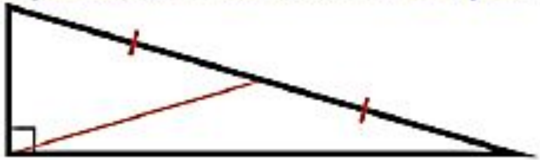
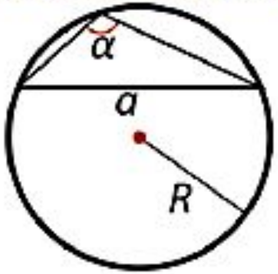
Геометрия в картинках

Теорема о медиане, проведённой к гипотенузе



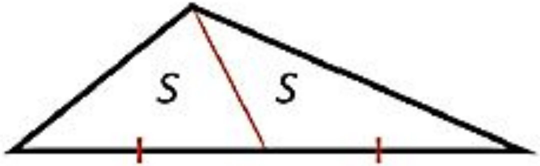
Медиана, проведённая к гипотенузе равна половине гипотенузы

Теорема синусов



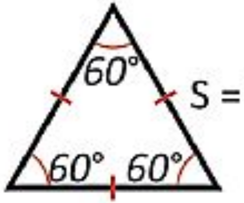
$$\frac{a}{\sin \alpha} = 2R$$

Свойство медианы



Медиана разбивает треугольник на два равновеликих (на два треугольника с равными площадями)

РАВНОСТОРОННИЙ ТРЕУГОЛЬНИК



$$S = \frac{\sqrt{3} \cdot a^2}{4}$$

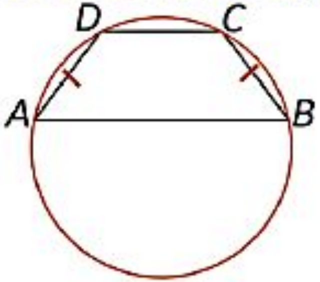
Прочие соотношения

$$R = \frac{\sqrt{3} \cdot a}{3} \qquad h = \frac{\sqrt{3} \cdot a}{2}$$

$$r = \frac{\sqrt{3} \cdot a}{6} \qquad h = 1,5 \cdot R$$

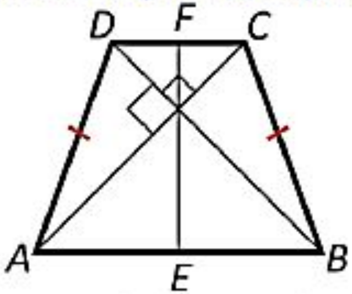
$$h = 3 \cdot r$$

Теорема об описанной окружности



Если трапецию можно вписать в окружность, то эта трапеция – равнобедренная.

Теорема о перпендикулярных диагоналях



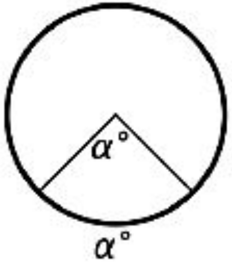
$$h = \frac{a + b}{2}$$

Если в равнобедренной трапеции диагонали перпендикулярны, то высота равна полусумме оснований.

ОКРУЖНОСТЬ

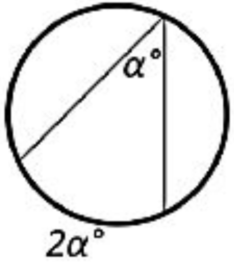
Длина окружности $C = 2 \cdot \pi \cdot R$ **Площадь круга** $S = \pi \cdot R^2$

Центральный угол



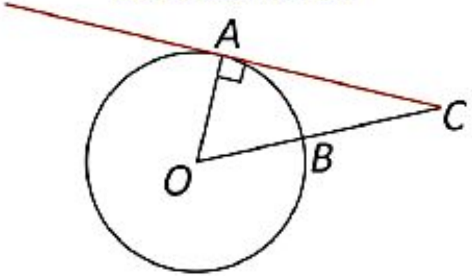
Центральный угол равен градусной мере дуги, на которую он опирается.

Вписанный угол



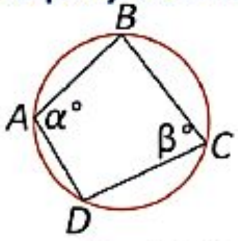
Вписанный угол равен половине градусной мере дуги, на которую он опирается.

Теорема о касательной



Касательная к окружности перпендикулярна к радиусу, проведённому в точку касания.

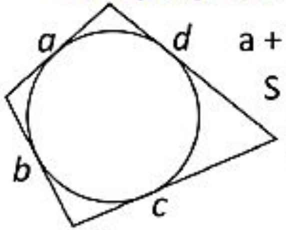
Теорема о вписанном четырёхугольнике



$\alpha + \beta = 180°$

В любом вписанном в окружность четырёхугольнике сумма противоположных углов равна 180°.

Теорема об описанном четырёхугольнике

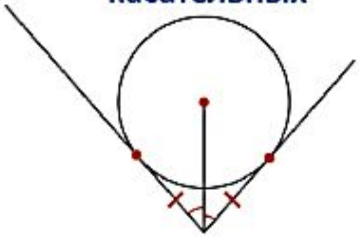


$a + c = b + d$

$S = p \cdot r$,
где p – полупериметр

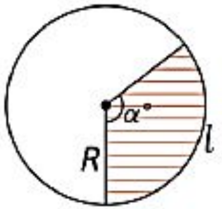
В любом описанном окружностью четырёхугольнике суммы противоположных сторон равны.

Теорема об отрезках касательных



Отрезки касательных к окружности, проведённых из одной точки, равны и составляют равные углы с прямой, проходящей через эту точку и центр окружности.

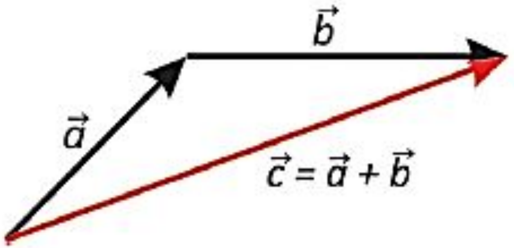
Круговой сектор



$$S_{\text{сектора}} = \frac{l_{\text{сектора}} \cdot R}{2}$$

$$l_{\text{сектора}} = \frac{2 \cdot S_{\text{сектора}}}{R}$$

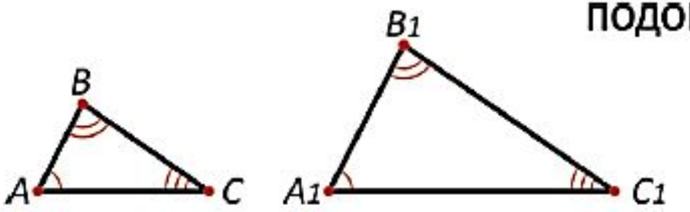
ВЕКТОРЫ



Сложение векторов

Даны два вектора. К концу первого пристраиваем начало второго. Теперь соединяем начало первого и конец второго. Это и есть сумма векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

ПОДОБИЕ



$\angle A = \angle A_1,\ \angle B = \angle B_1,\ \angle C = \angle C_1$

$$\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{A_1C_1}{AC} = k$$

Признаки подобия треугольников

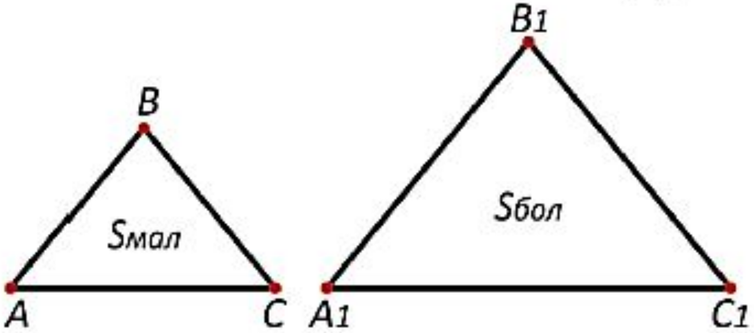
1. По двум равным углам.
2. По двум пропорциональным сторонам и углу между ними.
3. По трём пропорциональным сторонам.

Отношения в подобных треугольниках

Отношение периметров, биссектрис, медиан, высот и серединных перпендикуляров равно коэффициенту подобия.

(периметры) $\frac{P_{бол}}{P_{мал}} = k$ | (медианы) $\frac{m_{бол}}{m_{мал}} = k$ | (биссектрисы) $\frac{l_{бол}}{l_{мал}} = k$ | (высоты) $\frac{h_{бол}}{h_{мал}} = k$ | (сер. перпендикуляр) $\frac{h_{сер.бол}}{h_{сер.мал}} = k$

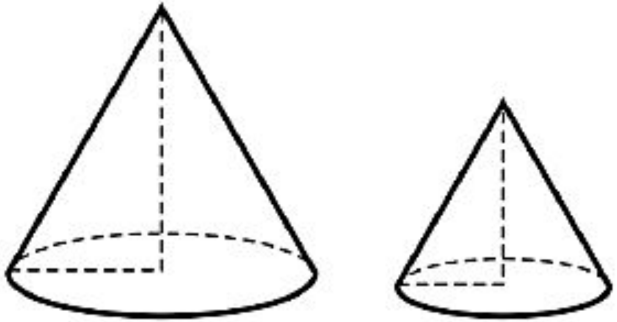
ТЕОРЕМА ОБ ОТНОШЕНИИ ПЛОЩАДЕЙ



$$\frac{S_{бол}}{S_{мал}} = k^2$$

Отношение площадей подобных фигур равно квадрату коэффициента подобия.

ТЕОРЕМА ОБ ОТНОШЕНИИ ОБЪЁМОВ



$$\frac{V_{бол}}{V_{мал}} = k^3$$

Отношение объёмов подобных фигур равно кубу коэффициента подобия.

Треугольники

Произвольный

(a, b, c – стороны, h_a – высота, опущенная на сторону a, p – полупериметр, R – радиус описанной окружности, r – радиус вписанной окружности)

Периметр $P = a + b + c$ | $p = \dfrac{a+b+c}{2}$ – полупериметр

Площадь $S = \dfrac{1}{2} \cdot ah_a = \dfrac{1}{2} \cdot bh_b = \dfrac{1}{2} \cdot ch_c$ | $S = \dfrac{1}{2} \cdot ab \sin C$ | $S = \sqrt{p \cdot (p-a)(p-b)(p-c)}$ | $S = \dfrac{abc}{4R}$

Высота $h_a = b \sin C$ | $h_a = \dfrac{2S}{a}$ ***Радиус вписанной окружности*** $r = \dfrac{2S}{a+b+c}$ | $r = \dfrac{S}{p}$

Радиус описанной окружности $R = \dfrac{abc}{4S}$ | $R = \dfrac{a}{2\sin A}$ | $R = \dfrac{b}{2\sin B}$ | $R = \dfrac{c}{2\sin C}$

Дополнительные формулы $MN = \dfrac{1}{2}a$ – средняя линия, параллельная стороне a

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ – теорема косинусов

$\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$ – теорема синусов

ОКРУЖНОСТЬ и КРУГ

Окружность, круг

(R – радиус, d – диаметр, α – центральный угол, AB, CD – хорды, $AB \cap CD = M$)

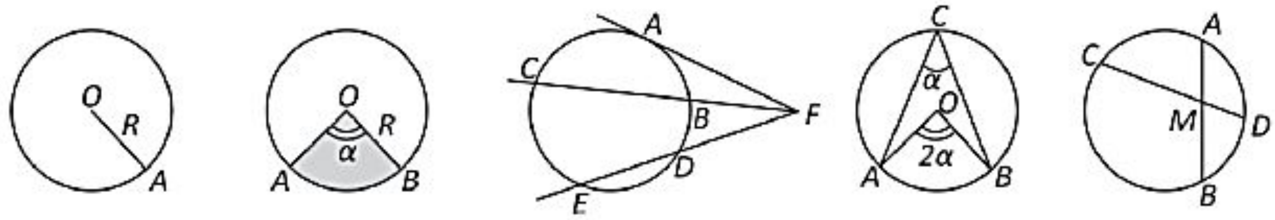
Длина окружности $C = 2\pi R$ | $C = \pi d$ ***Площадь круга*** $S = \pi R^2$ | $S = \frac{\pi d^2}{4}$

Длина дуги окружности $l_{дуги} = \frac{\pi R}{180} \cdot \alpha$ ***Площадь кругового сектора*** $S_{кр.сек.} = \frac{\pi R^2}{360} \cdot \alpha$

Касательная и секущие $FB \cdot FC = FD \cdot FE$ | $FA^2 = FB \cdot FC = FD \cdot FE$

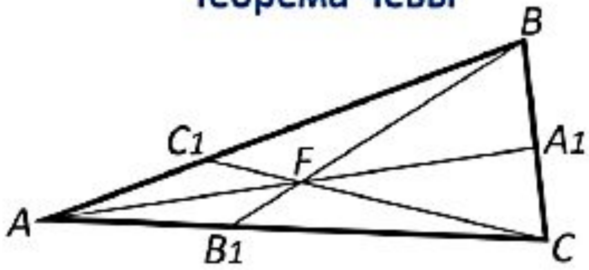
Вписанный и центральный углы $\angle AOB = 2\angle ACB$ | $\angle ACB = 90°$, если AOB – диаметр

Дополнительные формулы $d = 2R$ | $AM \cdot MB = CM \cdot MD$



ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ О ТРЕУГОЛЬНИКЕ

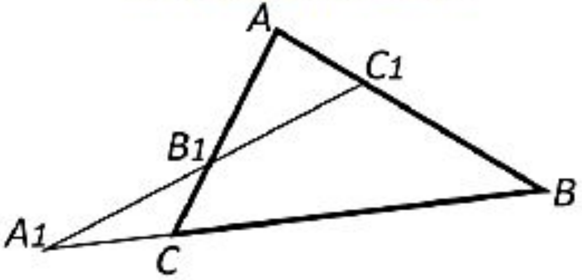
Теорема Чевы



Отрезки AA_1, BB_1, CC_1 тогда и только тогда пересекаются в одной точке, когда:

$$\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} = 1$$

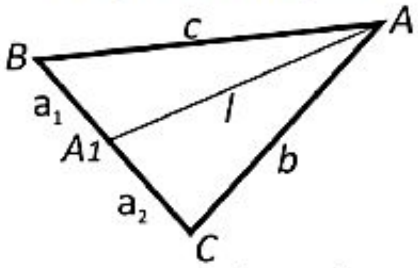
Теорема Менелая



Точки A_1, B_1, C_1 тогда и только тогда лежат на одной прямой, когда:

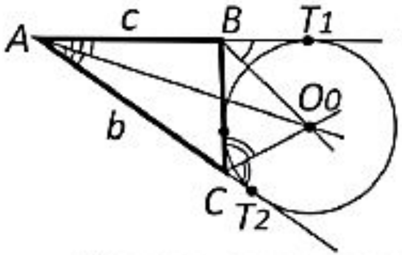
$$\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} = 1$$

Теорема Стюарта



$AA_1 = l$, тогда $l^2 = \dfrac{b^2 \cdot a_1 + c^2 \cdot a_2}{a_1 + a_2} - a_1 \cdot a_2$

Центры вневписанных окружностей



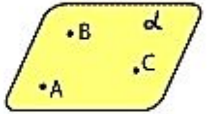
$AT_1 = AT_2 = \frac{1}{2}(AB+BC+CA) = p$

$BK = p - c$; $CK = p - b$

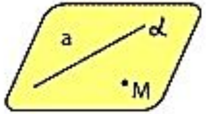
Центры вневписанных окружностей лежат в точках пересечения биссектрисы внутреннего и двух биссектрис внешних углов треугольника.

Стереометрия. Основные понятия

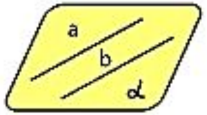
Плоскость в пространстве можно провести:



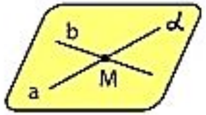
1) Через три точки, не лежащие на одной прямой



2) Через прямую и не лежащую на ней точку

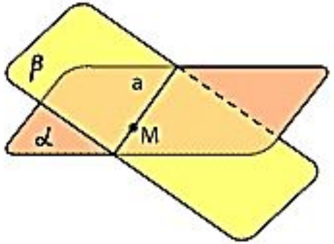


3) Через две параллельные прямые

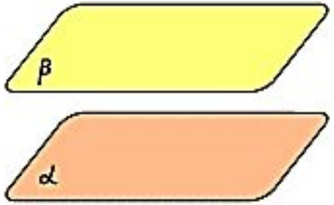


4) Через две пересекающиеся прямые

Плоскости в пространстве

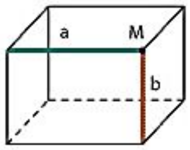


Если две плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по прямой



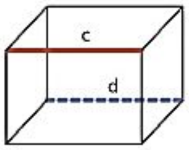
Если две плоскости не имеют общих точек, то они параллельны друг другу

Расположение прямых в пространстве (три случая)



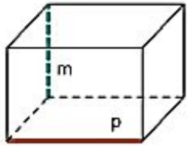
пересекаются

$a \cap b = M$



параллельны

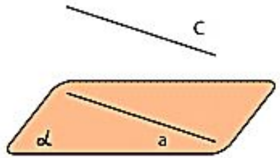
$c \parallel d$



скрещиваются

$m \dot{-} p$

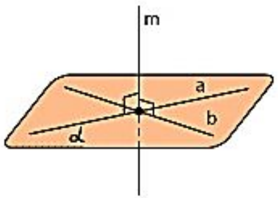
Признак параллельности прямой и плоскости



$$\left.\begin{array}{l} c \parallel a \\ a \in \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow c \parallel \alpha$$

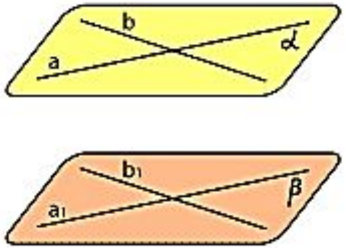
Угол между прямой и плоскостью

Перпендикулярность прямой и плоскости



$$\left.\begin{array}{l} a \in \alpha,\ b \in \alpha \\ m \perp a \\ m \perp b \end{array}\right\} \Rightarrow m \perp \alpha$$

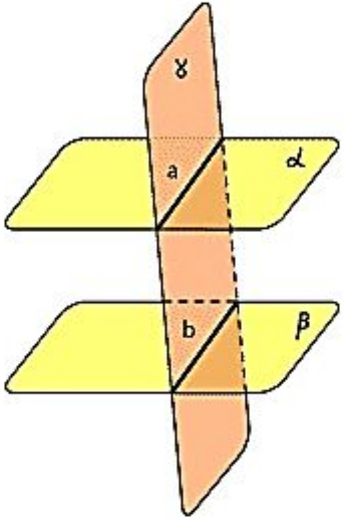
Признак параллельности плоскостей



$a \parallel a_1$
$b \parallel b_1$

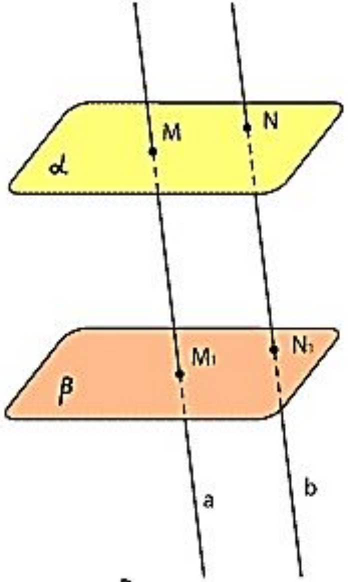
Плоскости α и β параллельны, если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости

Свойства параллельных плоскостей



$$\left.\begin{array}{l} \gamma \cap \alpha = a \\ \gamma \cap \beta = b \\ \alpha \parallel \beta \end{array}\right\} \Rightarrow a \parallel b$$

Линии пересечения двух параллельных плоскостей третьей плоскостью параллельны

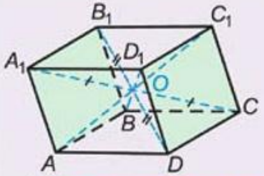


$$\left.\begin{array}{l} \alpha \parallel \beta \\ a \parallel b \end{array}\right\} \Rightarrow MM_1 = NN_1$$

Отрезки параллельных прямых, заключенные между параллельными плоскостями, равны

ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕД

СВОЙСТВА



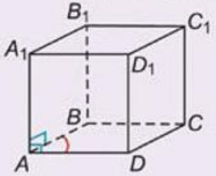
$ABCDA_1B_1C_1D_1$ – ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕД

– число граней – 6
– все грани – параллелограммы
– любая грань может быть основанием

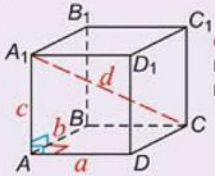
1. Диагонали пересекаются в одной точке (O) и делятся пополам
2. Противоположные грани попарно равны и параллельны
3. Сумма квадратов длин всех диагоналей равна сумме квадратов длин всех ребер параллелепипеда

ВИДЫ ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДОВ

ПРЯМОЙ ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕД (**боковые** грани – **прямоугольники**)



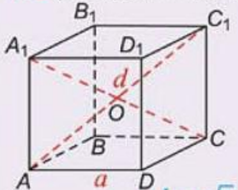
ПРЯМОУГОЛЬНЫЙ ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕД (**все** грани – **прямоугольники**)



a, b, c – измерения прямоугольного параллелепипеда

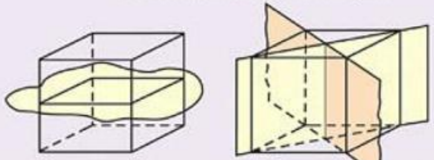
$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

КУБ (**все** грани – **квадраты**)



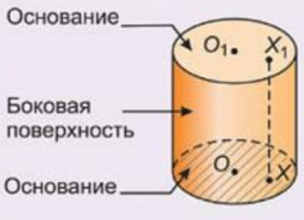
$d = a\sqrt{3}$

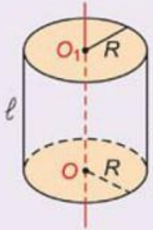
У куба:
– 1 центр симметрии (O)
– 9 плоскостей симметрии



ЦИЛИНДР

ПРЯМОЙ КРУГОВОЙ ЦИЛИНДР





O и O_1 – центры оснований

R – радиус цилиндра

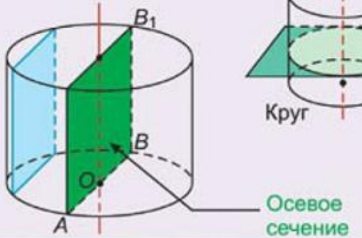
OO_1 – ось цилиндра

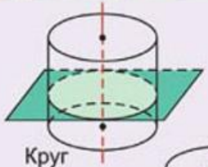
ℓ – образующая цилиндра

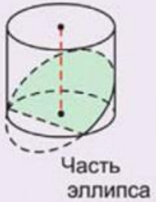
$\ell = OO_1 = h$, где h – высота цилиндра

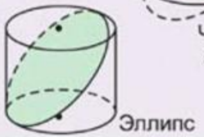
ВИДЫ СЕЧЕНИЙ ЦИЛИНДРА

Прямоугольник

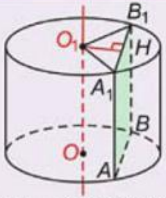




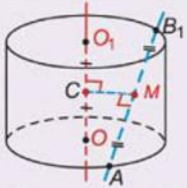




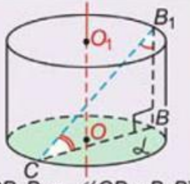
РАССТОЯНИЯ И УГЛЫ



$O_1H = \rho(O_1O; (AA_1B_1))$



$CM = \rho(O_1O; AB_1)$



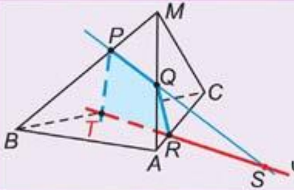
$\angle CB_1B = \angle(CB_1; B_1B)$

$\angle B_1CB = \angle(CB_1; \alpha)$

6 ПОСТРОЕНИЕ СЕЧЕНИЯ ПЛОСКОСТЬЮ, ЗАДАННОЙ ТРЕМЯ ТОЧКАМИ

Задача: Построить сечение многогранника плоскостью, проходящей через точки P, Q и R

ПРИМЕР 1



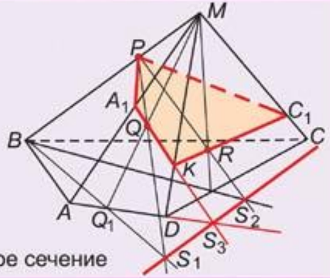
Решение:
1. SR – основной след
2. $SR \cap BC = T$
3. TP
4. PQ
5. QR

Четырехугольник $TPQR$ – искомое сечение

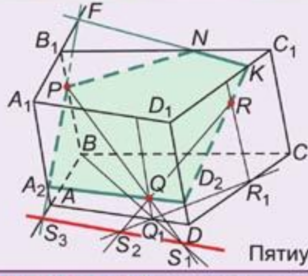
ПРИМЕР 2

Решение:
1. S_1S_2 – основной след
2. $AD \cap S_1S_2 = S_3$
3. S_3Q
4. $K = S_3Q \cap MD$, $A_1 = S_3Q \cap MA$
5. A_1P
6. KR
7. $C_1 = KR \cap MC$
8. C_1P

Четырехугольник A_1KC_1P – искомое сечение



ПРИМЕР 3



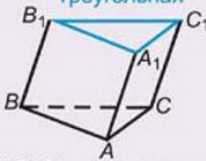
Решение:
1. S_1S_2
2. $S_3 = AB \cap S_1S_2$
3. $A_2 = S_3P \cap A_1A$
4. $A_2Q \cap DD_1 = D_2$
5. $D_2R \cap C_1D_1 = K$
6. $A_2P \cap A_1B_1 = F$
7. $FK \cap B_1C_1 = N$
8. PN

Пятиугольник A_2PNKD_2 – искомое сечение

2 ИЗОБРАЖЕНИЕ ПРИЗМ И ПИРАМИД В ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ ПРОЕКЦИИ

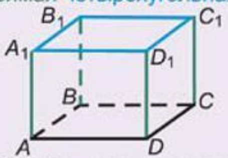
ПРИЗМЫ

Треугольная



1. $\Delta A_1B_1C_1$ – произвольный
2. $A_1A = B_1B = C_1C$
   $A_1A \parallel B_1B \parallel C_1C$
3. ΔABC

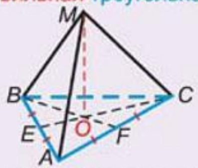
Прямая четырехугольная



1. $A_1B_1C_1D_1$ – параллелограмм
2. A_1A, B_1B, C_1C, D_1D – равные отрезки параллельных прямых
3. Параллелограмм $ABCD$

ПИРАМИДЫ

Правильная треугольная

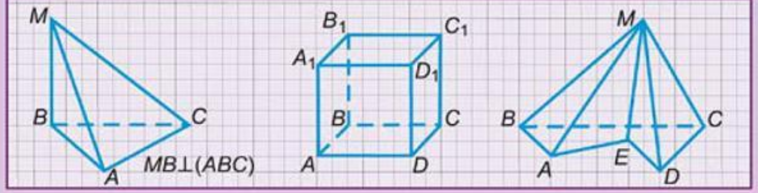


1. ΔABC – произвольный
2. CE и BF – медианы
3. $O = CE \cap BF$
4. Отрезок OM
5. Отрезки MA, MB и MC

Правильная четырехугольная

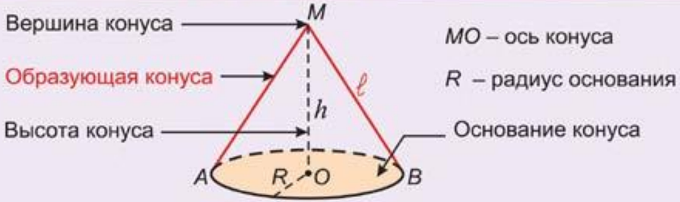
1. $ABCD$ – параллелограмм
2. AC и BD – диагонали
3. $O = AC \cap BD$
4. Отрезок OM
5. Отрезки MA, MB, MC и MD

ПРИМЕРЫ



КОНУС

ПРЯМОЙ КРУГОВОЙ КОНУС

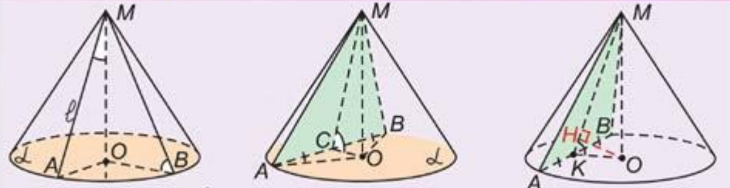


MO – ось конуса

R – радиус основания

ВИДЫ СЕЧЕНИЙ КОНУСА ПЛОСКОСТЯМИ

ПРИМЕРЫ



$\angle AMO = \angle(MO;\ \ell)$

$\angle OBM = \angle(\ell;\ \alpha)$

$\angle MCO = \angle((ABM);\ \alpha)$

$OH = \rho\,(O;\ (ABM))$

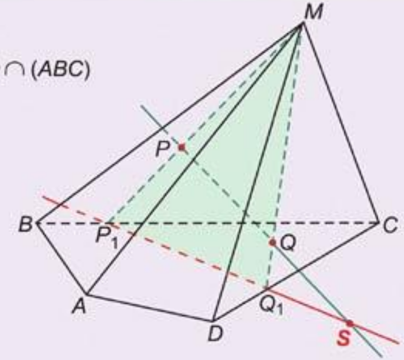
ПОСТРОЕНИЕ ТОЧКИ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ПРЯМОЙ С ПЛОСКОСТЬЮ

ПРИМЕР 1

Дано: $MABCD$ – пирамида
$P \in (MBC)$; $Q \in (MCD)$
Построить точку S: $S = PQ \cap (ABC)$

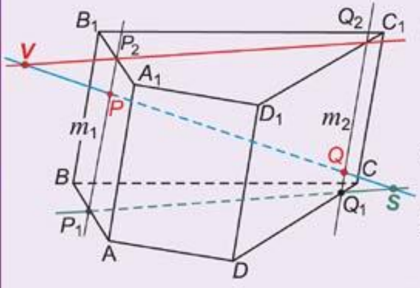
Решение:

1. $P_1 = MP \cap BC$
   $Q_1 = MQ \cap CD$,
2. прямая P_1Q_1
3. $S = PQ \cap P_1Q_1$,
   точка S – искомая



ПРИМЕР 2

Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – призма, $P \in (ABB_1)$; $Q \in (CC_1D)$
Построить точки пересечения прямой PQ с плоскостями оснований призмы.



Решение:

1. $P_1 = m_1 \cap BA$ ($m_1 \parallel AA_1$),
   $Q_1 = m_2 \cap CD$ ($m_2 \parallel CC_1$),
2. $S = PQ \cap P_1Q_1 = PQ \cap (ABC)$
3. $P_2 = m_1 \cap B_1A_1$,
   $Q_2 = m_2 \cap C_1D_1$
4. $V = PQ \cap P_2Q_2 = PQ \cap (A_1B_1C_1)$