Метод искусственного базиса

Цель метода искусственного базиса – построение начального

БДП (либо установить отсутствие БДП).

ЗЛП задана в канонической форме, ($b_i \geq 0\,, \quad i = \overline{1,m}$

Этого всегда можно добиться, умножив уравнения на -1):

$$C(x) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + ... + c_n x_n \to \max$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (1)$$

$$x_1, x_2, ..., x_n \geq 0$$

Вспомогательная задача к ЗЛП (1):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m \end{cases} \qquad \textbf{(2)}$$

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+m} \geq 0$$

$$\widetilde{C}(\widetilde{x}) = -x_{n+1} - x_{n+2} - \ldots - x_{n+m} \to \max$$

Вектор составлен из естественных переменных ЗЛП (1.) и *искусственных переменных*, введенных в ЗЛП (2):

$$\widetilde{x} = (\underbrace{x_1, x_2, \ldots, x_n}_{\text{естественные переменные}}, \underbrace{x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+m}}_{\text{искусственные переменные}})$$

Искусственные переменные не несут никакого экономического смысла. Они необходимы только для поиска начального БДП.

Единичные векторы $A_{n+1}, A_{n+2}, \ldots, A_{n+m}$ образуют ***искусственный базис*** системы ограничений ЗЛП (2). Они представляют собой единичную матрицу размера $m \times m$.

В ЗЛП (2) мы имеем начальный БДП, в котором первые n координат равны нулю.

Пусть множество допустимых планов задачи (1) - D_1, а множество допустимых планов задачи (2) - D_2.

Теорема. **(**О существовании плана ЗЛП).

Пусть $\tilde{x}^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*, x_{n+1}^*, \ldots, x_{n+m}^*)$ оптимальный план ЗЛП (2), тогда:

1. Если $\tilde{C}(\tilde{x}^*) = 0$, то план $x^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_m^*)$ является планом задачи (1), т.е. $x^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ $\in D_1$.
2. Если $\tilde{C}(\tilde{x}^*) < 0$, то ЗЛП (1) не имеет допустимых планов, т.е. D_1 есть пустое множество ($D_1 = \varnothing$).

<u>Замечание.</u> Вспомогательная задача (2) всегда имеет оптимальный план.

П р и м е р: Рассмотрим ЗЛП:

$$C(x) = 2x_1 - x_2 \to \min$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 14 \\ x_1 - x_2 \geq 8 \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Приведем данную ЗЛП к каноническому виду:

$$C_1(x) = -2x_1 + x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 14 \\ x_1 - x_2 - x_4 = 8 \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

Единичного базиса нет, поэтому построим вспомогательную задачу, предварительно введя две искусственные переменные $x_5 \geq 0$ и $x_6 \geq 0$.

$$\widetilde{C}(\widetilde{x}) = -x_5 - x_6 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_5 = 14 \\ x_1 - x_2 - x_4 \quad + x_6 = 8 \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

			-2	1	0	0	x	x
			0	0	0	0	-1	-1
c_σ	Базис	$A_0 = b$	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
-1 -1	A_5 A_6	14 8	1 **1**	1 -1	-1 0	0 -1	1 0	0 1
	$/\Delta_j$	-22	-2	0	1	1	0	0
-1 0	A_5 A_1	6 8	0 1	**2** -1	-1 0	1 -1	1 0	-1 1
	$/\Delta_j$	-6	0	-2	1	-1	0	2
0 0	A_2 A_1	3 11	0 1	1 0	-0,5 -0,5	0,5 -0,5	0,5 0,5	-0,5 0,5
	$/\Delta_j$	0	0	0	0	0	1	1
1 -2	A_2 A_1	3 11	0 1	1 0	-0,5 -0,5	0,5 -0,5		
	$/\Delta_j$	-19	0	0	0,5	1,5	0	1

Решив данную вспомогательную задачу симплекс-методом, мы найдем ее оптимальный план и значение целевой функции на этом плане:

$$\widetilde{x}^* = (11;\, 3;\, 0;\, 0;\, 0;\, 0) \qquad \widetilde{C}(\widetilde{x}^*) = 0$$

Оптимальный план вспомогательной задачи есть начальный БДП основной задачи. После чего необходимо приступить к ее решению также симплекс-методом. Оптимальный план основной задачи:

$$x^* = (11;\, 3;\, 0;\, 0); \quad C_1(\mathrm{x}^*) = -19; \quad C(\mathrm{x}^*) = 19$$

Признак неограниченности целевой функции

ЗЛП в канонической форме:

$$\begin{cases} C(x) = (c, x) \to \max \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases} \qquad (1)$$

Пусть $x^0 = (x_1^{\ 0}, x_2^{\ 0}, \ldots, x_n^{\ 0})$ - БДП задачи (1)

$Ax^0 = b$ эквивалентно $\sum_{j=1}^{n} A_j x_j^0 = b$

σ - носитель плана, следовательно - $\sum_{i \in \sigma} A_i x_i^0 = b$,

или в матричной форме записи:

$$A_\sigma x_\sigma^0 = b \qquad (2)$$

В уравнении (2) $x_{\sigma}{}^{0}$ представляет часть исходного вектора x^0, из которого удалены нулевые (свободные) компоненты. Для плана x^0 можно построить симплекс-таблицу, причем предположим, что среди двойственных оценок имеются отрицательные , т.е. план не оптимальный.

Теорема. О неразрешимости ЗЛП.

Если для некоторого БДП x^0 существует $\Delta_k < 0$ и все элементы k-го вектор-столбца меньше или равны нулю, т.е. $a'_{ik} \leq 0$, $i \in \sigma$, то ЗЛП неразрешима. Другими словами, в данной ситуации целевая функция не ограничена на допустимом множестве, т. е. $C(x) \rightarrow +\infty$.

Пример:

$$C(x) = x_1 + x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_4 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 + x_5 = 3 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,5}$$

Единичный базис состоит из векторов A_3, A_4, A_5. Вырожденный БДП x^0 = (0; 0; 1; 0; 3).

Решение ЗЛП

c_σ	Базис	$A_0=b$	1 A_1	1 A_2	0 A_3	0 A_4	0 A_5
0	A_3	1	-1↓	1	1	0	0
0	$\leftarrow A_4$	0	**1**	-2	0	1	0
0	A_5	3	-1	2	0	0	1
	$C(x)/\Delta_j$	0	-1^*	-1	0	0	0
0	A_3	1	0	-1	1	1	0
1	A_1	0	1	-2	0	1	0
0	A_5	3	0	0	0	1	1
	$C(x)/\Delta_j$	0	0	-3	0	1	0

На второй итерации $\Delta_2 = -3 < 0$. Вводим в базис вектор A_2, однако координаты этого вектора . На основании только что доказанной теоремы можно сделать заключение, что данная ЗЛП неразрешима, она не имеет оптимальных планов, а ее целевая функция $C(x) \to +\infty$ на множестве допустимых планов.