МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ МОСКОВСКОЙ ОБЛАСТИ
Государственное образовательное учреждение высшего образования
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ОБЛАСТНОЙ УНИВЕРСИТЕТ
(МГОУ)
Физико-математический факультет
Кафедра высшей алгебры, элементарной математики и методики преподавания математики

Курсовая работа
по дисциплине элементарная математика

Тема: «**Методы и приемы решения уравнений с параметром**»

Выполнила студентка 11 группы 1 курса
Профиль: математика и информатика
Агеева Екатерина Сергеевна

Научный руководитель:
ст. преподаватель Высоцкая П.А.

Москва, 2018

Целью курсовой работы является изучение и освоение приемов и методов решения иррациональных уравнений, содержащих параметр.

Поставленные задачи:

- Выявить основные положения теории решения иррациональных уравнений с параметром
- Выделить методы и приемы решения иррациональных уравнений задач с параметром
- Рассмотреть примеры решения иррациональных уравнений с параметром

Основные положения теории

Определение 1. **Параметром** называется независимая переменная величина, входящая в условие задачи или появляющаяся в процессе её решения, «управляющая» решением задачи.

Определение 2. Математическое уравнение, внешний вид и решение которого зависит от значений одного или нескольких параметров называется **уравнением с параметром**.

Определение 3. Если в уравнении переменная содержится под знаком квадратного корня, то уравнение называют **иррациональным**.

Решить иррациональное уравнение с параметром означает:

1. Найти все системы значений параметров, при которых данное уравнение имеет решение.
2. Найти все решения для каждой найденной системы значений параметров, то есть, для неизвестного и параметра должны быть указаны свои области допустимых значений.

Основные положения теории

- **Знак корня (знак радикала)** — условное обозначение $\sqrt{}$ для корней, по умолчанию квадратных. В общем случае (для корней n-й степени) показатель степени ставится над «птичкой»: знак $\sqrt[3]{}$ используется для кубических корней, $\sqrt[4]{}$ — для корней 4-й степени и т. п.; для квадратного корня также можно использовать «полное» обозначение.

- Впервые такое обозначение использовал немецкий математик Томас Рудольф в 1525 году.

Основные положения теории

Методы решения иррациональных уравнений с параметром:

Способ I (аналитический).

Это способ так называемого прямого решения, повторяющего стандартные процедуры нахождения ответа в задачах без параметра.

Способ II (графический).

В зависимости от задачи (с переменной x и параметром a) рассматриваются графики или в координатной плоскости (x; y), или в координатной плоскости (x; a).

Способ III (решение относительно параметра).

При решении этим способом переменные x и a принимаются равноправными, и выбирается та переменная, относительно которой аналитическое решение признается более простым. После естественных упрощений возвращаемся к исходному смыслу переменных x и a и заканчиваем решение.

Основные положения теории

<u>Типы задач с параметрами:</u>

- Уравнения, их системы и совокупности, которые необходимо решить либо для любого значения параметра (параметров), либо для значений параметра, принадлежащих заранее оговоренному множеству.
- Уравнения, их системы и совокупности, для которых требуется определить количество решений в зависимости от значения параметра (параметров).
- Уравнения, их системы и совокупности, для которых требуется найти все те значения параметра, при которых указанные уравнения, неравенства, их системы и совокупности имеют заданное число решений (в частности, не имеют или имеют бесконечное множество решений).
- Уравнения, их системы и совокупности, для которых при искомых значениях параметра множество решений удовлетворяет заданным условиям в области определения.

Основные положения теории

- • *Определение.* **Параметр** - это величина, которая входит в формулы и выражения, значения которой, в рамках рассматриваемой задачи, является постоянной.

Виды иррациональных уравнений с параметром:

Если классифицировать иррациональные уравнения с параметром, то мы можем получить два основных уравнения общего вида:

1) $\sqrt[n]{f(x,a)} = g(x,a)$;

2) $\sqrt[n]{f(x,a)} = \sqrt[m]{g(x,a)}$.

- Рассмотрим **аналитический метод** на примере: $(4x-x^2)^2-32\sqrt{4x-x^2}=a^2-14a$

Решение:

Положим, что $\sqrt{4x-x^2}=t$, где $0 \leq t \leq 2$, так как $0 \leq 4x-x^2 \leq 4$.

Тогда, исходное уравнение принимает вид $t^4-32t=a^2-14a$. Найдем множество значений функции $f(t)=t^4-32t$ на отрезке [0;2]. Так как $f'(t)=4t^3-32=4(t^3-8)<0$ на промежутке [0;2), то функция убывает на отрезке [0;2], и, следовательно, множество ее значений на отрезке [0;2] – отрезок [f(2); f(0)], т.е., отрезок [-48;0]. Таким образом, уравнение $f(t)=a^2-14a$ имеет решения тогда и только тогда, когда выполняются условия $-48 \leq a^2-14a \leq 0$.

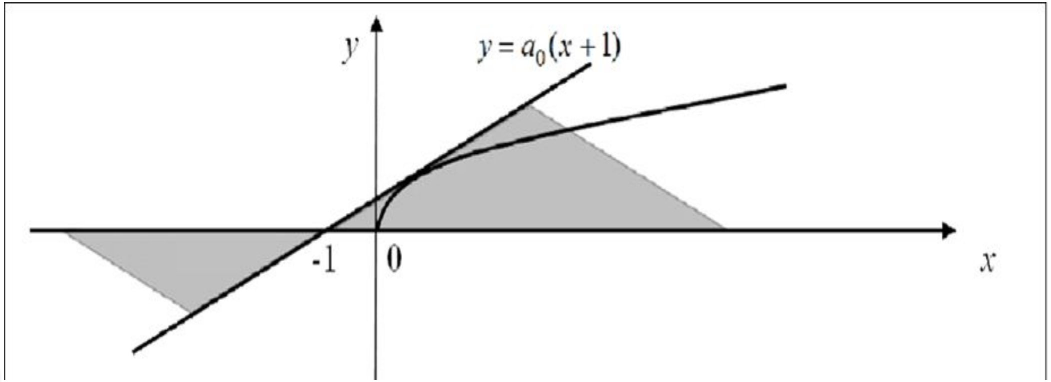
$$\begin{cases} a^2-14a \leq 0 \\ a^2-14a+48 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq a \leq 14 \\ \left[\begin{array}{l} a \leq 6 \\ a \geq 8 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 \leq a \leq 6 \\ 8 \leq a \leq 14 \end{array}\right..$$

Ответ: $0 \leq a \leq 6, 8 \leq a \leq 14$.

Рассмотрим **графический метод** на примере.

Задача. a·(x + 1) = $\sqrt{x}$

Используя графический метод решения, найдем все значения параметра, при которых прямая y = a·(x+1) имеет хотя бы одну общую точку с графиком функции y = √x. Заметим, что для прямой y=a·(x+1), параметр a является угловым коэффициентом (при изменении параметра одна прямая будет переходить в другую с помощью поворота около точки (-1;0), так как для любого a y(-1) = 0).



По графику, который изображен выше, мы видим, что искомыми являются прямые, лежащие внутри заштрихованной пары вертикальных углов, включая границы. Им соответствуют значения a∈[0;a_0], где a_0 отвечает моменту касания прямой y = a(x + 1) графика функции y = √x.

$a_0 > 0$

Значение a_0 находим из условия, что уравнение a(x + 1) = √x имеет ровно один корень. После преобразований получим квадратное уравнение:

$$a_0{}^2x^2 + (2a_0{}^2 - 1)x + a_0{}^2 = 0$$

$$D = 1 - 4a_0{}^2;\ 1 - 4a_0{}^2 = 0$$

$$\leftrightarrow\ a_0 = \pm 0{,}5$$

Так как $a_0 > 0$, то корнем данного уравнения будет являться число 0,5.

- Рассмотрим метод решения **относительно параметра**: **Задача**. Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение:

$\sqrt{x-8}$ = -ax + 3a + 2 имеет единственное решение.

Решение:

Для решения данного уравнения нам необходимо ввести такую замену, как эта: $\sqrt{x-8} = t,\ t \geq 0$, тогда $x = t^2 + 8$, а уравнение имеет вид: $at^2 + t + 5a - 2 = 0$

Теперь задача состоит в том, чтобы найти все значения a, при которых наше уравнение $at^2 + t + 5a - 2 = 0$ будет иметь единственное неотрицательное решение. Это имеет место быть только в следующих случаях:

1) Если a $=$ 0, то уравнение имеет единственное решение $t = 2$.

2) Если $a \neq 0$, а $D = 1 - 20a^2 + 8 > 0$ тогда и только тогда, когда $a \in (-0{,}1;\ 0{,}5)$, то имеем единственное неотрицательное решение, если корни разных знаков, то есть $t_{1,2} = \frac{5a-2}{2} \leq 0$ тогда и только тогда, когда a $\in (0; \frac{2}{5}]$.

При a $= \frac{2}{5}$ получаем $t_1 = 0$, $t_2 = -\frac{1}{a} < 0$.

3) Если a $\neq$ 0 и D = 0 тогда и только тогда, когда $\left[\begin{array}{l} a = -0{,}1, \text{соответсвенно} t = 5 \\ a = 0{,}5, \text{соответвенно} t = -1 \end{array}\right.$,

то одно неотрицательное решение имеем при a = - 0,1.

Ответ: $\{-0{,}1\} \cup [0; 0{,}4]$

Рассмотрим пример: $\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x-a}} = \frac{1}{\sqrt{x^2-ax}}$

Решение: D: $\begin{cases} x > 0 \\ x > a \end{cases}$, на множестве D уравнение $\sqrt{x-a} + \sqrt{x} = 1$ равносильно исходному;

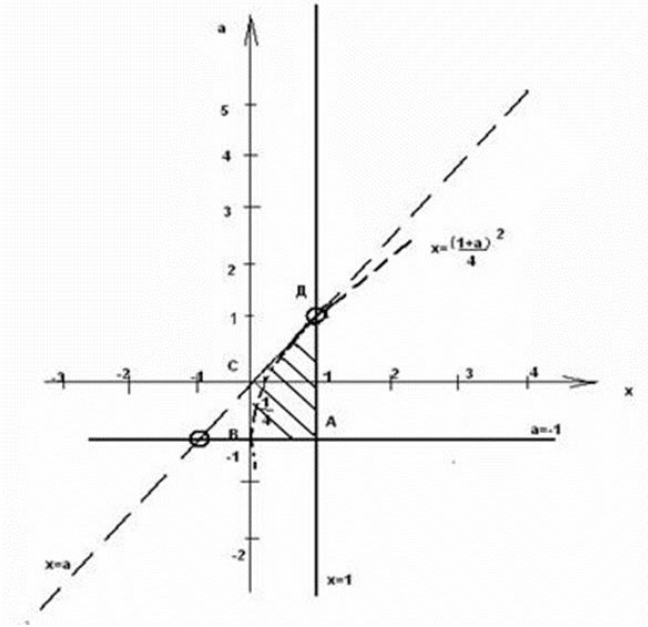
Уравнение $\sqrt{x-a} + \sqrt{x} = 1$ равносильно системе:

$$\begin{cases} 1 - \sqrt{x} \geq 0 \\ x - a = 1 - 2\sqrt{x} + 0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} 0 < x \leq 1 \\ x > a \\ \sqrt{x} = \dfrac{1+a}{2} \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} 0 < x \leq 1 \\ x > a \\ a \geq -1 \\ x = \dfrac{(1+a)^2}{4} \end{cases}$$

Нам нужно изобразить на плоскости (x, a) график $x = \frac{(1+a)^2}{4}$ - это парабола с минимумом в точке a = -1, x = 0, пересекающая ось x в точке a = 0, $x = \frac{1}{4}$. Укажем также области плоскости (x; a), в которых выполняются неравенства системы: 1)$x > a$ - полуплоскость ниже прямой x = a, не включая эту прямую; 2) $0 < x \leq 1$ - вертикальная полоса между прямыми x = 0 и x=1, включающая правую границу; 3) $a \geq -1$ = полуплоскость выше прямой a = -1, включая эту прямую.

Таким образом, исходное уравнение имеет решение при указанных условиях, иллюстрирующееся частью параболы, заключённой внутри трапеции АВСД, т. е. при $a \in (-1; 1)$.

При всех остальных действительных значениях a решения нет.



Ответ: $x = \frac{(1+a)^2}{4}$ при $a \in (-1; 1)$.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!