Глава 2. Применение теории двойственности в экономике.

2.1. Определение двойственной задачи

Каждой ЗЛП может быть поставлена в соответствие по определенным правилам другая ЗЛП, которая называется *двойственной* задачей. В этом случае исходная ЗЛП называется *прямой* задачей.

$$\begin{cases} C(x) = (c, x) \to \max \\ Ax \le b \\ x \ge 0 \end{cases} \qquad \textbf{(1)}$$

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n); \qquad c = (c_1, c_2, \dots, c_n);$$

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}; \qquad \text{матрица} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11}, \dots, a_{1n} \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{m1}, \dots, a_{mn} \end{pmatrix}$$

Целевая функция $$(c, x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

Введем вектор двойственных переменных

$y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$

Построим ЗЛП (2)

$$\begin{cases} B(y) = (b, y) \to \min \\ A^{\mathrm{T}} y \ge c \\ y \ge 0 \end{cases} \qquad \textbf{(2)}$$

Задача (2) есть двойственная задача к ЗЛП (1).

$$B(y) = (b, y) = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

Матрица A^{T} – транспонированная матрица A.

D_1 область допустимых планов задачи (1), т.е. допустимый план $x \in D_1$, а D_2 – область допустимых планов задачи (2), т.е. допустимый план $y \in D_2$.

Замечание. Так как $A^{\mathrm{T}} \cdot y = y \cdot A$, то непрямые (структурные) ограничения в двойственной задаче могут быть записаны в виде $yA \geq c$.

Правила построения двойственной задачи для исходной задачи вида (1):

- Количество переменных в двойственной задаче (2) равно количеству непрямых (структурных) ограничений прямой задачи (1).
- Целевая функция исходной задачи задается на максимум, а целевая функция двойственной задачи – на минимум.

- Матрица коэффициентов системы ограничений *A* в двойственной задаче транспонируется.
- Вектор коэффициентов целевой функции задачи (1) становится вектором системы ограничений в двойственной задаче (2), а вектор правых частей ограничений задачи (1) становится вектором коэффициентов целевой функции двойственной задачи (2).
- Знаки отношений “ ≤ ” в системе ограничений задачи (1) заменяются на знаки отношений “ ≥ ” в ограничениях задачи (2).

П р и м е р 1.

$$C(x) = 7x_1 + 6x_2 + 4x_3 \to \max$$

$$\begin{array}{l} (y_1 \to) \\ (y_2 \to) \end{array} \quad \begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 \le 8 \\ 4x_1 - x_2 + x_3 \le 9 \end{cases}$$

$$x_j \ge 0; \qquad j = \overline{1,3}$$

$$B(y) = 8y_1 + 9y_2 \to \min$$

$$\begin{cases} y_1 + 4y_2 \ge 7 \\ 3y_1 - y_2 \ge 6 \\ -y_1 + y_2 \ge 4 \end{cases}$$

$$y_i \ge 0; \qquad i = \overline{1,2}$$

Количество ограничений прямой и двойственной задач

Ограничения	Прямая задача	Двойственная задача
Прямые	N	M
Непрямые (структурные)	M	N
Всего	$n + m$	$m + n$

Утверждение. Задача двойственная к двойственной есть прямая задача.

Умножим цел. функцию и систему ограничений (2) на (- 1).

$$\begin{cases} (-b, y) \to \max \\ -A^{\mathrm{T}} y \le -c \\ y \ge 0 \end{cases} \qquad (2')$$

$z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$ - вектор, компонентами которого являются неизвестные в двойственной задаче к задаче (2′).

Двойственная задача:

$$\begin{cases} (-c, z) \to \min \\ (-A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} z \ge -b \\ z \ge 0. \end{cases} \qquad (2'')$$

Умножим целевую функцию и ограничения на (-1) и учтем, что $(A^T)^T = A$, тогда:

$$\begin{cases} (c, z) \to \max \\ Az \le b \\ z \ge 0 \end{cases} \qquad (3)$$

Задачи (3) и (1) отличаются только обозначениями переменных, следовательно, утверждение доказано.

Рассмотрим задачу, двойственную к исходной задаче, содержащей строгое равенство.

$$C(x) = c_1x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_1 +\ldots+ a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 +\ldots+ a_{2n}x_n \le b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 +\ldots+ a_{mn}x_n \le b_m \end{cases} \qquad \textbf{(4)}$$

$$x_j \ge 0, \qquad j = \overline{1,n}$$

Первое ограничение задачи:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j \le b_1 \qquad \text{и} \qquad \sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j \ge b_1$$

Умножим второе неравенство на (- 1), тогда:

$$C(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{1j} x_j \le b_1 & \leftarrow y_1' \\ -\sum\limits_{j=1}^{n} a_{1j} x_j \le -b_1 & \leftarrow y_1'' \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \quad i = \overline{2,m} & \leftarrow y_i \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,n}. \end{cases} \qquad (5)$$

Двойственная задача (6).

$$\begin{cases} B(y) = b_1 y_1' - b_1 y_1'' + \sum\limits_{i=2}^{m} b_i y_i \to \min \\ a_{1j} y_1' - a_{1j} y_1'' + \sum\limits_{i=2}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j, \quad j = \overline{1,n} \\ y_1', \ y_1'', \quad y_i \geq 0, \quad i = \overline{2,m}. \end{cases} \qquad (6)$$

Вынесем b_1 в целевой функции и a_{1j} в ограничениях за скобки.

$$\begin{cases} B(y) = b_1 (y_1' - y_1'') + \sum\limits_{i=2}^{m} b_i y_i \to \min \\ a_{1j} (y_1' - y_1'') + \sum\limits_{i=2}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j, \quad j = \overline{1,n} \\ y_1', \ y_1'', \quad y_i \geq 0, \quad i = \overline{2,m}. \end{cases}$$

Введем новую переменную $y_1 = y'_1 - y''_1$, тогда получим ЗЛП:

$$\begin{cases} B(y) = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to \min \\ \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j, \quad j = \overline{1, n} \\ y_i \geq 0, \quad i = \overline{2, m}. \end{cases} \tag{7}$$

При этом в (7) y_1 может быть как отрицательным, так и положительным числом, тогда как y'_1, $y''_1 \geq 0$. (т.к. первое ограничение содержало знак « = »).

ЗЛП в канонической форме:

$$\begin{cases} (c, x) \to \max \\ Ax = b \\ x \geq 0, \end{cases} \qquad (8)$$

то двойственной задачей к (8) будет (9):

$$\begin{cases} (b, y) \to \min \\ A^{\mathrm{T}} y \geq c \end{cases} \qquad (9)$$

Задача, двойственная к ЗЛП (10), будет иметь вид (11).

$$\begin{cases} (c, x) \to \max \\ Ax = b \end{cases} \qquad \mathbf{(10)}$$

$$\begin{cases} (b, y) \to \min \\ A^{\mathrm{T}} y = c \end{cases} \qquad \mathbf{(11)}$$

П р и м е р.

$$\begin{cases} C(x) = (c, x) \to \min \\ Ax \le b \end{cases}$$

Сначала упорядочим запись прямой задачи.

$$\begin{cases} C(x) = (c, x) \to \min \\ -Ax \ge -b \end{cases}$$

Двойственная задача будет иметь вид:

$$\begin{cases} B(y) = (-b, y) \to \max \\ -A^T y = c \\ y \ge 0 \end{cases}$$

В структурных ограничениях двойственной задачи стоит знак “ = ”, поскольку в исходной задаче отсутствуют прямые ограничения на переменные.

2.2. Экономическая интерпретация двойственной задачи

Рассмотрим ЗЛП:

$$\begin{cases} C(x)=\sum\limits_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \quad i=\overline{1,m} \\ x_j \ge 0, \quad j=\overline{1,n} \end{cases} \qquad (1)$$

где $x = (x_1,\ldots, x_n)$ – вектор выпуска товаров;

c_j – прибыль от реализации единицы товара j-го вида;

a_{ij} – количество i-го ресурса, идущего на изготовление единицы товара j-го вида;

b_I – запас (наличие) i-го ресурса.

Двойственная задача к задаче (1) :

$$\begin{cases} B(y) = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to \min \\ \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \ge c_j, \quad j = \overline{1,n} \\ y_i \ge 0, \quad i = \overline{1,m} \end{cases} \qquad \textbf{(2)}$$

Рассмотрим k-е ограничение задачи (2): $\sum_{i=1}^{m} a_{ik} y_i \ge c_k$ **(3)**

В правой части неравенства c_k - прибыль от реализации единицы товара *k*-го вида, которая носит стоимостной характер, в левой части неравенства тоже стоимостная характеристика.

a_{ik} – расход ресурса;

y_i – стоимостная величина.

Вектор $y = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$ – вектор цен на ресурсы.

$$y_i \geq 0, \quad i = \overline{1, m}.$$

Естественное требование к ценам со стороны продавца состоит в следующем: выручка от продажи ресурсов, расходуемых на изготовление единицы товара k-го вида, должна быть не меньше, чем прибыль, которую могло бы получить предприятие от реализации единицы товара k-го вида, если бы оно отказалось от продажи ресурсов и направило их на изготовление товаров.

Это требование математически записывается в виде неравенств (3). Всего таких неравенств *n*, так как

$$k = \overline{1, n}$$

Кроме того, продавая ресурсы, предприятие заинтересовано в том, чтобы цены на них были как можно выше. Однако рыночные цены могут существенно отличаться от желаемых цен.

Поэтому для установления нижних границ, ниже которых не имеет смысла продавать ресурсы, предприятию целесообразно определить минимально возможную стоимость продаваемых ресурсов.

То есть определить минимум функции $B(y) = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$

при выполнении ограничений (3) и $y_i \geq 0$, $i = \overline{1, m}$

Следовательно, для рациональной продажи ресурсов необходимо решить двойственную задачу (2).

Заметим, что переменные y_i , «внутренние цены» предприятия («теневые» цены, стоимостные оценки), которые дают возможность предприятию эффективно использовать имеющиеся ресурсы.