МОРФИЗМЫ АЛГЕБР

Выполнил студент группы
4101 Бреус Александр

Будем рассматривать однотипные алгебры $A = \langle A; \Omega_F \rangle$ и $B = \langle B, \Omega_G \rangle$, где $\Omega_F = (F_1, F_2, \ldots, F_n)$, $\tau = (m_1, m_2, \ldots, m_n)$, m_i – число аргументов F_i ; $\Omega_G = (G_1, G_2, \ldots, G_n)$, $\tau = (m_1, m_2, \ldots, m_n)$, m_i – число аргументов G_i . Таким образом, рассматриваем алгебры, в каждой из которых введены одинаковые числа (n) операций и для каждого i, $1 \le i \le n$, числа аргументов операций F_i и G_i одинаковы. Всякое отображение φ основного множества А в(на) основное множество В называем отображением алгебры А в(на) алгебру В.

Изоморфизмом алгебры A =⟨A; F1, F2, …, Fn⟩ в (на) однотипную алгебру B =⟨B; G1, G2, …, Gn⟩ называется взаимно однозначное (биективное) отображение ϕ множества A в(на) B, сохраняющее главные операции алгебры, т.е. для которого выполняются соотношения: ϕ(Fi(x1, x2, …, xmi))=Gi(ϕ(x1), …, ϕ(xmi)) (2.1) для всех i, 1≤ i ≤ n, и для любых x1, x2,…, xmi∈A. Изоморфизм алгебры на себя называется автоморфизмом. Гомоморфизмом алгебры A =⟨A; F1, F2, …, Fn⟩ в(на) однотипную алгебру B =⟨B; G1, G2, …, Gn⟩ называется отображение ϕ множества A в(на) множество B, сохраняющее главные операции алгебры, т.е. для которого выполняются условия (2.1) для всех i, 1≤ i ≤ n, и для любых x1, x2,…, xmi∈A.

ПРИМЕРЫ

Пусть A=〈 (0,∞); ×〉, B=〈 (-∞,∞);+ 〉. Обе алгебры имеют тип т = (2). Рассмотрим отображение ϕ(x) = ln(x) множества (0,∞) на множество (-∞,∞). График функции ln(x) приведён на рис. 2.1. Это отображение Рис. 2.1 y=ln x x 35 является взаимно однозначным отображением множества (0,∞) на множество (-∞,∞). Выясним, сохраняется ли операция, т.е. будет ли произведение переходить в сумму. Имеем:

ϕ(a×b)=ln(a×b)=ln a+ln b=ϕ(a)+ϕ(b).

Таким образом, образ произведения равен сумме образов сомножителей. Следовательно, отображение ϕ(x)=ln(x) в данном случае является изоморфизмом A на B.

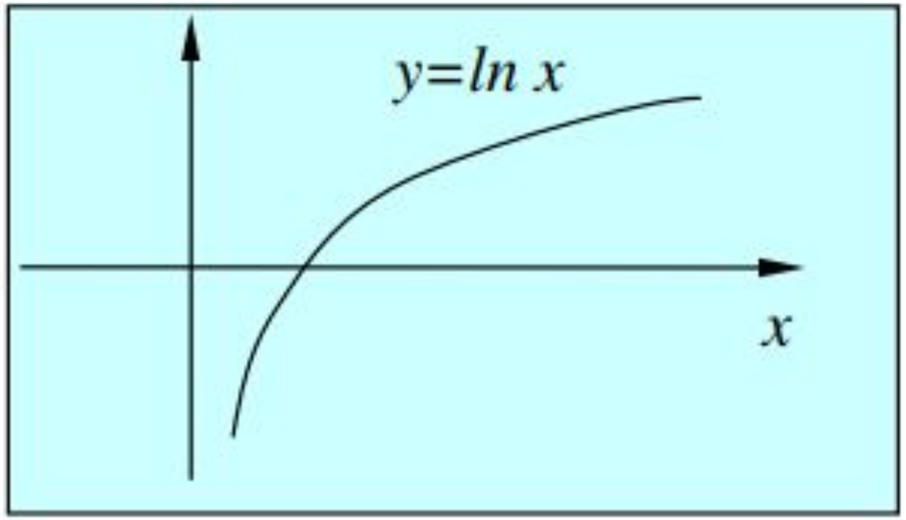

Рис. 2.1

Пусть A =〈 (0,∞); + 〉, B=〈 (-∞,∞); ×〉. Введем отображение ϕ(x)=e x . График функции e x приведён на рис. 2.2. Тогда имеем:

ϕ(x+y) = e x+y = e x · e y = ϕ(x) · ϕ(y).

Таким образом, образ суммы равен произведению образов. Следовательно, это отображение является изоморфизмом A в B, так как ϕ отображает взаимно однозначно множество (0,∞) на часть множества (-∞,∞), ибо e x >1 .

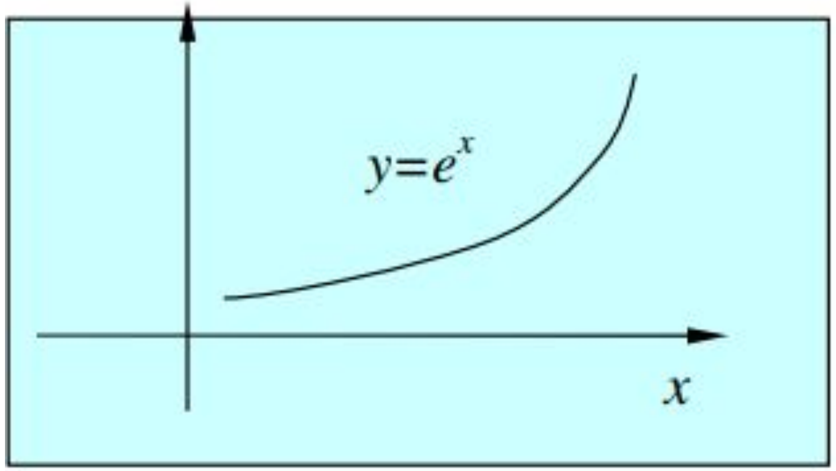

Рис. 2.2

Пусть М - множество квадратных $n \times n$ матриц действительных чисел и на М введена операция умножения матриц, т.е. имеем алгебру $A = \langle M; \times \rangle$ типа т = (2). Положим, что $B = \langle (-\infty, \infty); \bullet \rangle$, здесь «•» означает обычное умножение чисел. Введем отображение $\phi(C) = \det(C)$, когда матрице С ставится в соответствие ее определитель ($\det(C)$). Очевидно, имеем

$$\phi(C \times D) = \det(C \times D) = \det C \bullet \det D = \phi(C) \bullet \phi(D).$$

Таким образом, отображение $\phi: A \to B$ сохраняет операцию. Но это отображение не является изоморфным, так как различные матрицы могут иметь одинаковый определитель. Итак, ϕ – гомоморфизм А на В.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ