Симплексная таблица и ее преобразование (алгоритм симплекс-метода)

$$\begin{cases} C(x) = (c, x) \to \max \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases} \qquad (1)$$

Пусть система ограничений $Ax=b$ преобразована в приведенную форму:

$$x_i + \sum_{j \in \omega} a'_{ij} x_j = x_{i0}, \quad i \in \sigma \qquad (2)$$

$$x_{i0} \geq 0, \ i \in \sigma$$

Будем считать, что в приведенной форме (2) базисные вектора расположены первыми по порядку, т.е. $\sigma = \{1,2,...,m\}$ В качестве исходного базиса необходимо выбирать единичный базис, так как в этом случае все вектора

$$A'_j = A_\sigma^{-1} A_j = E^{-1} A_j \doteq E A_j = A_j$$

Координаты вектора A_j совпадают с координатами его разложения по базису:

$$A_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} = a_{1j} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix} + a_{2j} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix} + ... a_{mj} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ ... \\ 1 \end{pmatrix}$$

БДП $x^0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$ известен изначально.

Его координаты: $$x_i^0 = \begin{cases} x_{i0} & i \in \sigma \\ 0 & i \in \omega \end{cases}$$

Форма симплексной таблицы

			c_1	…	c_m	…	c_k	…	c_n
c_σ	Базис	$A_0 = b$	A_1	…	A_m	…	A_k	…	A_n
c_1	A_1	x_{10}	1	…	0	…	a'_{1k}	…	a'_{1n}
c_2	A_2	x_{20}	0	…	0	…	a'_{2k}	…	a'_{2n}
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
c_m	A_m	x_{m0}	0	…	1	…	a'_{mk}	…	a'_{mn}
	$C(x)/\Delta_j$	$C(x^0)$	0	…	0	…	Δ_k	…	Δ_n

c_σ – коэффициенты целевой функции при базисных переменных;

$A_1, A_2, \ldots, A_n$ – векторы-столбцы решаемой задачи;

$c_1, c_2, \ldots, c_n$ – коэффициенты целевой функции;

$C(x)$ – значение целевой функции на плане x;

Δ_j – двойственные оценки.

Из симплексной таблицы легко выписывается БДП:

$$x^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) = (x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{m0}, 0, 0, \ldots, 0)$$

Значение целевой функции на этом плане вычисляется по формуле:

$$C(x^0) = \sum_{i\in\sigma} c_i x_i^0 = c_1 x_1^0 + c_2 x_2^0 ... + c_m x_m^0$$

Двойственные оценки Δ_j вычисляются по формуле:

$$\Delta_j = \sum_{i\in\sigma} c_i a'_{ij} - c_j, \quad j \in \overline{1,n}$$

Переход к новому БДП осуществляется при помощи двух правил.

<u>Правило 1</u>. *Определение номера вектора, вводимого в базис.*

$$\min_{1\le j\le n}\{\Delta_j\} = \Delta_k < 0 \qquad (3)$$

<u>Правило 2.</u> *Определение номера вектора, выводимого из базиса.*

Необходимо определить номер *r* выводимого из базиса вектора A_r, $r \in \sigma$. Новый носитель плана будет выглядеть так: $\sigma^{\text{нов}} = \sigma \cup \{k\} \setminus \{r\}$.

$$\min_{a'_{ik}>0}\left\{\frac{x_i^0}{a'_{ik}}\right\} = \frac{x_r^0}{a'_{rk}} \qquad (4)$$

(предполагаем, что минимум достигается при $i=r$) . Номер выводимого вектора определяется с помощью симплекс-таблицы:

$$\frac{x_r^0}{a'_{rk}} = \frac{x_{r0}}{a'_{rk}} \qquad (5)$$

<u>Опр.</u> Элемент a'_{rk}, стоящий на пересечении вектора, вводимого в базис, и вектора, выводимого из базиса, называется *ведущим* (или *разрешающим*) *элементом* симплексной таблицы.

Фрагмент симплексной таблицы

			…	c_j	…	c_k
c_σ	базис	$A_0 = b$	…	A_j	…	A_k
…	…	…	…	…	…	…
c_i	A_i	x_{i0}	…	a'_{ij}	…	a'_{ik}
…	…	…	…	…	…	…
c_r	A_r	x_{r0}	…	a'_{rj}	…	a'_{rk}
…	…	…	…	…	…	…
	$C(x)/\Delta_j$	$C(x)$		Δ_j		Δ_k

Формулы пересчета элементов симплекс-таблицы при переходе к новому базису:

$$\begin{cases} a_{ij}^{нов} = a'_{ij} - \dfrac{a'_{rj}}{a'_{rk}} a'_{ik}, \quad j = \overline{0,n},\ j \neq k, \quad i \in \sigma, i \neq r \\ \qquad\qquad a_{kj}^{нов} = \dfrac{a'_{rj}}{a'_{rk}}, \quad j = \overline{0,n} \\ \qquad\qquad a_{ik}^{нов} = \delta_{ik} = \begin{cases} 1 & i = k \\ 0 & i \neq k \end{cases} \end{cases} \qquad (6)$$

δ_{ik} - символ Кронекера

Координаты нового плана вычисляются по формулам:

$$\begin{cases} x_{i0}^{нов} = x_{i0} - \dfrac{x_{r0}}{a'_{rk}} a'_{ik} , \quad i \in \sigma , \quad i \neq k \\ x_{k0}^{нов} = \dfrac{x_{r0}}{a'_{rk}}, \quad i = k \end{cases} \qquad (7)$$

Новые двойственные оценки:

$$\Delta_j^{нов} = \Delta_j - \frac{a'_{rj}}{a'_{rk}} \Delta_k \qquad (8)$$

Значение целевой функции на новом плане равно

$$C(x^{нов}) = C(x^0) - \frac{x_{r0}}{a'_{rk}} \Delta_k \qquad (9)$$

Теорема.

Для нового базисного допустимого плана имеет место неравенство $C(x^{\text{нов}}) \geq C(x^0)$, т.е. полученный путем преобразований план не хуже, чем план, имеющийся на предыдущей итерации.

П р и м е р .

$$C(X) = x_1 + 2x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 3 \\ x_1 + 3x_2 \le 5 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Приведем ЗЛП к каноническому виду путем введения дополнительных переменных:

$$C(X) = x_1 + 2x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 3x_2 + x_4 = 5 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0. \end{cases}$$

Начальный БДП x^0 = (0; 0; 3; 5)

Решение ЗЛП

c_σ	базис	$A_0=b$	1 A_1	2 A_2	0 A_3	0 A_4
0	A_3	3	1	1↓	1	0
0	←A_4	5	1	3	0	1
	$C(x)/\Delta_j$	0	-1	-2^*	0	0
0	←A_3	4/3	2/3↓	0	1	-1/3
2	A_2	5/3	1/3	1	0	1/3
	$C(x)/\Delta_j$	10/3	$-1/3^*$	0	0	2/3
1	A_1	2	1	0	3/2	-1/2
2	A_2	1	0	1	-1/2	1/2
	$C(x)/\Delta_j$	4	0	0	1/2	1/2

Выполнив преобразования симплекс-таблицы, получаем оптимальный план $x^{\text{опт}}$ = (2; 1; 0; 0) и значение целевой функции на этом плане $C(x^{\text{опт}})$ = 4.