Поэтому $k = \frac{7}{6} = \frac{AO}{OC}$. Поскольку треугольники ABO и CBO имеют общую высоту, проведённую из вершины B, отношение их площадей равно отношению их оснований, т. е. $\frac{S_{ABO}}{S_{CBO}} = \frac{AO}{OC} = \frac{7}{6}$. Значит, $S_{ABO} = \frac{7}{6} S_{CBO} = \frac{7}{6} \cdot 36 = 42$. Поэтому и $S_{COD} = 42$. Но тогда

$$S_{ABCD} = 49 + 36 + 42 + 42 = 169.$$



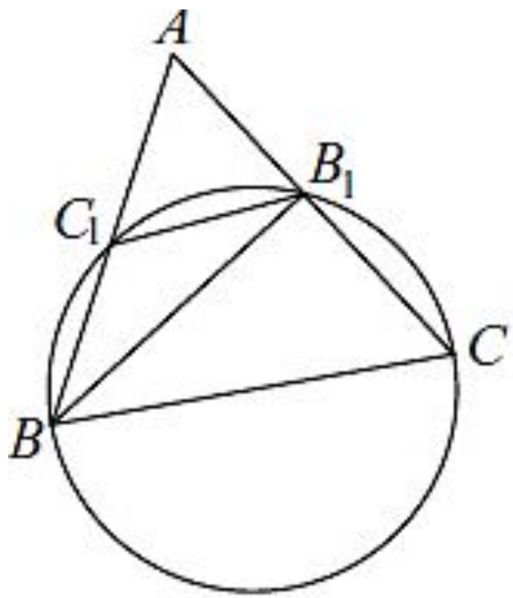
Ответ. 169.

Задача 16

Окружность проходит через вершины B и C треугольника ABC и пересекает AB и AC в точках C_1 и B_1 соответственно.

а) Докажите, что треугольник ABC подобен треугольнику AB_1C_1.

б) Вычислите длину стороны BC и радиус данной окружности, если $\angle A = 45^\circ$, $B_1C_1 = 6$ и площадь треугольника AB_1C_1 в восемь раз меньше площади четырёхугольника BCB_1C_1.



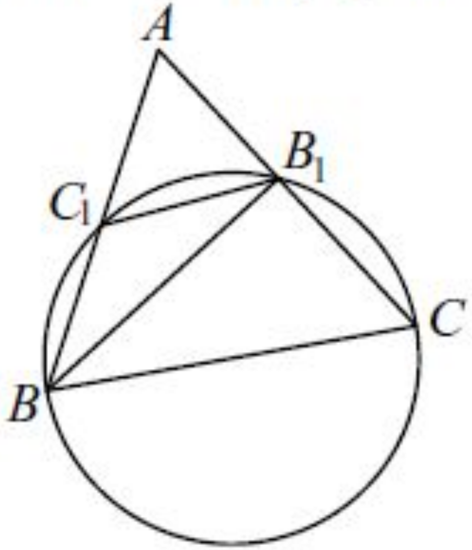
Задача 16

Решение.

а) Заметим, что $\angle AB_1C_1 + \angle C_1B_1C = 180^\circ$. Четырёхугольник BCB_1C_1 вписан в окружность, поэтому $\angle C_1BC + \angle C_1B_1C = 180^\circ$. Значит,

$$\angle AB_1C_1 = \angle C_1BC = \angle ABC.$$

Следовательно, треугольники ABC и AB_1C_1 подобны по двум углам.



Задача 16

б) Площадь треугольника AB_1C_1 в восемь раз меньше площади четырёхугольника BCB_1C_1, поэтому площадь треугольника ABC в девять раз больше площади треугольника AB_1C_1 и коэффициент подобия этих треугольников равен 3. Отсюда следует, что $BC = 3B_1C_1 = 18$.

Пусть $AB_1 = x$, тогда $AB = 3x$. Найдём BB_1 по теореме косинусов:

$$BB_1^2 = x^2 + 9x^2 - 6x \cdot x \cdot \cos 45^\circ = x^2\left(10 - 3\sqrt{2}\right).$$

Следовательно,

$$BB_1 = x\sqrt{10 - 3\sqrt{2}}.$$

Теперь по теореме синусов из треугольника ABB_1 получаем

$$\frac{AB}{\sin \angle AB_1B} = \frac{BB_1}{\sin \angle A}; \quad \sin \angle AB_1B = \frac{AB}{BB_1} \sin \angle A.$$

Но $\sin \angle AB_1B = \sin \angle BB_1C$, поскольку синусы смежных углов равны.

Получаем

$$\sin \angle BB_1C = \frac{AB}{BB_1} \sin \angle A = \frac{3x}{x\sqrt{10 - 3\sqrt{2}}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{10 - 3\sqrt{2}}}.$$

Теперь находим радиус окружности, описанной около треугольника BB_1C:

$$2R = \frac{BC}{\sin \angle BB_1C} = 6\sqrt{20 - 6\sqrt{2}}; \quad R = 3\sqrt{20 - 6\sqrt{2}}.$$

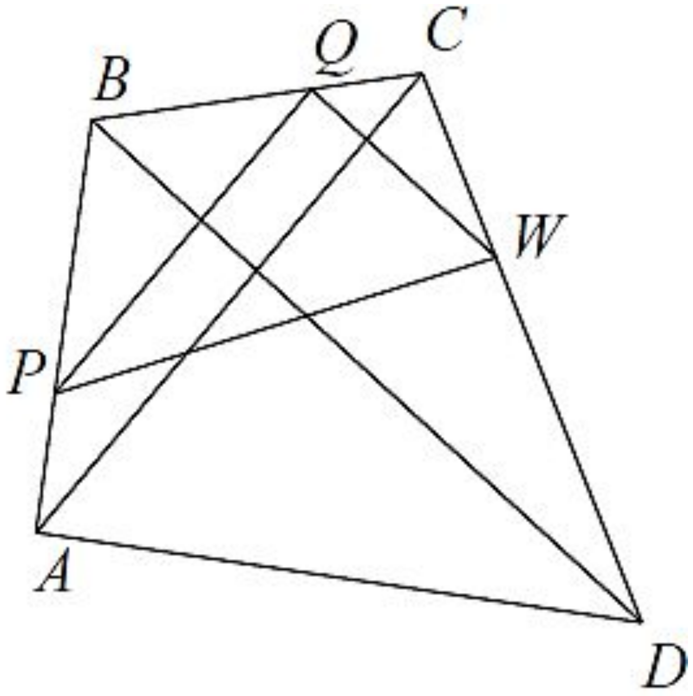
Ответ: б) 18; $3\sqrt{20 - 6\sqrt{2}}$.

Задача 16

Точки P, Q, W делят стороны выпуклого четырёхугольника $ABCD$ в отношении $AP:PB=CQ:QB=CW:WD=1:4$, радиус окружности, описанной около треугольника PQW, равен 10, $PQ=16$, $QW=12$, угол PWQ острый.

а) Докажите, что треугольник PQW прямоугольный.

б) Найдите площадь четырёхугольника $ABCD$.



Решение.

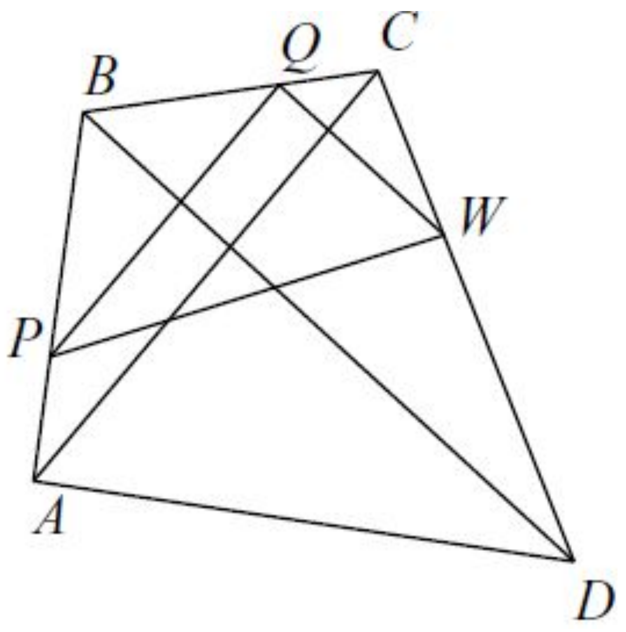
а) Треугольники ABC и PBQ подобны с коэффициентом подобия

$$k = AB : PB = CB : QB = 5 : 4.$$

Задача 16

Отсюда следует, что PQ и AC параллельны и $AC = k \cdot PQ = \frac{5}{4} \cdot 16 = 20$. Аналогично QW и BD параллельны и $BD = 60$. Угол между прямыми AC и BD равен углу между прямыми PQ и QW. По теореме синусов в треугольнике PQW имеем $2R = \frac{PQ}{\sin \angle QWP} = \frac{QW}{\sin \angle QPW}$, следовательно,

$$20 = \frac{16}{\sin \angle QWP} = \frac{12}{\sin \angle QPW}.$$



Отсюда $\sin^2 \angle QWP + \sin^2 \angle QPW = \frac{256}{400} + \frac{144}{400} = 1$.

Следовательно, $\sin^2 \angle QPW = \cos^2 \angle QWP$, откуда, учитывая, что угол W острый, находим, что $\sin \angle QPW = \cos \angle QWP$, и, значит, $\angle QPW + \angle QWP = \frac{\pi}{2}$, то есть $\angle PQW = \frac{\pi}{2}$. Отсюда следует, что треугольник PQW прямоугольный.

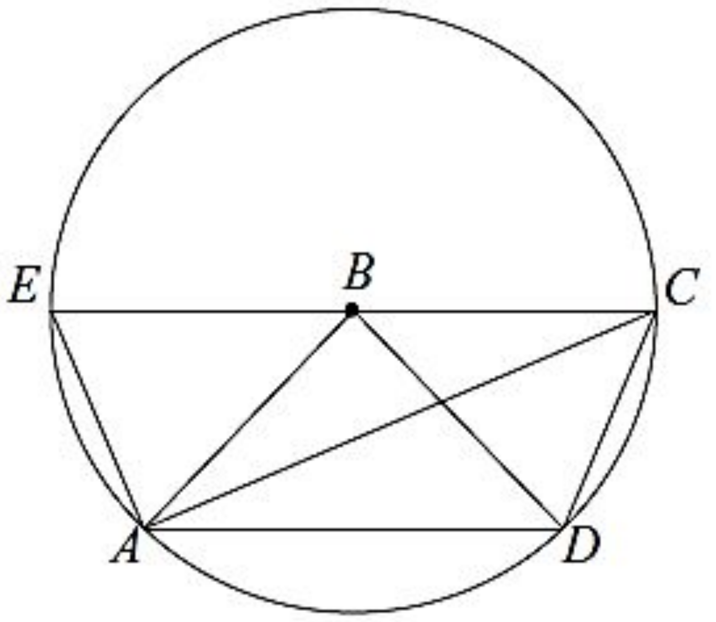
б) Угол между диагоналями четырёхугольника $ABCD$ прямой. Поэтому его площадь равна $S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 60 = 600$.

Ответ: б) 600.

Дана трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC. Диагональ BD разбивает её на два равнобедренных треугольника с основаниями AD и CD.
а) Докажите, что луч AC — биссектриса угла BAD.
б) Найдите CD, если известны диагонали трапеции: $AC = 12$ и $BD = 6,5$.

Задача 16

<u>**Решение.**</u>
а) $\angle BAC = \angle ACB = \angle CAD$, следовательно, AC — биссектриса угла BAD.
б) Поскольку $BA = BD = BC = 6,5$, точки A, D и C лежат на окружности радиуса 6,5 с центром в точке B. Продолжим основание BC за точку B до пересечения с этой окружностью в точке E. Тогда EC — диаметр окружности, а $ADCE$ — равнобедренная трапеция. Поэтому $AE = CD$, а так как точка A лежит на окружности с диаметром CE, получаем, что $\angle CAE = 90°$. Из прямоугольного треугольника CAE находим, что $AE = \sqrt{CE^2 - AC^2} = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5$. Следовательно, $CD = AE = 5$.



Ответ: б) 5.

Диагонали равнобедренной трапеции $ABCD$ с основаниями BC и AD перпендикулярны. Окружность с диаметром AD пересекает боковую сторону CD в точке M, а окружность с диаметром CD пересекает основание AD в точке N. Отрезки AM и CN пересекаются в точке P.

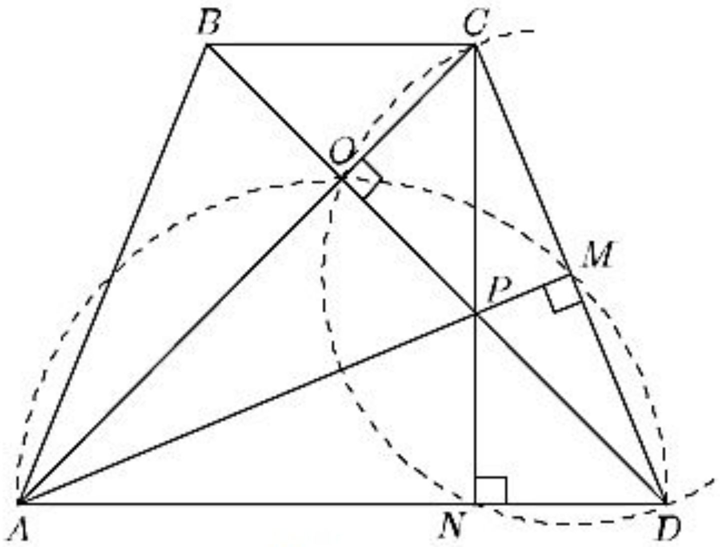
а) Докажите, что в четырёхугольник $ABCP$ можно вписать окружность.

б) Найдите радиус этой окружности, если $BC = 7$, $AD = 17$.

Задача 16

Решение.

а) Точка M лежит на окружности с диаметром AD, поэтому $AM \perp CD$, то есть AM — высота треугольника ACD. Аналогично CN — высота треугольника ACD. Пусть O — точка пересечения диагоналей трапеции. По условию задачи $DO \perp AC$, значит, DO — третья высота треугольника ACD. Высоты треугольника пересекаются в одной точке, следовательно, точка P пересечения высот AM и CN лежит на прямой OD, а значит, на диагонали BD.



Трапеция равнобедренная, а её диагонали перпендикулярны, поэтому $\angle CBD = \angle CAD = 45°$. Значит, $CP = BC$, а так как $CO \perp BP$, прямая CO — серединный перпендикуляр к отрезку BP. Точка A лежит на прямой CO, поэтому $AP = AB$. Тогда $AB + CP = AP + BC$, то есть суммы противоположных сторон четырёхугольника $ABCP$ равны. Следовательно, в него можно вписать окружность.

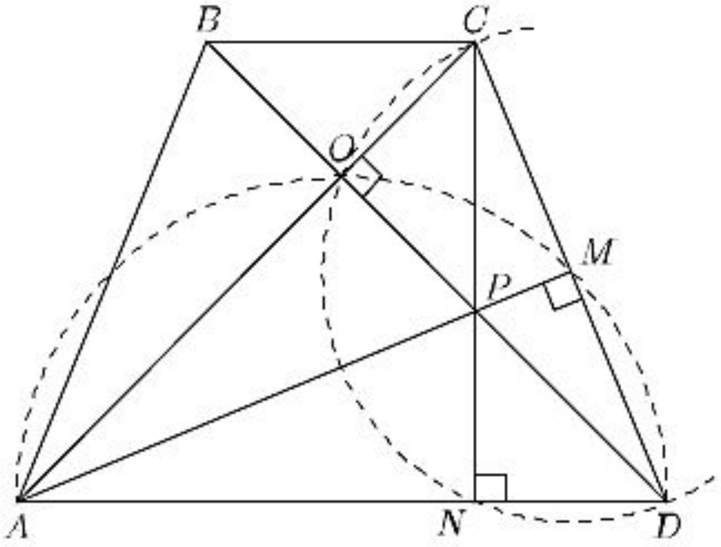
Задача 16

б) Точка N — основание высоты равнобедренной трапеции $ABCD$, опущенной на основание AD, поэтому

$$DN=\frac{1}{2}(AD-BC)=\frac{1}{2}(17-7)=5,\quad AN=\frac{1}{2}(AD+BC)=\frac{1}{2}(17+7)=12.$$

Кроме того,

$$CP=BC=7,\ AP=AB=CD=\sqrt{DN^2+CN^2}=\sqrt{5^2+12^2}=13,$$
$$AC=AN\sqrt{2}=12\sqrt{2},\ BP=BC\sqrt{2}=7\sqrt{2}.$$



Площадь S четырёхугольника с перпендикулярными диагоналями равна половине произведения его диагоналей, а радиус r окружности, вписанной в четырёхугольник $ABCP$, равен его площади, делённой на полупериметр p четырёхугольника. Следовательно,

$$r=\frac{S}{p}=\frac{\frac{1}{2}AC\cdot BP}{AB+BC}=\frac{\frac{1}{2}\cdot 12\sqrt{2}\cdot 7\sqrt{2}}{13+7}=\frac{84}{20}=4{,}2.$$

Ответ: б) 4,2.

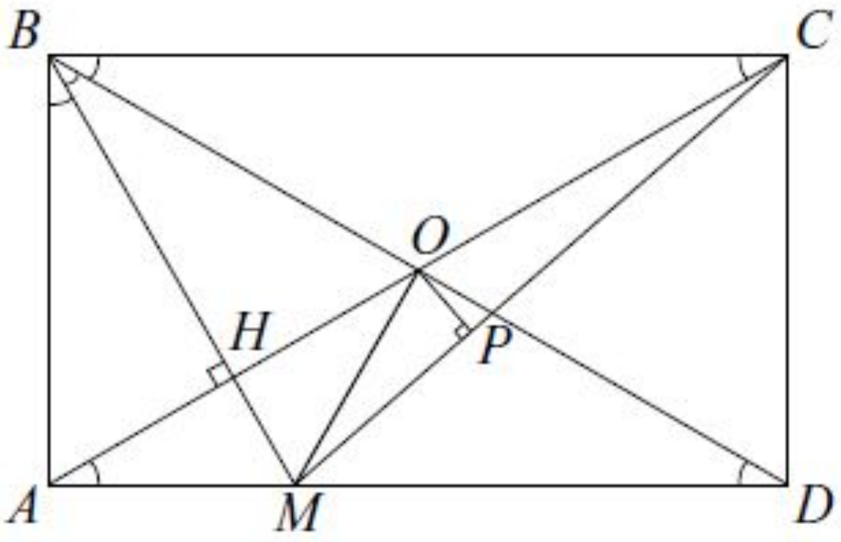
Прямая, проходящая через вершину B прямоугольника $ABCD$ перпендикулярно диагонали AC, пересекает сторону AD в точке M, равноудалённой от вершин B и D.

а) Докажите, что $\angle ABM = \angle DBC = 30^\circ$.

б) Найдите расстояние от центра прямоугольника до прямой CM, если $BC = 9$.

Задача 16

Решение.



а) Обозначим $\angle CBD = \alpha$. Треугольник BMD равнобедренный, поэтому $\angle DBM = \angle BDM = \angle CBD = \alpha$.

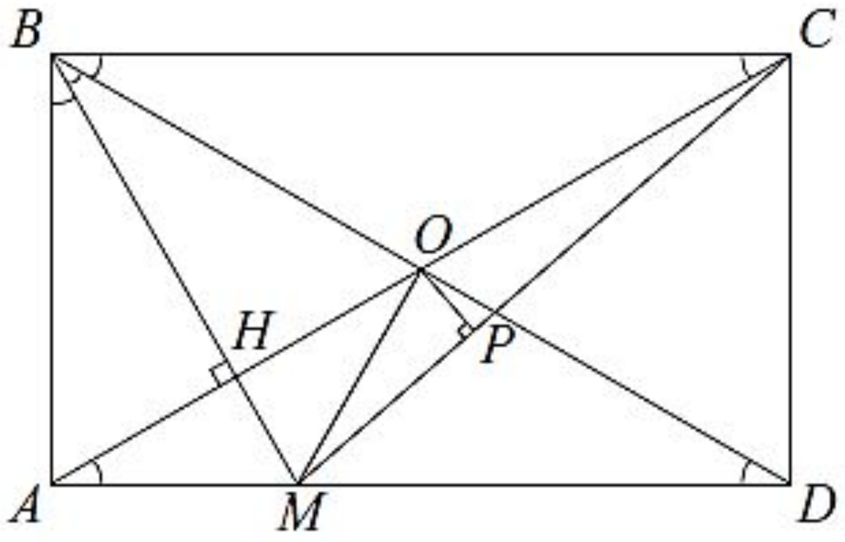
Прямоугольные треугольники ACB и BDA равны по катету и гипотенузе, поэтому $\angle ACB = \angle ADB = \alpha$.

Пусть H — точка пересечения BM и AC. Тогда BH — высота прямоугольного треугольника ABC, проведённая из вершины прямого угла. Значит, $\angle ABH = \angle ACB = \alpha$.

Следовательно, $\angle ABM = \angle DBM = \angle CBD = \frac{1}{3} \cdot 90^\circ = 30^\circ$.

б) Имеем $AB = BC \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{9}{\sqrt{3}} = 3\sqrt{3}$,

Задача 16



$$AM = AB\,\mathrm{tg}\,30^\circ = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 3,\ MD = AD - AM = 9 - 3 = 6$$

Из прямоугольного треугольника CMD находим

$$MC = \sqrt{CD^2 + MD^2} = \sqrt{\left(3\sqrt{3}\right)^2 + 6^2} = 3\sqrt{7}.$$

Пусть O — центр прямоугольника $ABCD$. Расстояние от центра O прямоугольника $ABCD$ до прямой CM равно высоте OP треугольника CMO. Площадь треугольника CMO равна половине площади треугольника ACM:

$$S_{OCM} = \frac{1}{2}S_{ACM} = \frac{1}{4}AM \cdot AB = \frac{1}{2}CM \cdot OP; \quad OP = \frac{AM \cdot AB}{2 \cdot MC} = \frac{3 \cdot 3\sqrt{3}}{2 \cdot 3\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}.$$

Ответ: б) $\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$.