

**Тема. Непрерывные
случайные величины
и их числовые
характеристики**

План:

1. Плотность распределения и ее свойства.
2. Числовые характеристики НСВ.

1. Плотность распределения и ее свойства

Плотностью распределения вероятностей или плотностью распределения непрерывной случайной величины X называется производная ее функции распределения $F(x)$

Ее также называют **дифференциальной функцией распределения.**

$$f(x) = F'(x)$$

Теорема. Вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет значение, принадлежащее интервалу $(a ; b)$, равна определенному интегралу от плотности распределения, взятому в пределах от a до b :

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x) dx.$$

Свойства плотности распределения

1) Плотность распределения вероятностей неотрицательная функция

$$f(x) \geq 0$$

2) Площадь фигуры, ограниченной кривой распределения и осью абсцисс, равна единице

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

2. Числовые характеристики НСВ

Математическим ожиданием непрерывной случайной величины X , возможные значения которой принадлежат отрезку от a до b , называют определенный интеграл:

$$M(X) = \int_a^b x \cdot f(x) dx$$

Если возможные значения принадлежат всей оси абсцисс, то

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx$$

Дисперсией непрерывной
случайной величины называют
математическое ожидание
квадрата ее отклонения.

- Если возможные значения принадлежат отрезку , то

$$D(X) = \int_a^b (x - M(X))^2 f(x) dx$$

Если же возможные значения принадлежат всей оси абсцисс, то

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M(X))^2 f(x) dx$$

Среднее квадратическое отклонение
непрерывной случайной величины
определяется равенством

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$$

Замечание 1.

Свойства математического ожидания и дисперсии дискретных случайных величин сохраняются и для непрерывных величин.

Замечание 2.

Для вычисления дисперсии НСВ X можно использовать более удобные формулы:

$$D(X) = \int_a^b x^2 f(x) dx - (M(X))^2$$

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx - (M(X))^2$$

Пример. Найти плотность распределения и числовые характеристики случайной величины X заданной интегральной функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 3; \\ \frac{x^2 - 9}{27}, & \text{при } 3 < x \leq 6; \\ 1, & \text{при } x > 6. \end{cases}$$

Решение.

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 3; \\ \frac{2}{27}x, & \text{при } 3 < x \leq 6; \\ 0, & \text{при } x > 6. \end{cases}$$

$$M(X) = \int_3^6 \frac{2}{27} x^2 dx = \frac{2}{27} \int_3^6 x^2 dx =$$

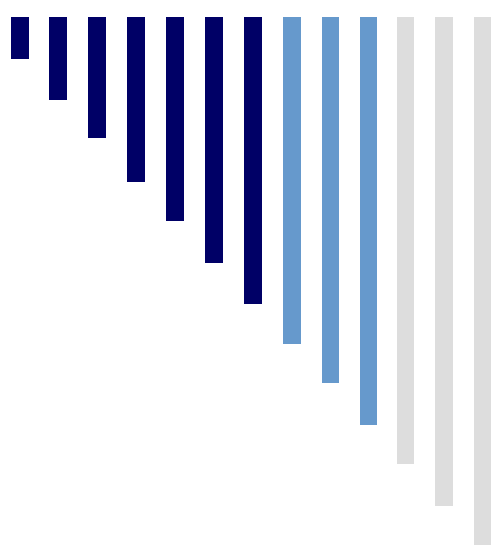
$$= \frac{2}{81} (6^3 - 3^3) = \frac{14}{3} = 4 \frac{2}{3};$$

$$D(X) = \int_3^6 x^2 \frac{2}{27} x dx - \left(\frac{14}{3}\right)^2 =$$

$$= \int_3^6 \frac{2}{27} x^3 dx - \left(\frac{14}{3}\right)^2 = \frac{2}{27} \int_3^6 x^3 dx - \left(\frac{14}{3}\right)^2 =$$

$$= \frac{13}{18} \approx 0,72;$$

$$\sigma(X) = \sqrt{0,72} \approx 0,85$$



Тема. Основные законы распределения НСВ

План:

1. Равномерный закон распределения.
 2. Показательный закон распределения.
 3. Нормальный закон распределения.
-

При решении задач, которые
выдвигает практика, приходится
сталкиваться с различными
распределениями непрерывных
случайных величин.

Плотности распределений
непрерывных случайных величин
называют также **законами**
распределений.

Часто встречаются законы
равномерного, нормального и
показательного распределений.

1. Равномерный закон распределения

Распределение вероятностей называют **равномерным**, если на интервале, которому принадлежат все возможные значения случайной величины, плотность распределения сохраняет постоянное значение.

НСВ считается равномерно распределенной, если ее плотность вероятности имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq a, \\ \frac{1}{b-a}, & \text{если } a < x \leq b, \\ 0, & \text{если } x > b. \end{cases}$$

Числовые характеристики равномерно распределенной случайной величины находятся по следующим формулам:

$$M(X) = \frac{a + b}{2}$$

$$D(X) = \frac{(b - a)^2}{12}$$

■ **Пример.** Случайная величина распределена равномерно в интервале (2;8). Найти ее математическое ожидание и дисперсию.

■ Решение.

$$M(X) = \frac{2 + 8}{2} = 5$$

$$D(X) = \frac{(8 - 2)^2}{12} = 3$$

2. Показательный закон распределения

Показательным (экспоненциальным)

называют распределение вероятностей непрерывной случайной величины X , которое описывается плотностью

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{при } x \geq 0. \end{cases}$$

где λ - постоянная положительная величина.

Показательное распределение определяется одним параметром λ .

Эта особенность показательного распределения указывает на его преимущество по сравнению с распределениями, зависящими от большего числа параметров.

Найдем функцию распределения
показательного закона:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^0 0 dx + \lambda \int_0^x e^{-\lambda x} dx = 1 - e^{-\lambda x}$$

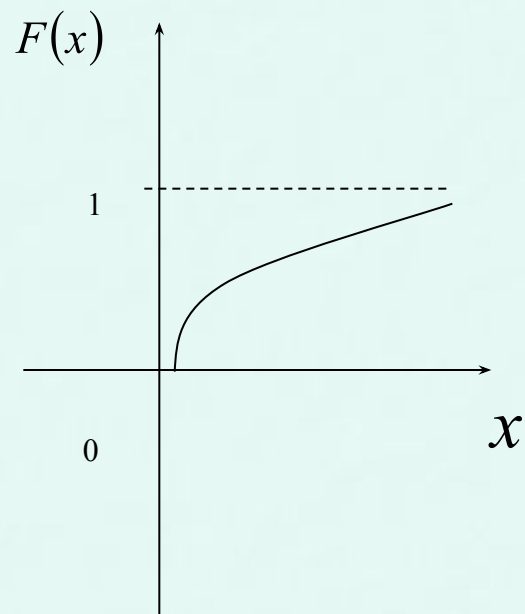
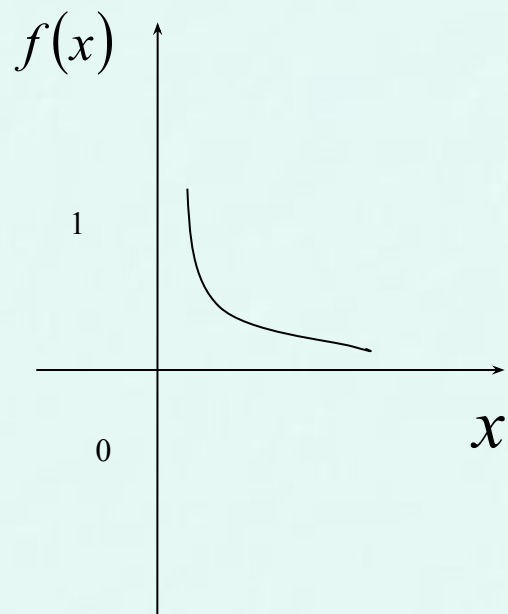
Итак,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{при } x \geq 0. \end{cases}$$

Функция распределения показательного закона имеет вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{при } x \geq 0. \end{cases}$$

Графики функций $F(x)$ и $f(x)$



Вероятность попадания в заданный интервал показательной распределенной случайной величины

Вероятность попадания в интервал непрерывной случайной величины X , которая распределена по показательному закону, заданному функцией распределения

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x} \quad (x \geq 0)$$

вычисляется по формуле

$$P(a < X < b) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$$

Пример. Непрерывная случайная величина X распределена по показательному закону

$$f(x) = 2e^{-2x} \text{ при } x \geq 0 \text{ ;}$$

$$f(x) = 0 \text{ при } x < 0 \text{ .}$$

Найти вероятность того, что в результате испытания X попадет в интервал $(0,3 ; 1)$.

Решение. По условию, $\lambda = 2$.

$$\begin{aligned} P(0,3 < X < 1) &= e^{-(2 \cdot 0,3)} - e^{-(2 \cdot 1)} = \\ &= e^{-0,6} - e^{-2} = 0,54881 - 0,13534 \approx 0,41. \end{aligned}$$

Числовые характеристики показательного распределения

Числовые характеристики
непрерывной случайной величины X
распределенной по показательному закону
вычисляются по формулам:

$$M(X) = \frac{1}{\lambda}$$

$$D(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\frac{1}{\lambda^2}} = \frac{1}{\lambda}$$

Пример. Непрерывная случайная величина X распределена по показательному закону

$$f(x) = 5e^{-5x} \text{ при } x \geq 0 ;$$

$$f(x) = 0 \text{ при } x < 0.$$

Найти математическое ожидание, среднее квадратическое отклонение и дисперсию X .

Пример. Непрерывная случайная величина X распределена по показательному закону

$$f(x) = 5e^{-5x} \text{ при } x \geq 0 ;$$

$$f(x) = 0 \text{ при } x < 0.$$

Найти математическое ожидание, среднее квадратическое отклонение и дисперсию X .

Решение. По условию, $\lambda = 5$. Следовательно,

$$M(X) = \sigma(X) = \frac{1}{\lambda} \Rightarrow M(X) = \sigma(X) = \frac{1}{5} = 0,2$$

$$D(X) = \frac{1}{\lambda^2} \Rightarrow D(X) = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25} = 0,04$$

3. Нормальный закон распределения

Нормальным называют распределение вероятностей непрерывной случайной величины, которое описывается плотностью

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

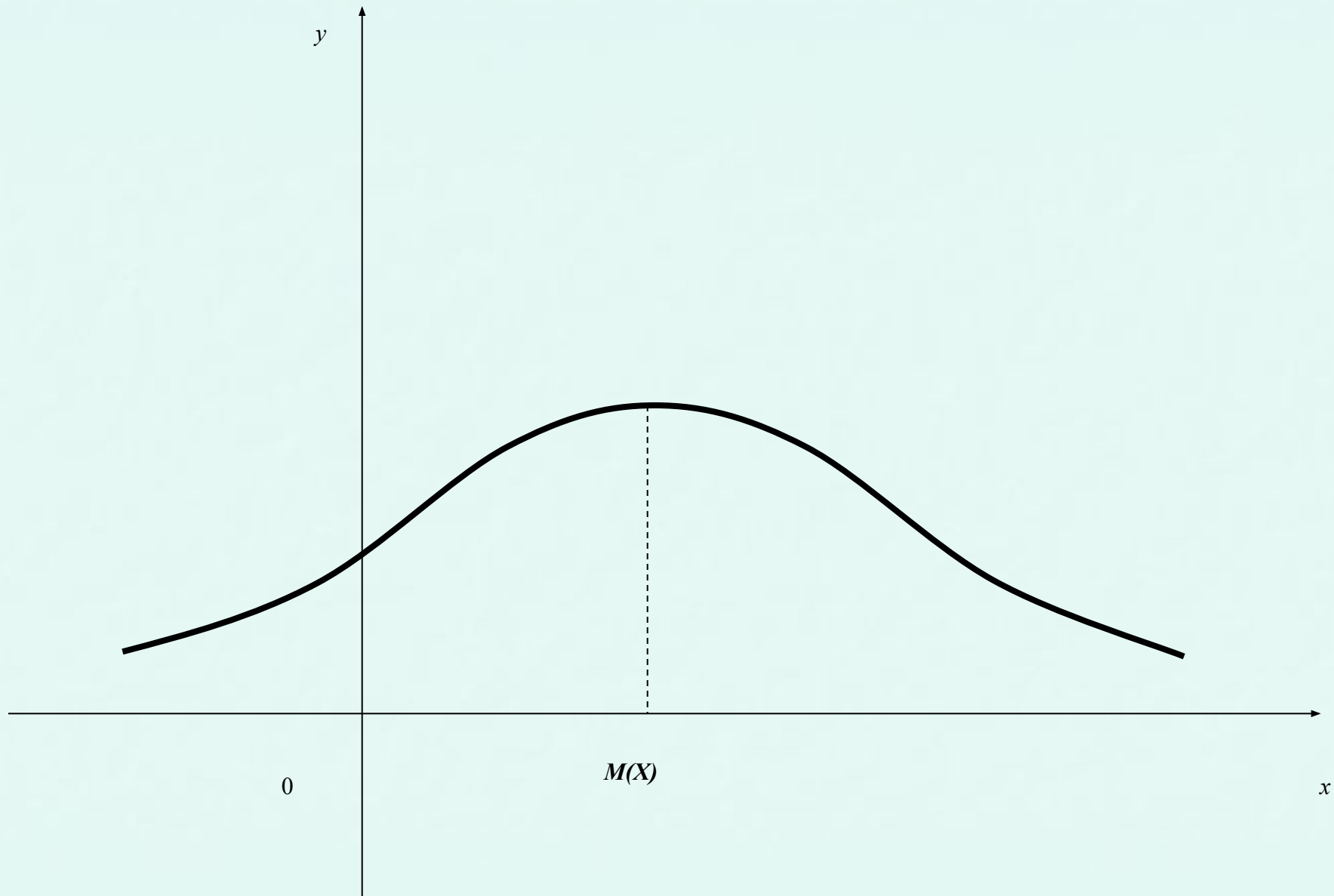
Нормальное распределение
определяется двумя параметрами:

μ *σ*

Достаточно знать эти параметры,
чтобы задать нормальное распределение.

Нормальная кривая

График плотности нормального распределения называют **нормальной кривой (кривой Гаусса)**.



Влияние параметров нормального распределения на форму нормальной кривой.

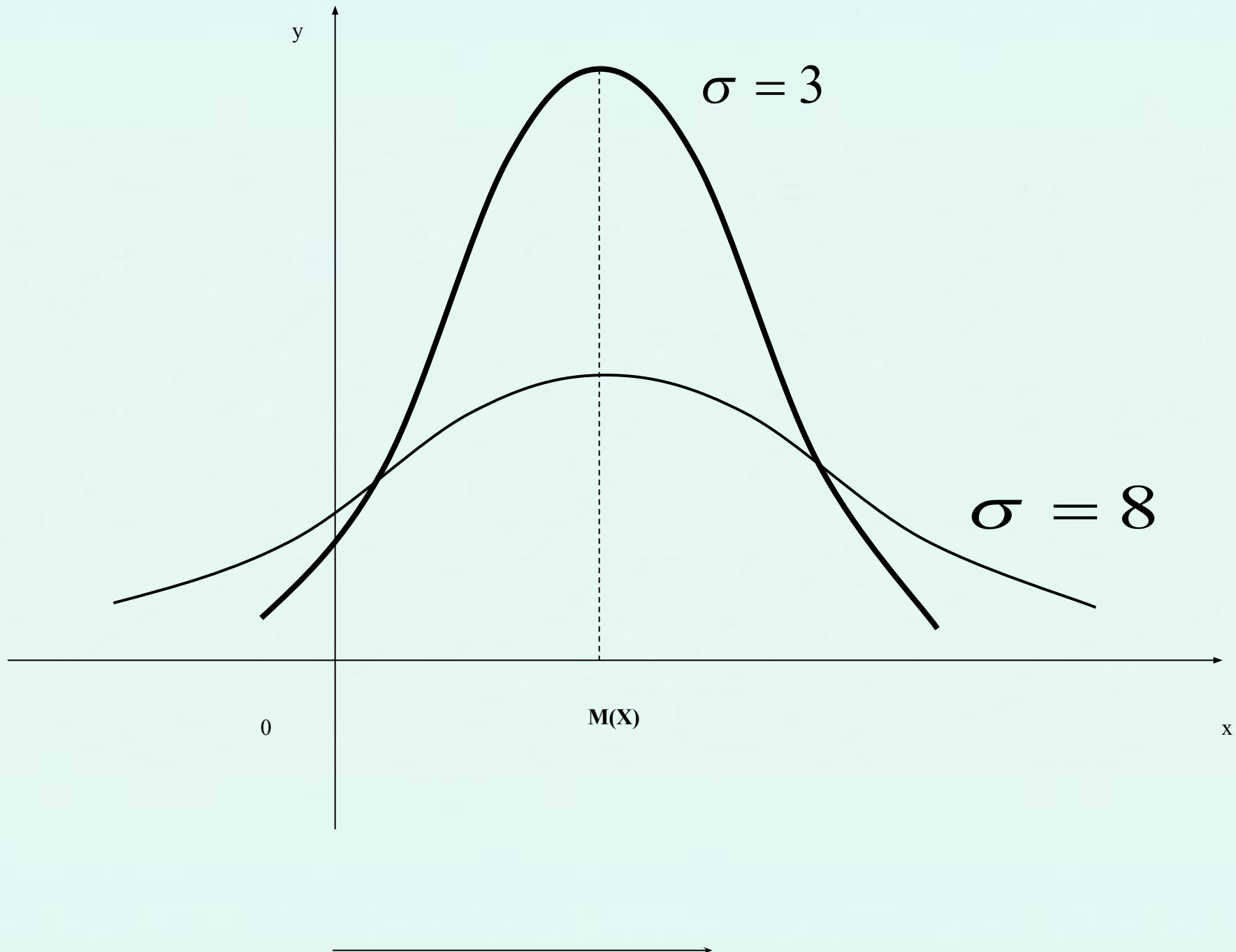
Изменение величины параметра

a

не изменяет формы нормальной кривой, а приводит лишь к ее сдвигу вдоль оси абсцисс: вправо, если математическое ожидание возрастает и влево, если оно убывает.

С возрастом среднее квадратическое отклонение максимальной ординаты нормальной кривой убывает, а сама кривая становится более пологой, т.е. сжимается к оси абсцисс.

При убывании среднего квадратического отклонения нормальная кривая становится более «островершинной» и растягивается в положительном направлении оси ординат.



При математическом ожидании равном нулю и среднем квадратическом отклонении равном единице нормальную кривую называют **нормированной**.

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Вероятность попадания в заданный интервал нормальной случайной величины

Пусть случайная величина распределена по нормальному закону. Тогда вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу , равна

$$P(\alpha < X < \beta) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx$$

Вероятность попадания в заданный интервал нормальной случайной величины

Пусть случайная величина распределена по нормальному закону. Тогда вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу , равна

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right)$$

В результате преобразований и
использования функции Лапласа

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

ОКОНЧАТЕЛЬНО ПОЛУЧИМ

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right)$$

Пример. Случайная величина X распределена по нормальному закону с математическим ожиданием равным 40 и средним квадратическим отклонением 30 . Найти вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу $(20;70)$.

Решение.

$$\begin{aligned} P(20 < X < 70) &= \Phi\left(\frac{70 - 40}{30}\right) - \Phi\left(\frac{20 - 40}{30}\right) = \\ &= \Phi(1) + \Phi\left(\frac{2}{3}\right) = 0,3413 + 0,2486 = 0,5899 \end{aligned}$$

Вычисление вероятности заданного отклонения

- Часто требуется вычислить вероятность того, что отклонение нормально распределенной случайной величины по абсолютной величине меньше заданного положительного числа , т. е. найти вероятность осуществления неравенства

$$|X - a| < \delta$$

$$P(|X - a| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$$

- **Пример.** Случайная величина
распределена нормально

$$M(X) = 20; \sigma(X) = 10$$

- Найти вероятность того, что
отклонение по абсолютной величине
будет меньше трех.

Решение. Используя формулу

$$P(|X - a| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$$

и данные условия задачи:

$$a = 20; \sigma = 10; \delta = 3$$

а также используя таблицу значений функции Лапласа, получим:

$$\begin{aligned} P(|X - 20| < 3) &= 2\Phi\left(\frac{3}{10}\right) = \\ &= 2\Phi(0,3) = 2 \cdot 0,1179 = 0,2358 \end{aligned}$$

Правило трех сигм

Правило трех сигм: Если случайная величина имеет нормальный закон распределения с параметрами

a и *σ*

то практически достоверно (вероятность 0,9973), что ее значения заключены в интервале

$$(a - 3\sigma; a + 3\sigma)$$

На практике правило трех сигм применяют так: если распределение изучаемой величины неизвестно, но условие, указанное в правиле выполняется, то есть основание предполагать, что изучаемая величина распределена нормально.