

Моделирование систем и процессов

Лекция 5.

**Теория систем
массового обслуживания**

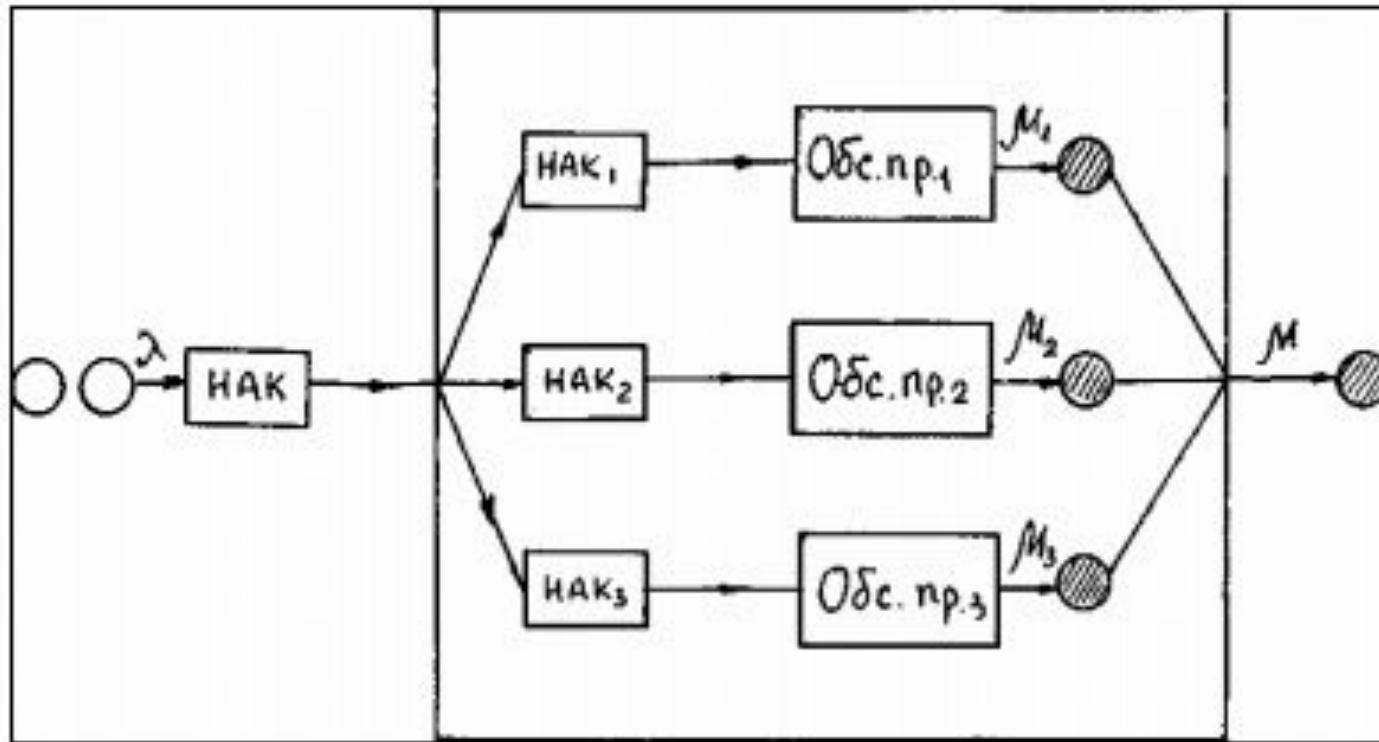
Анализ систем массового обслуживания

Теория массового обслуживания изучает модели систем массового обслуживания (СМО), представляющие собой системы, которые по одному или многим каналам обслуживают поступающие в них заявки.

Примеры СМО: АТС, кассы, АТБ, диспетчер.

Структура СМО определяется количеством и типом обслуживающих приборов, а так же накопителем.

Компоненты системы массового обслуживания



- Входящий поток заявок, который может быть охарактеризован интенсивностью потока — λ .
- Приборы (каналы) обслуживания, которых в системе может быть один (одноканальная система) или несколько (многоканальная система).
- Накопители (устройства для обеспечения ожидания обслуживания), которые могут располагаться как перед всей системой, так и перед каждым каналом обслуживания.
- Выходящий поток обслуженных заявок, который может быть охарактеризован интенсивностью обслуживания — μ .

- Поток событий
- Стационарный поток
- Ординарный поток
- В потоке отсутствует последствие
- Пуассоновский поток
- Простейший поток
- Интенсивность потока

Классификация систем массового обслуживания

- $P_{вх}$ – характер входящего потока
- $V_{об}$ – распределение времени обслуживания
- $N_{пр}$ – число обслуживающих приборов
- $E_{нак}$ – емкость накопителя (длина очереди)

$P_{вх} / V_{об} / N_{пр} / E_{нак}$

Характер входящего потока

M (Markovian) - входящий поток требований является Пуассоновским, т.е. распределение времени между поступающими заявками подчинено экспоненциальному закону;

E (Erlangian) - входящий поток является Эрланговским;

D (Deterministic) - детерминированный постоянный поток;

G (General) - произвольный рекуррентный поток.

Распределение времени обслуживания

M - распределение по экспоненциальному закону;

E - распределение по закону Эрланга;

D - время обслуживания постоянная величина;

G - произвольное распределение времени обслуживания.

Классификация систем с Марковскими процессами обслуживания

- $M/M/1/0$ - одноканальная СМО с отказами;
- $M/M/n/0$ - многоканальная СМО с отказами;
- $M/M/1/m$ - одноканальная СМО с ожиданием (ёмкость накопителя равна m);
- $M/M/n/m$ - многоканальная СМО с ожиданием, но с возможностью отказа (число каналов - n , ёмкость накопителя равна m);
- $M/M/1/\infty$ - одноканальная СМО с ожиданием без отказа (ёмкость накопителя равна ∞).

Показатели качества обслуживания СМО

- $P_{отк}$ – вероятность потери заявки (вероятность отказа),
- P_0 – вероятность простоя,
- λ – интенсивность поступления заявок,
- μ – интенсивность обслуживания,
- $\rho = \lambda/\mu$ – приведенная интенсивность потока заявок,
- $A = \lambda * q$ – абсолютная пропускная способность,
- q – среднее число заявок за единицу времени,
- ω – среднее число заявок под обслуживанием

для $M/M/n/m$ $\omega = z$,

для $M/M/1/\infty$, при $\rho > 1$ $\omega = \rho$

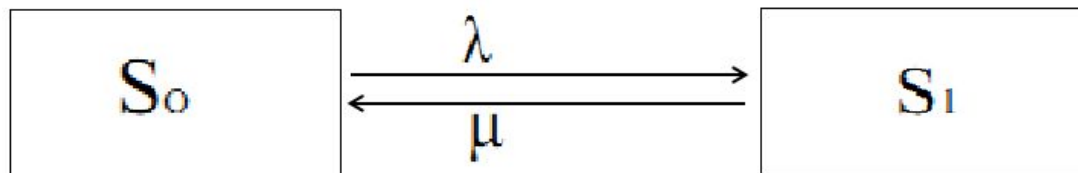
$t_{ож}$ – среднее время ожидания в очереди,

$t_{сист}$ – общее время пребывания в системе

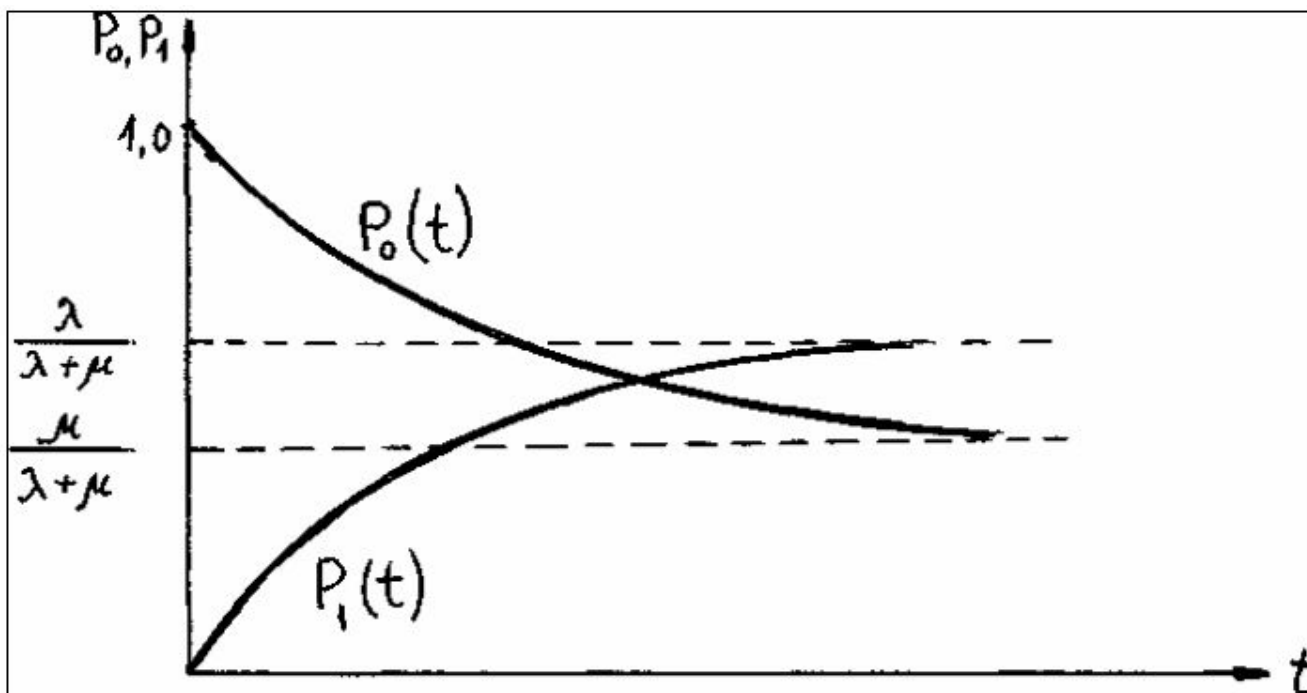
z – среднее число занятых каналов для многоканальных
СМО

Анализ СМО с отказами

а) М/М/1/0 – одноканальная СМО с отказами



$$P_0(t) = \frac{\mu}{\lambda + \mu} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda + \mu)t}$$



$$P_1(t) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}$$

$$P_0(t) = \frac{\mu}{\lambda + \mu}$$

Анализ СМО с отказами

а) М/М/1/0 – одноканальная СМО с отказами

- Относительная пропускная способность

$$q = P_0(t) = \frac{\mu}{\lambda + \mu}$$

- Абсолютная пропускная способность

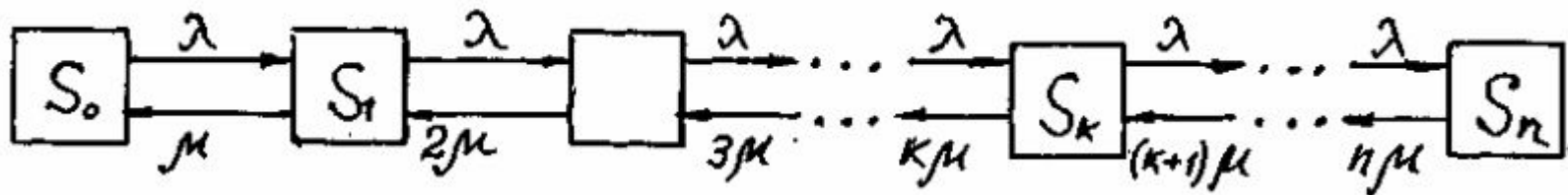
$$A = \lambda * q = P_0(t) = \lambda \frac{\mu}{\lambda + \mu}$$

- Вероятность отказа

$$P_{\text{отк}}(t) = 1 - \frac{\mu}{\lambda + \mu} = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}$$

Анализ СМО с отказами

б) М/М/п/0 – многоканальная СМО с отказами

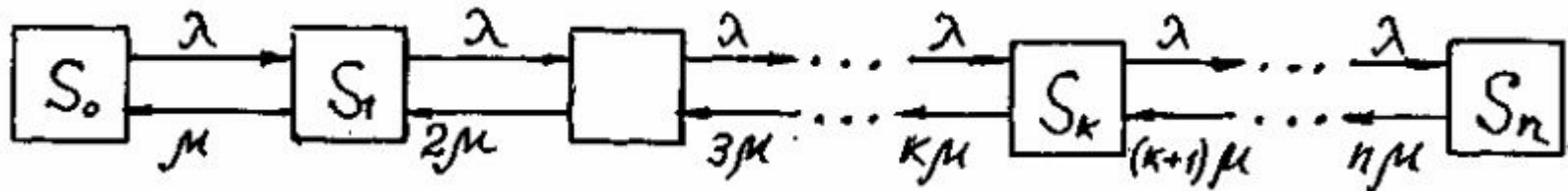


Состояния n - канальной системы:

- S_0 - система полностью свободна;
- S_1 - занят один канал, остальные каналы свободны;
- S_2 - занято два канала, остальные каналы свободны;
-;
- S_i - занято i каналов, остальные каналы свободны;
-;
- S_n - заняты все n каналов.

Анализ СМО с отказами

б) М/М/п/0 – многоканальная СМО с отказами



$$\frac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda \cdot P_0(t) + \mu \cdot P_1(t)$$

$$\frac{dP_1(t)}{dt} = -(\lambda + \mu) \cdot P_1(t) + \lambda \cdot P_0(t) + 2\mu \cdot P_2(t)$$

$$\frac{dP_2(t)}{dt} = -(\lambda + 2\mu) \cdot P_2(t) + \lambda \cdot P_1(t) + 3\mu \cdot P_3(t)$$

$$\dots$$

$$\frac{dP_k(t)}{dt} = -(\lambda + k\mu) \cdot P_k(t) + \lambda \cdot P_{k-1}(t) + (k+1)\mu \cdot P_{k+1}(t)$$

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = -n\mu \cdot P_n(t) + \lambda \cdot P_{n-1}(t)$$

Анализ СМО с отказами

б) М/М/п/0 – многоканальная СМО с отказами

Вероятность того, что система свободна

$$P_0 = \left[1 + \frac{\lambda/\mu}{1!} + \frac{(\lambda/\mu)^2}{2!} + \dots + \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} \right]^{-1}$$

Вероятность отказа

$$P_{\text{отк}} = P_n = \frac{\rho^n}{n!} P_0$$

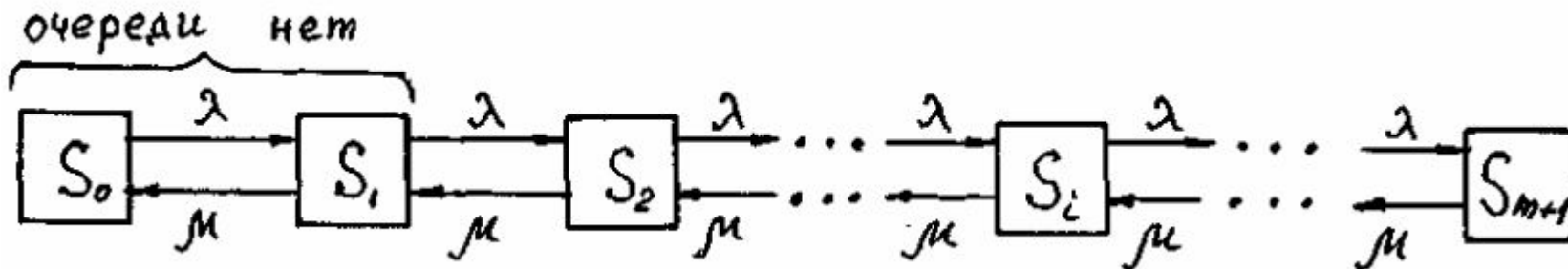
Относительная пропускная способность $q = 1 - P_{\text{отк}}$

Абсолютная пропускная способность $A = \lambda \cdot q = \lambda \cdot (1 - P_{\text{отк}})$

Среднее число занятых каналов $\bar{z} = \frac{A}{\mu} = \frac{\lambda \cdot (1 - P_{\text{отк}})}{\mu} = \rho \cdot (1 - P_{\text{отк}})$

Анализ СМО с ожиданием

а) M/M/1/m – одноканальная СМО с ожиданием



- S_0 - канал свободен;
- S_1 - канал занят, очереди нет;
- S_2 - канал занят, одна заявка стоит в очереди;
-
- S_i - канал занят, $i-1$ заявок стоит в очереди;
-
- S_{m+1} - канал занят, m заявок стоит в очереди (накопитель полностью загружен).

$$\left. \begin{aligned}
 P_1 &= \rho \cdot P_0 \\
 P_2 &= \rho^2 \cdot P_0 \\
 &\dots \\
 P_k &= \rho^k \cdot P_0 \\
 &\dots \\
 P_{m+1} &= \rho^{m+1} \cdot P_0
 \end{aligned} \right\}$$

Анализ СМО с ожиданием

а) М/М/1/∞ – одноканальная СМО с ожиданием

Вероятность того, что система свободна

$$P_0 = \left[1 + \rho + \rho^2 + \dots + \rho^{m+1} \right]^{-1} \quad P_0 = \left[\frac{(1 - \rho^{m+2})}{(1 - \rho)} \right]^{-1} = \frac{1 - \rho}{1 - \rho^{m+2}}$$

Вероятность отказа

$$P_{отк} = P_{m+1} = \rho^{m+1} \cdot P_0 = \frac{\rho^{m+1}(1 - \rho)}{1 - \rho^{m+2}}$$

Относительная пропускная способность $A = \lambda \cdot q$

Абсолютная пропускная способность

$$q = 1 - P_{отк} = 1 - \frac{\rho^{m+1}(1 - \rho)}{1 - \rho^{m+2}} = \frac{1 - \rho^{m+1}}{1 - \rho^{m+2}}$$

Среднее число заявок в очереди

$$\bar{r} = \frac{\rho^2 [1 - \rho^m (m + 1 - m\rho)]}{(1 - \rho^{m+2})(1 - \rho)}$$

Анализ СМО с ожиданием

а) М/М/1/∞ – одноканальная СМО с ожиданием

Общее число заявок в системе

$$\bar{k} = \bar{r} + \bar{w} \quad \bar{k} = \bar{r} + \frac{\rho - \rho^{m+2}}{1 - \rho^{m+2}}$$

Мат. ожидание числа заявок под обслуживанием

$$\bar{w} = 0 \cdot P_0 + 1 \cdot (1 - P_0) = \frac{\rho - \rho^{m+2}}{1 - \rho^{m+2}}$$

Среднее время ожидания

$$t_{\text{ср}} = \frac{1}{\lambda}$$

Среднее время обслуживания одной заявки

$$\bar{t}_{\text{ср}} = \frac{1}{\mu}$$

Общее среднее время пребывания в системе

$$\bar{t}_{\text{сист}} = \frac{\bar{r}}{\lambda} + \frac{q}{\mu}$$

Анализ СМО с ожиданием

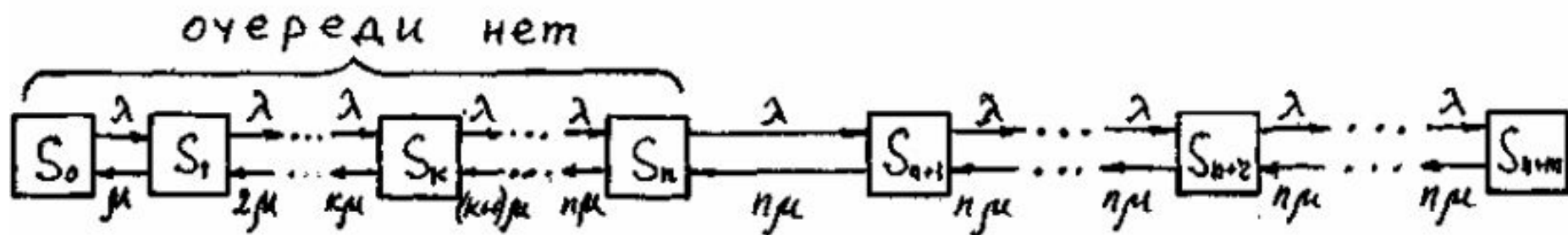
б) М/М/1/∞ – одноканальная СМО с бесконечной очередью

$$\left. \begin{aligned} P_0 &= 1 - \rho \\ P_1 &= \rho \cdot (1 - \rho) \\ P_2 &= \rho^2 \cdot (1 - \rho) \\ \dots & \\ P_k &= \rho^k \cdot (1 - \rho) \\ \dots & \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} P_{\text{отк}} &= 0 \\ q &= 1, \quad A = q\lambda = \lambda \\ \bar{r} &= \frac{\rho^2}{1 - \rho} \\ \bar{k} &= \frac{\rho}{1 - \rho} \\ \bar{l}_{\text{ож}} &= \frac{1}{\mu} \cdot \frac{\rho}{1 - \rho} = \frac{\rho^2}{\lambda(1 - \rho)} \\ \bar{l}_{\text{сист}} &= \frac{1}{\mu} \cdot \frac{\rho}{1 - \rho} \end{aligned} \right\}$$

Анализ СМО с ожиданием

в) M/M/n/ m – многоканальная СМО с ожиданием



- S_0 - система полностью свободна;
- S_1 - занят один канал, остальные каналы свободны;
-
- S_k - занято k каналов, остальные каналы свободны;
-
- S_n - заняты все n каналов;
- S_{n+1} - заняты все n каналов, одна заявка в очереди;
-
- S_{n+r} - заняты все n каналов, r заявок в очереди;
-
- S_{n+m} - заняты все n каналов, заняты все m мест в очереди.

Анализ СМО с ожиданием

в) М/М/п/ т – многоканальная СМО с ожиданием

Вероятность того, что система свободна

$$P_0 = \left[1 + \rho + \frac{\rho^2}{2} + \dots + \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^n}{n!} \cdot \frac{\frac{\rho}{n} - \left(\frac{\rho}{n}\right)^{m+1}}{1 - \frac{\rho}{n}} \right]^{-1}$$

Вероятность отказа

$$P_{\text{отк}} = P_{n+m} = \frac{\rho^{n+m}}{n^m \cdot n!} \cdot P_0$$

Относительная пропускная способность

$$q = 1 - P_{\text{отк}} = 1 - \frac{\rho^{n+m}}{n^m \cdot n!} P_0$$

Абсолютная пропускная способность

$$A = \lambda \cdot q = \lambda \cdot \left(1 - \frac{\rho^{n+m}}{n^m \cdot n!} P_0 \right)$$

Анализ СМО с ожиданием

в) M/M/n/ m – многоканальная СМО с ожиданием

Среднее число занятых каналов $\bar{z} = \frac{A}{\mu}$

Среднее число заявок в очереди

$$\begin{aligned}\bar{r} &= 1 \cdot P_{n+1} + 2 \cdot P_{n+2} + \dots + m \cdot P_{n+m} = \frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n!} \cdot \left[1 + 2 \frac{\rho}{n} + 3 \left(\frac{\rho}{n} \right)^2 + \dots + m \cdot \left(\frac{\rho}{m} \right)^{m+1} \right] P_0 = \\ &= \frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n!} \cdot \frac{1 - (m+1) \left(\frac{\rho}{n} \right) + m \left(\frac{\rho}{n} \right)^{m+1}}{\left(1 - \frac{\rho}{m} \right)^2} \cdot P_0\end{aligned}$$

Общее число заявок в системе $\bar{k} = \bar{z} + \bar{r}$

Время ожидания $\bar{t}_{ожс} = \frac{\bar{r}}{\lambda}$

Время пребывания в системе $\bar{t}_{сист} = \bar{t}_{ожс} + \frac{q}{\mu}$

Анализ СМО с ожиданием

г) M/M/n/∞ – многоканальная СМО бесконечной очередью

$$P_0 = \left(1 + \rho + \frac{\rho^2}{2} + \dots + \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)} \right)$$

$$P_{\text{отк}} = 0, \quad q=1, \quad A = \lambda \cdot q^i = \lambda$$

$$\bar{r} = \frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n! \left(1 - \frac{\rho}{n} \right)^2} P_0 \quad \bar{z} = \frac{A}{\mu} = \frac{\lambda}{\mu} = \rho$$

$$\bar{t}_{\text{ож}} = \frac{\bar{r}}{\lambda} \quad \bar{t}_{\text{сист}} = \bar{t}_{\text{ож}} + \frac{q}{\mu}$$