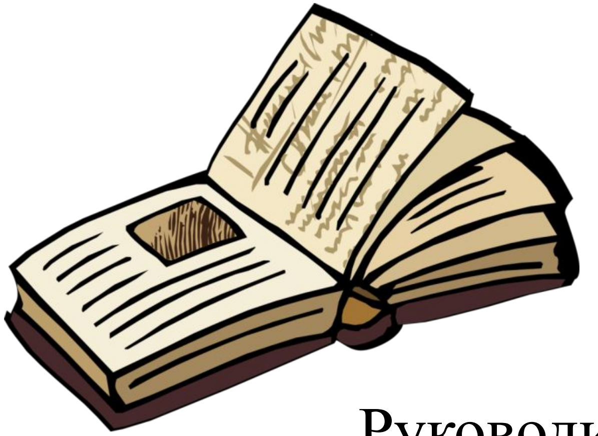
ТЕОРИЯ ИГР

Решение задач в смешанных стратегиях



Шелыганова Ольга Ильинична
Руководитель: д.э.н. Потехина Елена Витальевна

ПЛАН ЛЕКЦИИ

- 1) Решение задач в смешанных стратегиях размерностью 2x2;
- 2) Решение задач в смешанных стратегиях размерностью 2xn и mx2.

ТЕОРИЯ ИГР – это раздел математики, изучающий математические модели принятия решений в конфликтных ситуациях.

ИГРА – это упрощенная математическая модель конфликтной ситуации, сторонами которой являются **ИГРОКИ**

Пусть в игре участвуют два игрока А и В

Выигрыш игрока А – a_{ij}

Выигрыш игрока В – b_j

$$\boxed{a_{ij} = - b_j}$$

~~Задача игрока А~~ – максимизировать свой выигрыш

~~Задача игрока В~~ – минимизировать свой проигрыш

Игру можно представить в виде матрицы

Столбцы – стратегии игрока В

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Строки – стратегии игрока А

Матрица называется ***ПЛАТЕЖНОЙ МАТРИЦЕЙ***, где элементы этой матрицы это выигрыши игрока А.

- Выигрыш зависит от **СТРАТЕГИИ**, последовательности действий игрока в конкретной ситуации.

ОПТИМАЛЬНАЯ СТРАТЕГИЯ ИГРОКА

МАКСИМАЛЬНЫЙ ВЫИГРЫШ

РЕШИМ ЗАДАЧУ:

Два игрока, не глядя друг на друга, кладут на стол по картонному кружку красного (К), зеленого (З) или синего (с) цветов.

Сравнивают цвета и расплачиваются друг с другом так как показано в матрице игры.

Считая, что игра повторяется многократно, определить оптимальные стратегии каждого игрока.

$$\begin{array}{c} \\ \mathbf{Ак} \\ \mathbf{Аз} \\ \mathbf{Ас} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \mathbf{Вк} & \mathbf{Вз} & \mathbf{Вс} \end{array} \\ \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

- ***Принцип МАКСИМИНА*** – выбрать ту стратегию, чтобы при наихудшем поведении противника получить максимальный выигрыш.

$$\begin{array}{c|ccc|c} & Вк & Вз & Вс & \text{Min выигрыша А} \\ Ак & -2 & 2 & -1 & -2 \\ Аз & 2 & 1 & 1 & 1 \\ Ас & 3 & -3 & 1 & -3 \\ \hline & 3 & 2 & 1 & \end{array}$$

α = b = v = 1 – седловая точка

Max выигрыша А
Min проигрыша В

(Аз;Вс) – пара оптим. стратегий

$\boldsymbol{\alpha} = \max\{-2;1;-3\} = 1$
- нижняя цена игры

$\mathbf{b} = \min\{3;\ 2;\ 1\} = 1$
- верхняя цена игры

СМЕШАННЫЕ СТРАТЕГИИ

Если в игре ***нет седловой точки***, то можно найти нижнюю и верхнюю цены игры, которые указывают, что игрок 1 не должен надеяться на выигрыш больший, чем верхняя цена игры, и может быть уверен в получении выигрыша не меньше нижней цены игры.

Поиск такого решения приводит к необходимости применять смешанные стратегии, то есть чередовать чистые стратегии с какими-то частотами.

1) Теорема и максимине. В конечной игре двух игроков (коалиций) с нулевой суммой (матричной игре) при a ≠ b имеет место равенство:

$$\boxed{v_A = v_B}$$

Теорема о максимине указывает на существование равновесия для случая $V_A = V_B$ *при a ≠ b, и, следовательно, существования оптимальных смешанных стратегий.*

2) Основная теорема матричных игр.

Любая матричная игра имеет, по крайней мере, одно оптимальное решение, в общем случае, в смешанных стратегиях и соответствующую цену V.

Цена игры V – средний выигрыш, приходящийся на одну партию, - всегда удовлетворяет условию:

$$\alpha \le v \le \beta,$$

т.е. лежит между нижней **а** и верхней **в** ценами игры.

Те из чистых стратегий игроков А и В, которые входят в их оптимальные смешанные стратегии с вероятностями, не равными нулю, называются ***активными стратегиями***.

1. Решение задач в смешанных стратегиях размерностью 2х2

Аналитический метод

Графический метод

Аналитический метод решения игры 2х2

$$\begin{array}{ccc} & & \\ A = \left| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix} \right| & \begin{matrix} p_1 \\ p_2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} q_1 & q_2 \end{matrix} & \end{array}$$

1) Оптимальное решение в смешанных стратегиях: $S_A = | p_1, p_2 |$ и $S_B = | q_1, q_2 |$
2) Вероятности применения (относительные частоты применения) чистых стратегий удовлетворяют соотношениям:

$$p_1 + p_2 = 1$$

$$q_1 + q_2 = 1$$

1) Если игрок А использует свою оптимальную смешанную стратегию, а игрок В – свою чистую активную стратегию В1, то цена игры V равна:

$$\mathbf{a_{11}p_1 + a_{21}p_2 = v}$$

2) Если игрок А использует свою оптимальную смешанную стратегию, а игрок В – свою чистую активную стратегию В2, то цена игры V равна:

$$\mathbf{a_{12}p_1 + a_{22}p_2 = v}$$

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

ЗАДАНИЕ:

Найти, чему равны p1, p2, v, если:

$$\mathbf{a_{11}p_1 + a_{21}p_2 = v}$$

$$\mathbf{a_{12}p_1 + a_{22}p_2 = v}$$

Получаем решение матричной игры:

$$p_1 = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}}$$

$$p_2 = \frac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}}$$

$$v = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{21} - a_{12}}$$

Вычислив оптимальное значение V, можно вычислить и оптимальную смешанную стратегию второго игрока из условия:

$$\mathbf{a_{11}p_1 + a_{21}p_2 = v} \quad \textbf{и} \quad \mathbf{a_{12}p_1 + a_{22}p_2 = v}$$

$$\boxed{q_1 = \frac{a_{22} - a_{12}}{(a_{11} + a_{22}) - (a_{12} + a_{21})} = \frac{v - a_{12}}{a_{11} - a_{12}}}$$

$$\boxed{q_2 = \frac{a_{11} - a_{12}}{(a_{11} + a_{22}) - (a_{12} + a_{21})} = \frac{a_{11} - v}{a_{11} - a_{12}}}$$

Пример

Платежная матрица имеет следующий вид:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$$

Найти решение игры аналитическим методом

Решение:

Сначала необходимо определить, решается ли данная игра в чистых стратегиях, то есть существует ли седловая точка или нет.

$$\begin{array}{ccc} & & \min \\ A = & \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 7 & 4 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 3 \\ 4 \end{array} \\ \max & \begin{array}{cc} 7 & 8 \end{array} & \end{array} \longrightarrow \begin{array}{l} \alpha = 4 \\ \beta = 7 \end{array}$$

$$\alpha = \max_i \min_j a_{ij}$$

$$\beta = \min_j \max_i \beta_j$$

α < β, при этом цена игры V є [4;7]

Игра не имеет седловой точки, следовательно, не решается в чистых стратегиях

- Обозначим: $p_1=p$, то $p_2=1-p$
- $q_1=1$, то $q_2=1-q$

$$A = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 7 & 4 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \mathbf{p} \\ \mathbf{1-p} \end{array} \\ \begin{array}{cc} \mathbf{q} & \mathbf{1-q} \end{array} & \end{array}$$

$$\begin{cases} 3p+7(1-p)=V \\ 8p+4(1-p)=V \end{cases} \qquad \begin{cases} 3q+8(1-q)=V \\ 7q+4(1-q)=V \end{cases}$$

- Решим системы уравнений:

$$\begin{cases} 3p+7(1-p)=V \\ 8p+4(1-p)=V \end{cases}$$

3p+7-7p=8p+4-4p

-4p+7=4p+4

8p=3

p1=3/8

p2=1-3/8=5/8

(3/8;5/8) – вектор вероятности

V=3*3/8+7*5/8=5,5 – среднее значение выигрыша А

$$\begin{cases} 3q+8(1-q)=V \\ 7q+4(1-q)=V \end{cases}$$

3q+8-8q=7q+4-4q

-5q+8=3q+4

q1=1/2, q2=1/2;

(1/2;1/2)

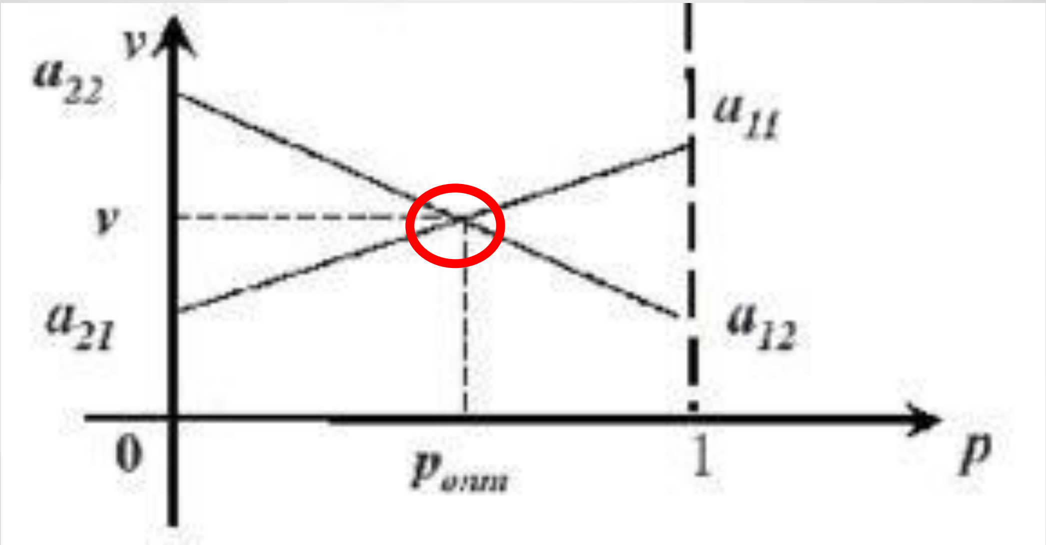
V=3*1/2+8*1/2=5,5

ОТВЕТ: оптимальная смешанная стратегия игрока А – *Sa=(0,375;0,625),* игрока В – *Sb=(0,5;0,5)*

Графический метод решения 2х2

1. Найдем оптимальную стратегию для первого игрока (А):

а) построим систему координат:



б) по оси абсцисс откладывается вероятность $p_1 \in [0,1]$, равная 1.

в) по оси ординат – выигрыши игрока А при стратегии A_2, а на прямой p = 1 – выигрыши при стратегии A_1

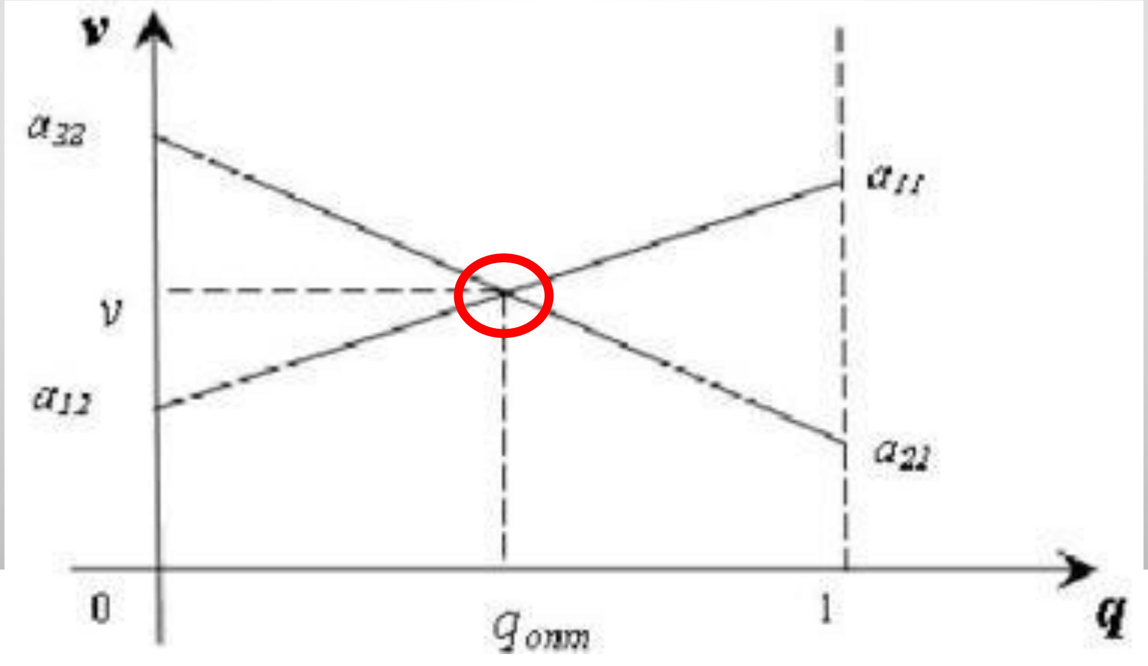
г) находим точку пересечения прямых, которая и дает оптимальное решение матричной игры игрока А ($p_{опт}$,v)

2. <u>Найдем оптимальную стратегию для второго игрока В:</u>

а) по оси абсцисс откладывается вероятность $q_1 \in [0,1]$, равная 1.

в) по оси ординат – выигрыши игрока В при стратегии B_2, а на прямой q = 1 – выигрыши при стратегии B_1

г) находим точку пересечения прямых, которая и дает оптимальное решение матричной игры игрока В ($q_{опт}$,v)



Пример.

Матричная игра 2х2 задана следующей матрицей:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$$

Найти решение игры графическим методом

Решение:

Сначала необходимо определить, решается ли данная игра в чистых стратегиях, то есть существует ли седловая точка или нет.

$\alpha = 4$, $\beta = 7$,

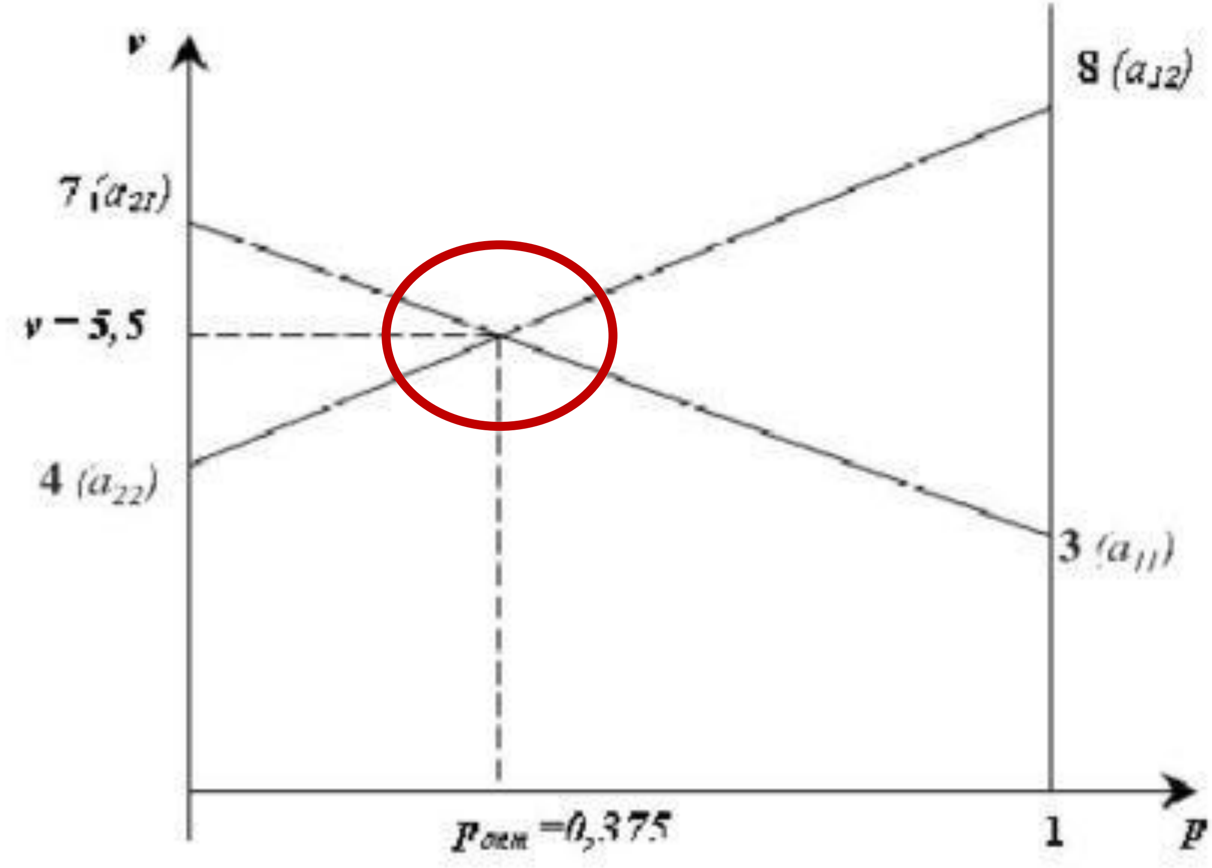
при этом цена игры $v \in [4,7]$

$\alpha < \beta$ – игра не имеет седловой точки,

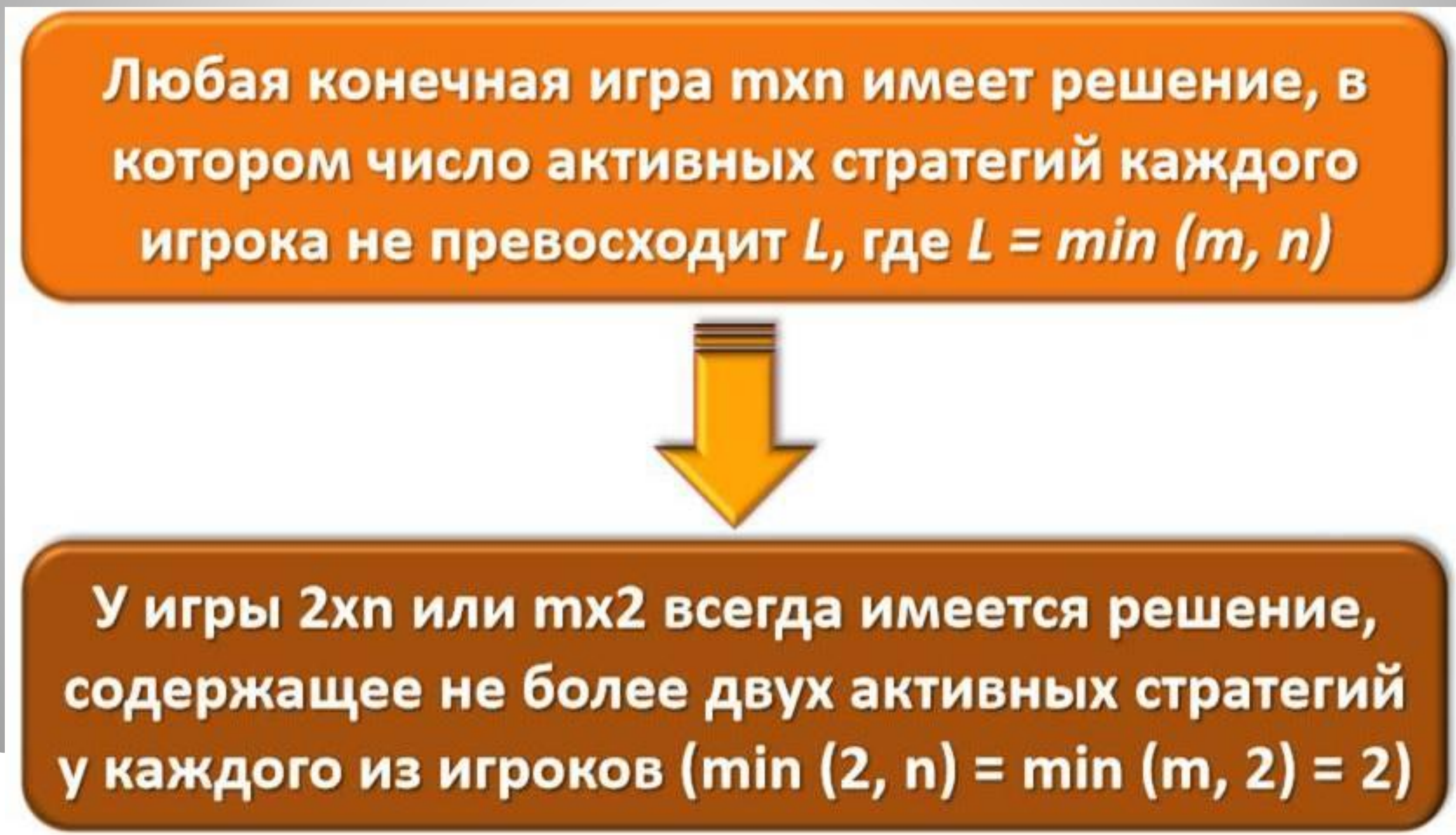
и поэтому имеет решение

в смешанных стратегиях.

Для q построим график самостоятельно



2. Решение задач в смешанных стратегиях размерностью 2xn



Пусть платежная матрица игры имеет вид:

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \end{vmatrix}$$

Согласно теореме об активных стратегиях, решение находится из уравнения:

$$\boxed{v = \min_{j}(a_{1j} p_{onm} + a_{2j}(1 - p_{onm})) = \max_{0 \le p \le 1} \min_{j}(a_{1j} p + a_{2j}(1 - p)), \; j = \overline{1, n}}$$

Найти максимум (по *p*) функции

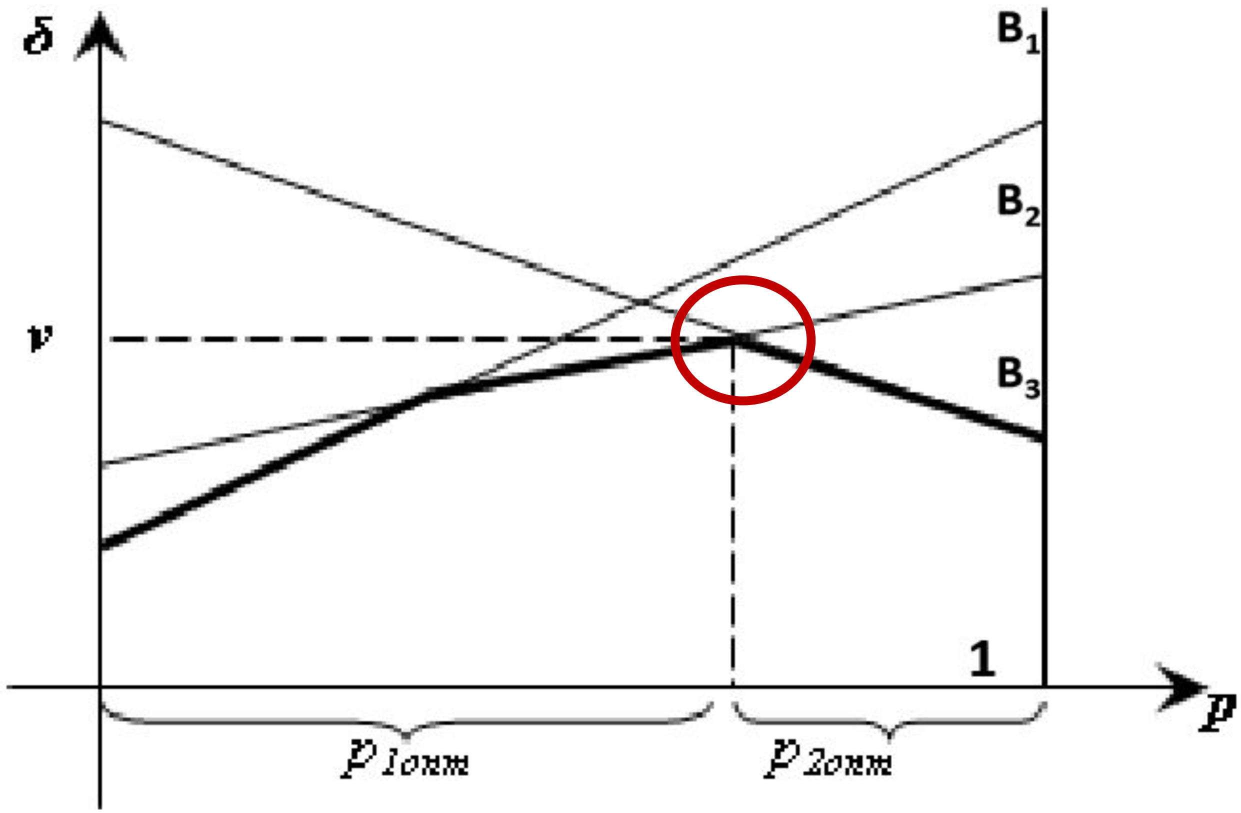
$$\boxed{\min_j (a_{1j} p + a_{2j} (1 - p))}$$

Для этого необходимо построить *n* прямых вида

$$\boxed{\delta_j = a_{1j} p + a_{2j} (1 - p)}$$

на плоскости (*p*, *δ*), $p \in [0, 1]$ и путём визуального сравнения выбрать ломаную, огибающую их снизу

ГРАФИК



ПРИМЕР:

Матричная игра *2xn* задана следующей матрицей

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 8 \\ 7 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

<u>Найти</u> **решение игры графическим и аналитическим методом**

,

Сначала необходимо определить, решается ли данная игра в чистых стратегиях, то есть существует ли седловая точка или нет.

$$\boxed{\alpha = \max_i \min_j a_{ij}}$$

$$\boxed{\beta = \min_j \max_i \beta_j}$$

Вычисляя, получим:

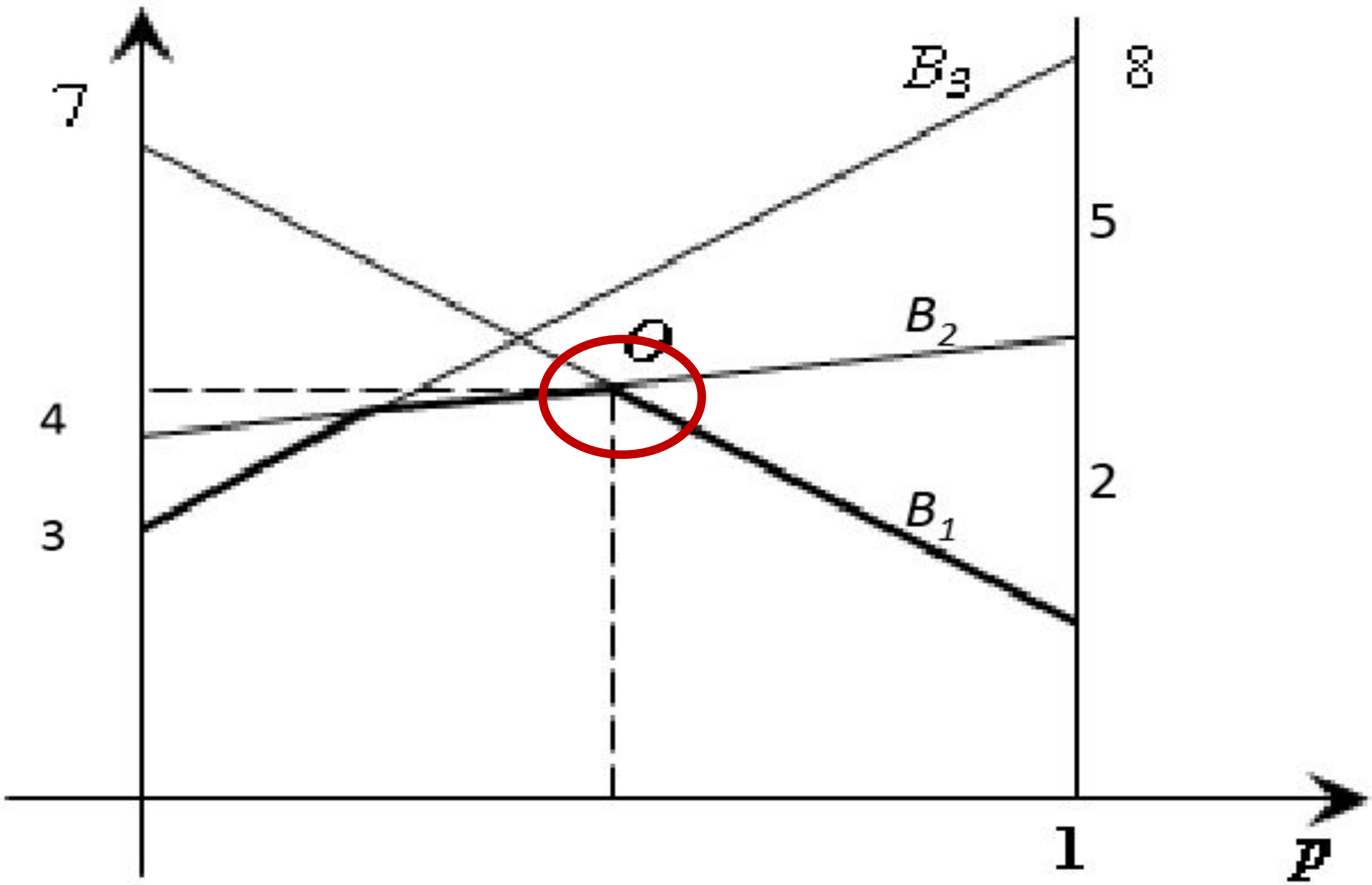
α = max **(2, 3) = 3**

в = min **(7, 5, 8) = 5**

Цена игры $v \in [3, 5]$.

Так как *α < в*, то игра не имеет седловой точки, и поэтому имеет решение в смешанных стратегиях.

Строим графическое изображение игры



Находим точку оптимума – *O*. В этой точке пересекаются стратегии B_1 и B_2 игрока В. Таким образом, исключая стратегию B_3, получаем матричную игру 2x2 с платежной матрицей вида

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 4 \end{vmatrix}$$

Используя алгебраический метод решения этой игры, получаем:

$$p_1 = \frac{4-7}{2+4-7-5} = 0{,}5 \qquad p_2 = 1 - p_1 = 0{,}5$$

$$q_1 = \frac{v - a_{12}}{a_{11} - a_{12}} = \frac{4{,}5-5}{2-5} = 0{,}17 \qquad q_2 = 1 - q_1 = 0{,}83$$

$$v = \frac{2 \cdot 4 - 7 \cdot 5}{2+4-7-5} = 4{,}5$$

ОТВЕТ: оптимальные смешанные стратегии игроков: Sa = (0,5; 0,5); Sb = (0,17; 0,83)
при цене игры v = 4,5

Решение **игры mx2** осуществляется аналогично. Но в этом случае строится графическое изображение игры для игрока В и выделяется не нижняя, а **верхняя граница выигрыша**, и на ней находятся точка оптимума с наименьшей ординатой (минимакс).

ПРИМЕР:

Матричная игра *mx2* задана следующей матрицей

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 1 \\ 2 & 2{,}5 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$$

Найти **решение игры графическим и аналитическим методом**

Сначала необходимо определить, решается ли данная игра в чистых стратегиях, то есть существует ли седловая точка или нет.

$$\boxed{\alpha = \max_i \min_j a_{ij}} \qquad \boxed{\beta = \min_j \max_i \beta_j}$$

Вычисляя, получим:

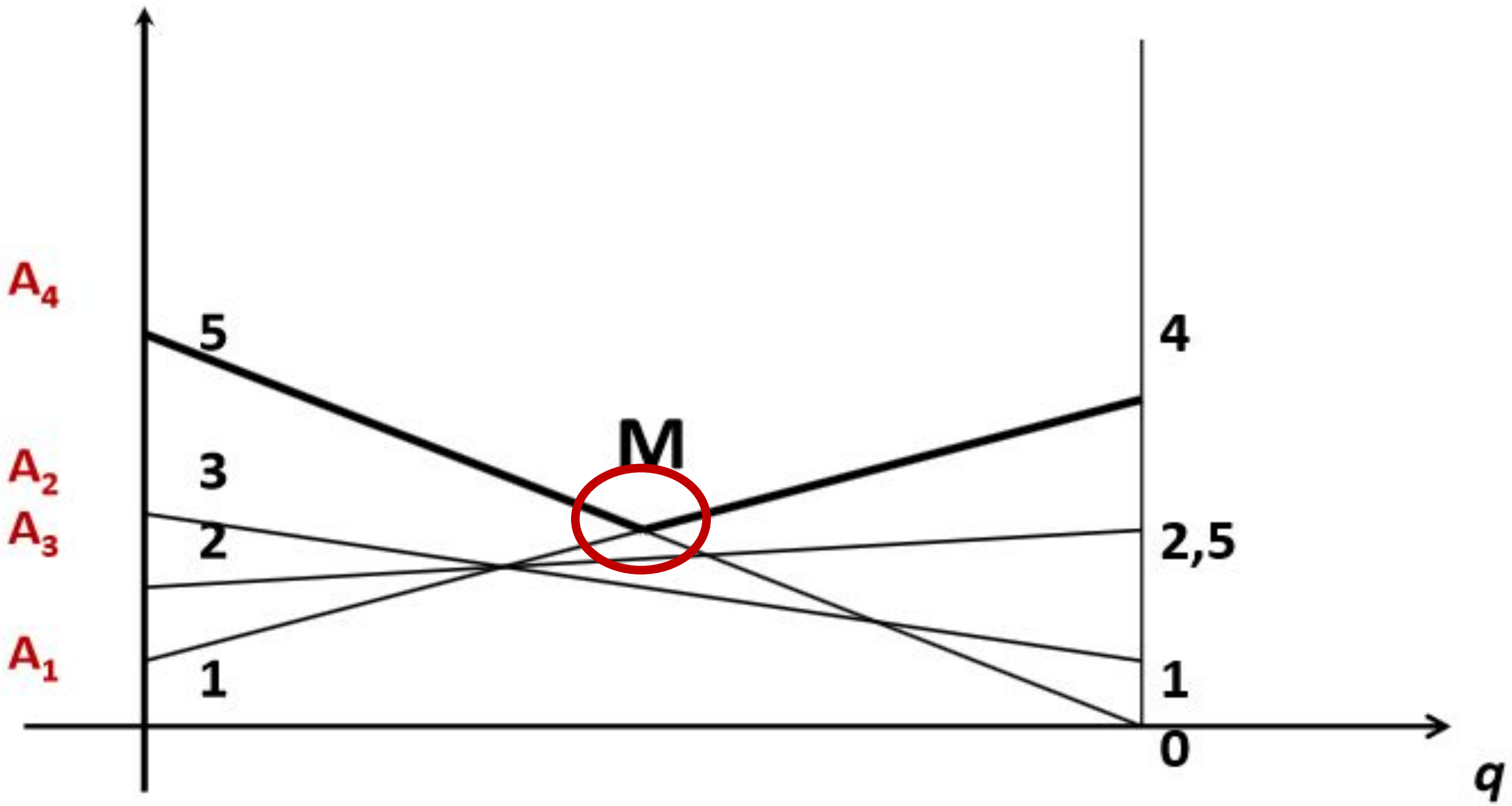
α = max **(1; 1; 2; 0) = 2**

в = min **(5; 4) = 4**

Цена игры *v* $\in$[2, 4].

Так как *α* < *в*, то игра не имеет седловой точки, и поэтому имеет решение в смешанных стратегиях.

ГРАФИК



$p1 = 0,625$ $p2 = 0,375$

$q1 = 0,5$ $q2 = 0,5$

$v = 2,5$

ОТВЕТ: оптимальные смешанные стратегии игроков: Sa = (0,625; 0,375); Sb = (0,5; 0,5)
при цене игры v = 2,5

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!