Моделирование систем и процессов

Лекция 6.

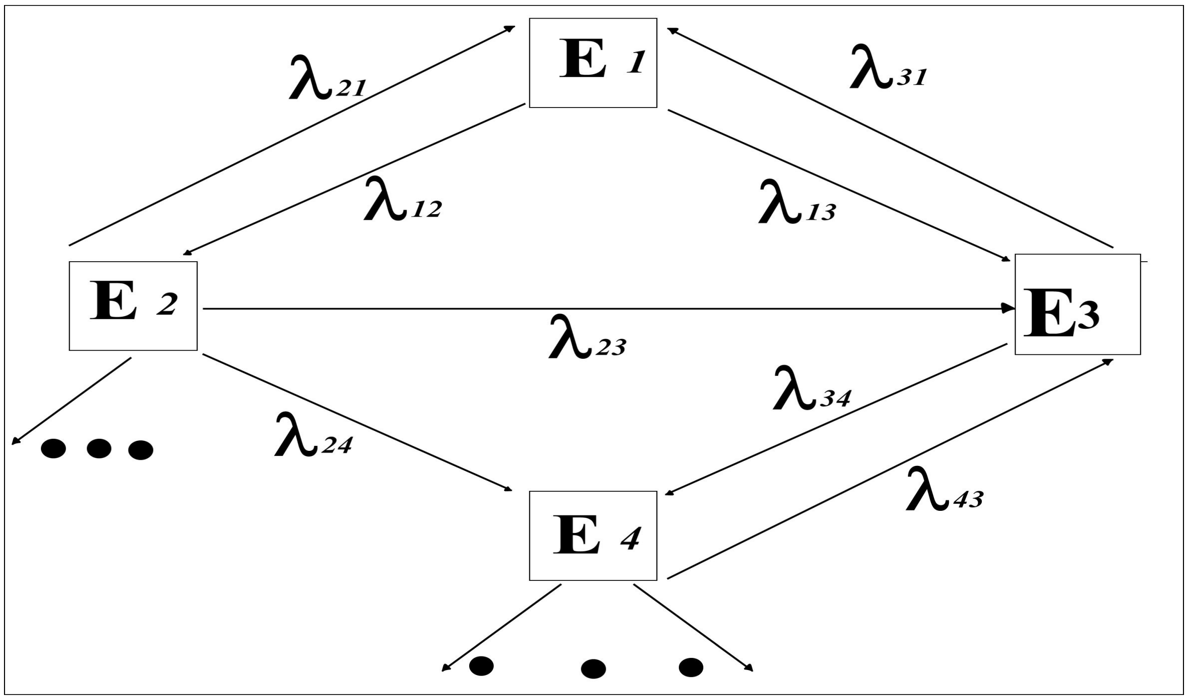
Модели эксплуатации на основе метода динамики средних

Сущность метода динамики средних

При рассмотрении метода динамики средних возможны следующие случаи:

- сложная система состоит из большого числа однородных элементов, каждый из которых может переходить случайным образом из состояния в состояние;
- интенсивность потоков зависит от численности состояний;
- численность состояний изменяется за счет внешних воздействий;
- система состоит из большого числа неоднородных элементов.

Математическое описание метода динамики средних



Сложная система ***S*** состоит из большого числа ***N*** однородных элементов, все потоки, переводящие каждый элемент из этого состояния в другое являются пуассоновскими, состояний каждого элемента ***n***.

Математическое описание метода динамики средних

В некоторый момент ***t*** число элементов системы $\boldsymbol{X_i(t)}$, находящихся в состоянии $\boldsymbol{E_i}$ будет величиной случайной.

$$X_1(t)+X_2(t)+...+X_k(t)+...+X_k(t)=N$$

Общее число состояний равно сумме величин по всем элементам

$$X_k(t)=X_k^{(1)}(t)+X_k^{(2)}(t)+...+X_k^{(i)}(t)+....+X_k^{(N)}(t)=\sum_{i=1}^{N}X_K^{(i)}(t)$$

Вероятность нахождения элемента в состоянии $\boldsymbol{E_k}$ – $\boldsymbol{P_k(t)}$

Математическое ожидание случайной величины $\boldsymbol{X_k(t)}$

$$M\left[X_k^{(i)}(t)\right]=0\cdot(1-P_k(t))+1\cdot P_k(t)=P_k(t)$$

Математическое описание метода динамики средних

Математическое ожидание общей численности элементов, находящихся в состоянии E_i

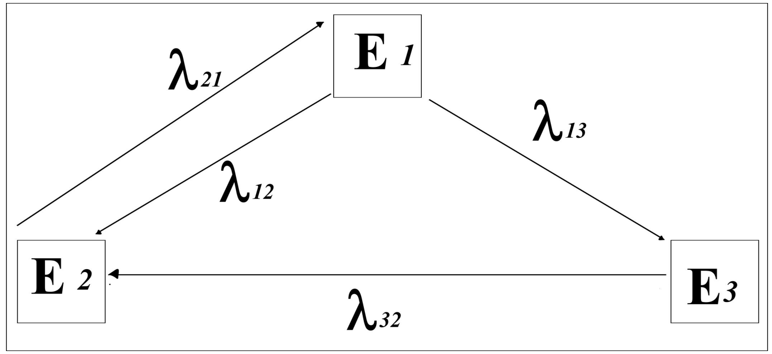
$$m_k(t) = \sum_{i=1}^{N} M(X_k^{(i)}(t)) = \sum_{i=1}^{N} P_k(t) = NP_k(t)$$

Для значений дисперсий получаем следующие выражения

$$D_k(t) = NP_k(t)(1 - P_k(t))$$

$$\sigma_k(t) = \sqrt{D_K}(t)$$

Таким образом, если известны вероятности всех состояний одного элемента то могут быть определены и средние численности состояний, их дисперсии и соответственно среднеквадратические отклонения



$$\frac{dP_1(t)}{dt} = -(\lambda_{12} + \lambda_{13})P_1(t) + \lambda_{21}P_2(t)$$

$$\frac{dP_2(t)}{dt} = \lambda_{12}P_1(t) - \lambda_{21}P_2(t) + \lambda_{32}P_3(t)$$

$$\frac{dP_3(t)}{dt} = \lambda_{13}P_1(t) - \lambda_{32}P_3(t)$$

$$\frac{dNp_1(t)}{dt} = -(\lambda_{12} + \lambda_{13})NP_1(t) + \lambda_{21}NP_2(t)$$

$$\frac{dNp_2(t)}{dt} = \lambda_{12}NP_1(t) - \lambda_{21}NP_2(t) + \lambda_{32}NP_3(t)$$

$$\frac{dNP_3(t)}{dt} = \lambda_{13}NP_1(t) - \lambda_{32}NP_3(t)$$

$$\frac{dm_i(t)}{dt} = -(\lambda_{12} + \lambda_{13})m_1(t) + \lambda_{21}m_2(t)$$

$$\frac{dm_i(t)}{dt} = \lambda_{12}m_1(t) - \lambda_{21}m_2(t) + \lambda_{32}m_3(t)$$

$$\frac{dm_3(t)}{dt} = \lambda_{13}m_1(t) - \lambda_{32}m_3(t)$$

$$D_k(t) = m_k(t)(1 - \frac{m_k(t)}{N})$$

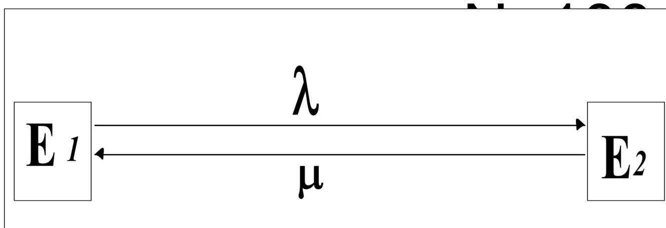
$$\sigma_k(t) = \sqrt{D_k(t)},$$

$$P(X_k \in (\alpha, \beta)) = \varphi\,(\frac{\beta - m_k}{\sigma_k}) - \varphi(\frac{\alpha - m_k}{\sigma_k}),$$

Применение уравнений динамики средних для решения эксплуатационных задач

Пример 1

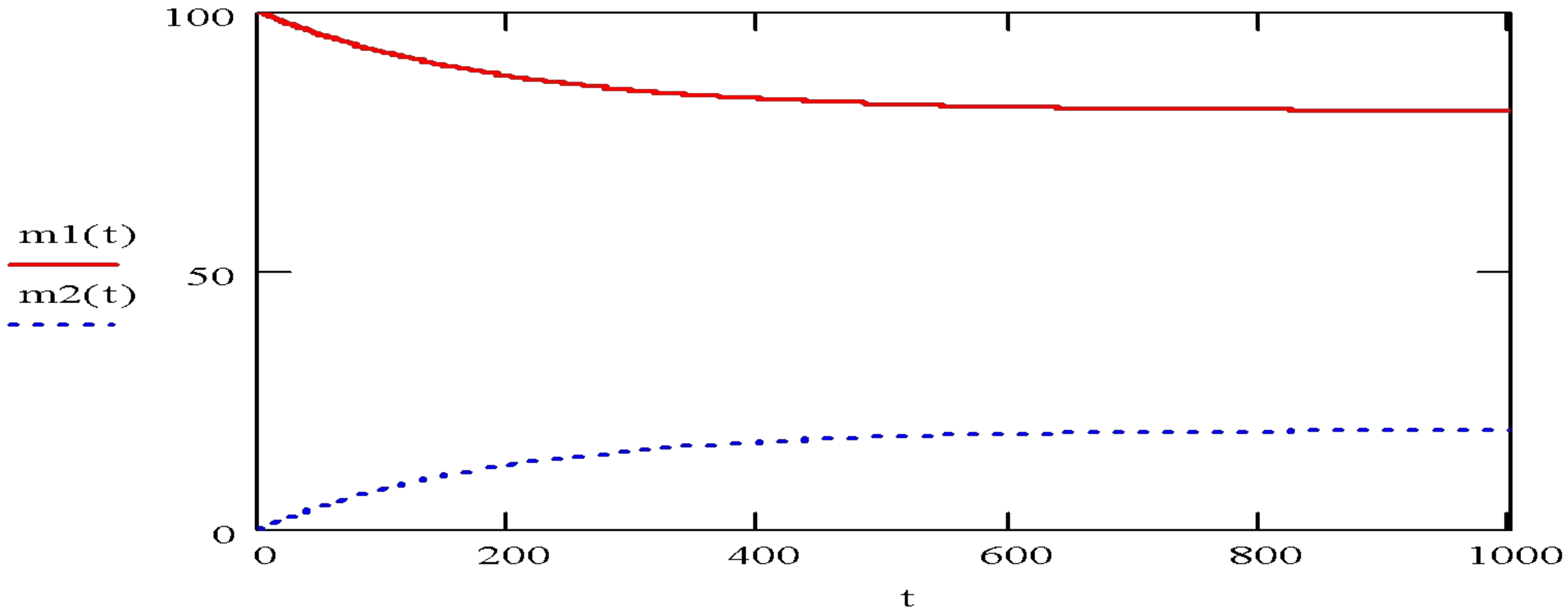
Парк авиационного предприятия состоит из N однотипных самолетов. Каждый из самолетов может находиться в одном из двух состояний: исправен E_1, неисправен и находится в ремонте E_2



10^{-3}

$$\frac{\partial m_1(t)}{\partial t} = -\lambda m_1(t) + \mu m_2(t)$$

$$\frac{\partial m_2(t)}{\partial t} = -\mu m_2(t) + \lambda m_1(t)$$

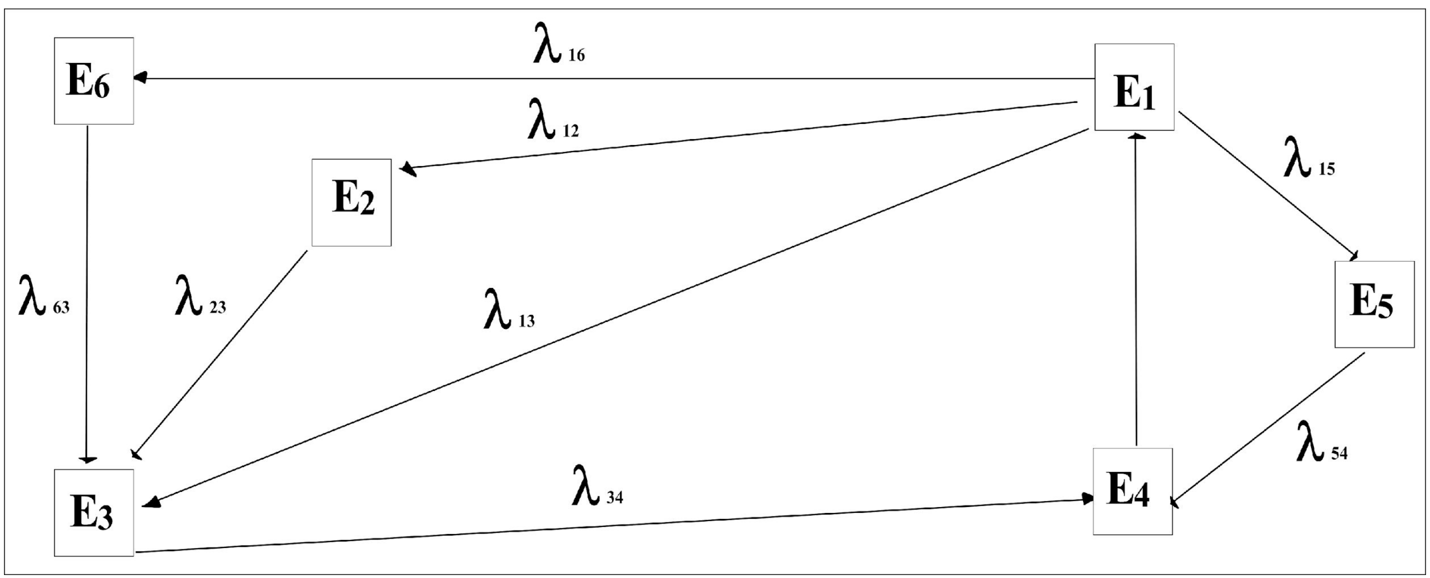


Имея данные по интенсивности отказов и восстановления , можно вычислить для любого момента времени количество исправных самолетов в парке и находящихся в ремонте.

Пример 2

Парк самолетов состоит из N однотипных ЛА, возможные реальные состояния любого ЛА парка:

- E_1 - ЛА находится в рейсе;
- E_2 - проходит периодическое техническое обслуживание;
- E_3 - проходит оперативное техническое обслуживание по форме А (Ф-А);
- E_4 - исправный ЛА находится в ожидании рейса;
- E_5 - проходит оперативное техническое обслуживание по Ф – Б;
- E_6 - находится в ремонте.



Система дифференциальных уравнений, описывающая изображенный размеченный граф состояний

$$\frac{dm_1(t)}{dt} = -\left[\lambda_{12}(t) + \lambda_{13}(t) + \lambda_{15}(t) + \lambda_{16}(t)\right] m_1(t) + \lambda_{41}(t) m_4(t),$$

$$\frac{dm_2(t)}{dt} = \lambda_{12}(t) m_1(t) - \lambda_{23}(t) m_2(t),$$

$$\frac{dm_3(t)}{dt} = \lambda_{13}(t) m_1(t) + \lambda_{23}(t) \cdot m_2(t) + \lambda_{63}(t) m_6(t) - \lambda_{34}(t) m_3(t),$$

$$\frac{dm_3(t)}{dt} = \lambda_{13}(t) m_1(t) + \lambda_{23}(t) \cdot m_2(t) + \lambda_{63}(t) m_6(t) - \lambda_{34}(t) m_3(t),$$

$$\frac{dm_5(t)}{dt} = \lambda_{15}(t) \cdot m_1(t) - \lambda_{54}(t) \cdot m_5(t),$$

$$\frac{dm_6(t)}{dt} = \lambda_{16}(t) \cdot m_1(t) - \lambda_{63}(t) \cdot m_6(t)$$

$$\sum_{i=1}^{6} m_i(t) = N$$