

“Способи обчислення границь”



Визначення:

Нехай функція $f(x)$ визначена в деякій околиці точки a , крім, може самої точки a . Число B називається границею функції $f(x)$ в точці a , якщо для будь-якої послідовності значення аргументу $x_n \neq a$, $n \in \mathbb{N}$, яка збігається до a , послідовності відповідних значень функції $f(x)$, $n \in \mathbb{N}$, збігається до числа B .

Відомі границі

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

$$2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{e}{x}} = 0$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[x]{1 + \alpha} = e$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sin x} = 1$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$$

Перетворення функції

Приклад №1: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4x^5 - 7x - 2}{5x^2 - 9x - 2}$

для обчислення даної границі необхідно розкласти на множники чисельник та знаменник дроби за формулою розкладання квадратного трьохчлену на множники

$$ax^2 + vx + c = a(x - x_1)(x - x_2) \text{ де } x_1 \text{ та } x_2$$

-- корені трьохчлена

Маємо $4x^2 - 7x - 2 = 0$, $D=81$, $x_1 = 2, x_2 = -\frac{1}{4}$

$$4x^2 - 7x - 2 = 4(x - 2)(x + \frac{1}{4})$$

$5x^2 - 9x - 2 = 0$ $D=121$, $x_1 = 2, x_2 = -\frac{1}{5}$

$$5x^2 - 9x - 2 = 5(x - 2)(x + \frac{1}{5})$$

Повернемося до обчислення границі:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4x^2 - 7x - 2}{5x^2 - 9x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4(x - 2)(x + \frac{1}{4})}{5(x - 2)(x + \frac{1}{5})} =$$

Скорочуємо дріб на множник (x-2) та маємо:

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4(x + \frac{1}{4})}{5(x + \frac{1}{5})} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4x + 1}{5x + 1} = \frac{\lim_{x \rightarrow 2} 4x + \lim_{x \rightarrow 2} 1}{\lim_{x \rightarrow 2} 5x + \lim_{x \rightarrow 2} 1} = \frac{8 + 1}{10 + 1} = \frac{9}{11}$$

Позбавлення від ірраціональності

Приклад №2:

$$\lim_{x \rightarrow 6} \frac{\sqrt{x+3}-3}{x^2-36} \quad \text{Так як} \quad \lim_{x \rightarrow 6} (x^2-36) = 0, \lim_{x \rightarrow 6} (\sqrt{x+3}-3) = 0$$

Розкладемо знаменник на множники за формулою $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

Так як чисельник на множник розкласти не можна, то домножемо на вираз $(\sqrt{x+3}+3)$;

Щоб дана дріб не змінилася – знаменник теж домножемо на той же самий вираз. Тоді ми маємо:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 6} \frac{\sqrt{x+3}-3}{x^2-36} &= \lim_{x \rightarrow 6} \frac{(\sqrt{x+3}-3)(\sqrt{x+3}+3)}{(\sqrt{x+3}+3)(x-6)(x+6)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 6} \frac{(\sqrt{x+3})^2-3}{(\sqrt{x+3}+3)(x-6)(x+6)} = \lim_{x \rightarrow 6} \frac{x+3-9}{(\sqrt{x+3}+3)(x-6)(x+6)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 6} \frac{x-6}{(\sqrt{x+3}+3)(x-6)(x+6)} = \lim_{x \rightarrow 6} \frac{1}{(\sqrt{x+3}+3)(x+6)} = \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow 6} 1}{\lim_{x \rightarrow 6} (\sqrt{x+3}+3) \cdot \lim_{x \rightarrow 6} (x+6)} = \frac{1}{6 \cdot 12} = \frac{1}{72} \end{aligned}$$

Границя функції на нескінченності

Приклад №3: Винесемо у чисельнику та знаменнику x у найбільшому степеню, та скоротимо дріб, Та будемо пам'ятати, що

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - x^2 + 5x - 1}{x^3 - 2x^4 + 2x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a}{x^n} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - x^2 + 5x - 1}{x^3 - 2x^4 + 2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 \left(1 - \frac{1}{x^2} + \frac{5}{x^3} - \frac{1}{x^4}\right)}{x^4 \left(\frac{1}{x} - 2 + \frac{2}{x^3}\right)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{x^2} + \frac{5}{x^3} - \frac{1}{x^4}}{\left(\frac{1}{x} - 2 + \frac{2}{x^3}\right)} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} 1 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^4}}{\lim_{x \rightarrow \infty} -\frac{1}{x} \lim_{x \rightarrow \infty} 2 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x^3}} =$$

$$= \frac{1 - 0 + 0 - 0}{0 - 2 + 0} = -\frac{1}{2}$$

Приклад №4:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x + 6 \sin 8x}{x} &= \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x}{x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 8x}{x} = 6 + 8 = 14 \end{aligned}$$

Обчислити границі:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{\sin 3x};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^2 - 7x + 3}{3x^2 - 2x - 1};$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{3x^2 - 17x + 10}{3x^2 - 16x + 5};$$

$$7) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{x + \sqrt{x+2}};$$

$$9) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{4x+1} - 3}{\sqrt{x+2} - 2};$$

$$11) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{1+x} \right)^x;$$

$$13) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{2x} \right)^x;$$

$$15) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{\sin 3x};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3-x}{x^3 - 27};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 4x + 3}{x + 5};$$

$$6) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^2 - 7x - 12}{2x^2 - 5x - 8};$$

$$8) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 2x^3 - 1}{100x^3 + 2x^2};$$

$$10) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x} - x);$$

$$12) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{\sin \frac{x}{2}};$$

$$14) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1} \right);$$

$$16) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3-x}{x^3 - 27};$$

Обчислити границі:

$$15) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{\sin 3x};$$

$$16) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3-x}{x^3-27};$$

$$17) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^2-7x+3}{3x^2-2x-1};$$

$$18) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2-4x+3}{x+5};$$

Розділ 4. Функції. Границя функції.

$$19) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{3x^2-17x+10}{3x^2-16x+5};$$

$$20) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^2-7x-12}{2x^2-5x-8};$$

$$21) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{x+\sqrt{x+2}};$$

$$22) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4+2x^3-1}{100x^3+2x^2};$$

$$23) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{4x+1}-3}{\sqrt{x+2}-2};$$

$$24) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+x}-x);$$